



Ústav hydrogeologie, inženýrské geologie a užité geofyziky Karlova Univerzita, Praha

Přednášky pro předmět

Matematické modelování v geomechanice I

3. část – numerické metody

David Mašín

Obsah

- Výstavba matematického modelu
- Numerické metody
 - ★ Metoda sítí
 - ★ Metoda konečných prvků
- Modely diskontinua

Výstavba matematického modelu

Matematický model *v rámci kontinua* je tvořen několika nedílnými součástmi:

- Bilančními rovnicemi
- Konstitučními vztahy (viz. \leftarrow)
- Okrajovými podmínkami
- Počátečními podmínkami
- Numerickou metodou

Bilanční rovnice

Bilanční rovnice (zákony zachování) představují základní fyzikální principy jež musí být splněny *nezávisle na modelovaném materiálu*.

V úlohách geomechaniky se jedná především o

- Zákon zachování hmotnosti
- Zákon zachování hybnosti

Zákon zachování hmotnosti

Zákon zachování hmotnosti zní:

Izolovaná soustava hmotných objektů má celkovou hmotnost konstantní

V Eulerově vyjádření můžeme zákon zachování hmotnosti zapsat pomocí *parciální diferenciální rovnice*

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

Zákon zachování hmotnosti

V Lagrangeově formě můžeme ovšem tuto rovnici integrovat *v materiálovém bodě* analyticky, získáme

$$\rho(\mathbf{X}, t)J(\mathbf{X}, t) = \rho_0(\mathbf{X})$$

kde $J = \det \mathbf{F}$

V Lagrangeově formulaci tedy zákon zachování hmotnosti *nevede* na parciální diferenciální rovnici, což zjednodušuje řešení celého problému.

Zákon zachování hybnosti

Zákon zachování hybnosti říká:

Izolovaná soustava hmotných objektů má celkovou hybnost konstantní

Zákon zachování hybnosti zapsat pomocí parciální diferenciální rovnice jako

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}$$

kde \mathbf{b} jsou objemové síly

Toto je hlavní parciální diferenciální rovnice kterou řešíme pomocí numerických metod (pro většinu případů ji neumíme řešit analyticky).

Okrajové podmínky

Matematickým modelem můžeme postihnout pouze konečnou část prostoru.

Na okrajích této oblasti je třeba předepsat buď hodnoty uvnitř hledaných neznámých veličin, anebo jejich derivace (jinak by měly diferenciální rovnice popisující problém nekonečně mnoho řešení).

Počáteční podmínky

Představují hodnoty neznámých veličin uvnitř řešené úlohy na počátku výpočtu.

Přestože mají značný vliv na výsledky výpočtu, jejich určování je u geomateriálů často obtížné (např. měření napětí a určování objemové hmotnosti *in situ*).

V případě tenzorových stavových proměnných vyjadřujících paměť na předchozí deformaci u pokročilých modelů je jejich experimentální stanovení v podstatě nemožné. Musíme je pak přibližně stanovit např. simulací geologické historie zemního masivu.

Numerické metody

Bilanční rovnice a konstituční vztahy vedou pro příslušné okrajové a počáteční podmínky na soustavu *parciálních diferenciálních rovnic*, jež kromě nejjednodušších případů nelze řešit analyticky.

Můžeme je ale řešit *přibližně* (v konečném počtu bodů kontinua a času) pomocí *numerických metod*. Mezi v geomechanice nejpoužívanější numerické metody patří:

- Metoda sítí
- Metoda charakteristik
- Metoda konečných prvků
- Metoda hraničních prvků

V přednáškách si podrobněji přiblížíme metodu sítí a metodu konečných prvků.

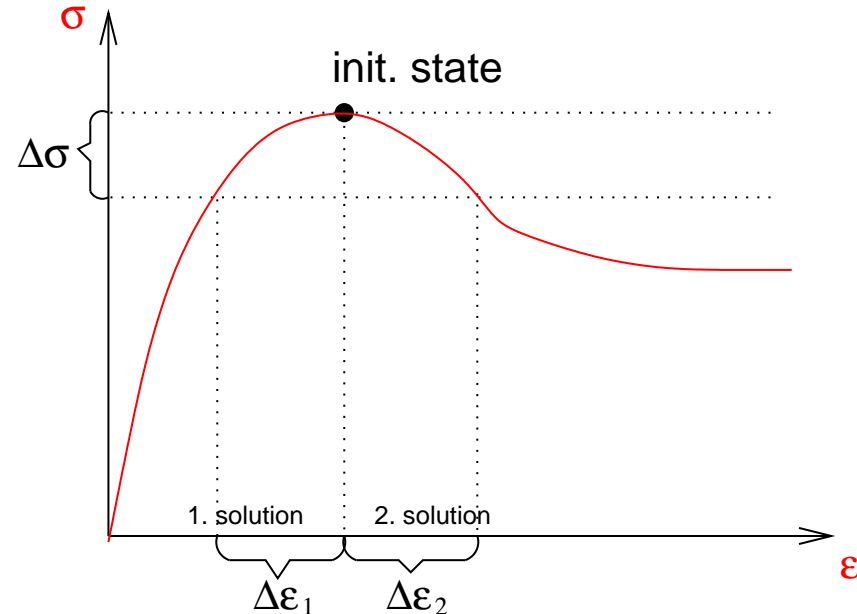
Podmíněnost řešení

System parciálních diferenciálních rovnic charakterizující okrajovou úlohu nemusí mít vždy řešení. Abychom mohli najít vyhovující řešení, musí být splněny následující podmínky:

1. Existence řešení

2. Jednoznačnost řešení

Pro daný problém by mělo existovat právě jedno řešení. Často může docházet k tzv. bifurkaci, tzn. rovnicím úlohy vyhovuje více řešení. Např. při povrcholovém změkčení materiálu →



Podmíněnost řešení

3. Stabilita řešení

Při malé změně počátečních podmínek by mělo dojít pouze k malé změně výsledku.

Pokud jsou splněny všechny tři podmínky, hovoříme o *dobře podmíněné* úloze. Protože většinou nelze dokazovat platnost podmínek matematicky, je často nutné spoléhat se na parametrické studie (zejména v případě podmínky č. 3).

Metoda sítí

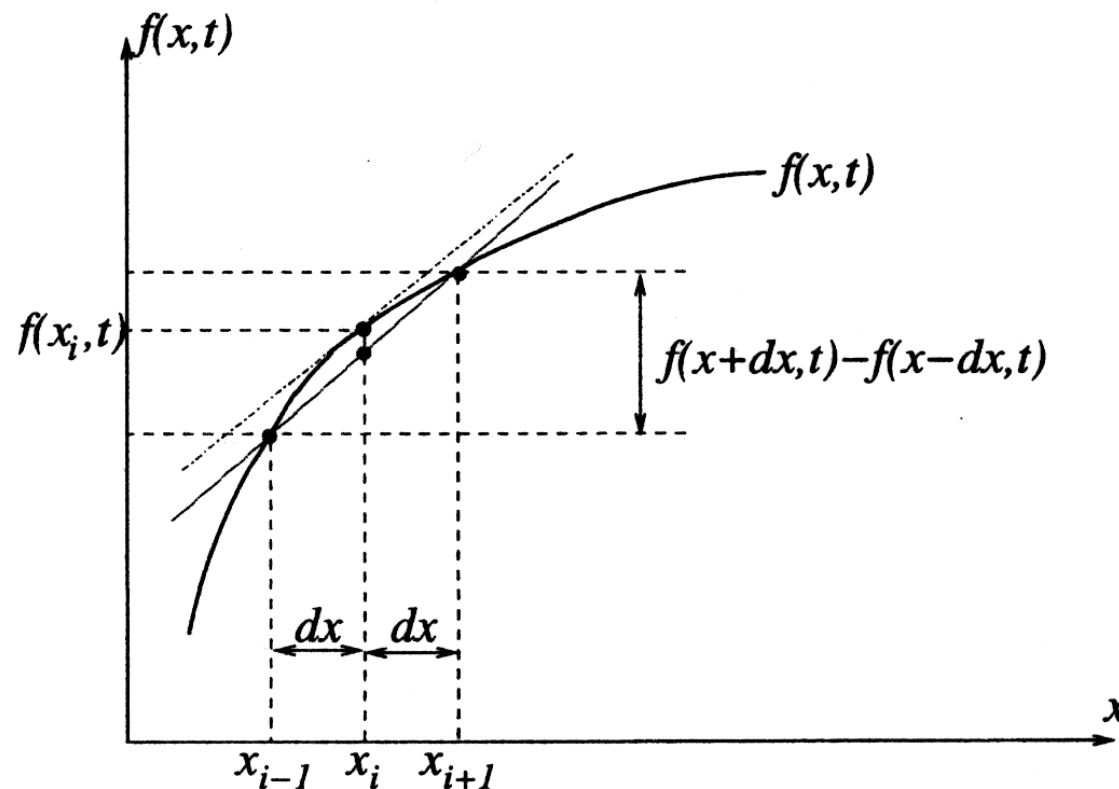
Jinak také nazývaná metoda konečných diferencí. Založena na *diskretizaci* parciálních diferenciálních rovnic popisujících daný problém.

Pracujeme přímo s parciálními diferenciálními rovnicemi, řešíme tedy tzv. silnou formulaci (*strong form*) problému.

Rovnice diskretizujeme v prostoru i čase! Hledáme tedy řešení v konečném množství bodů prostoru a konečném množství časových okamžiků.

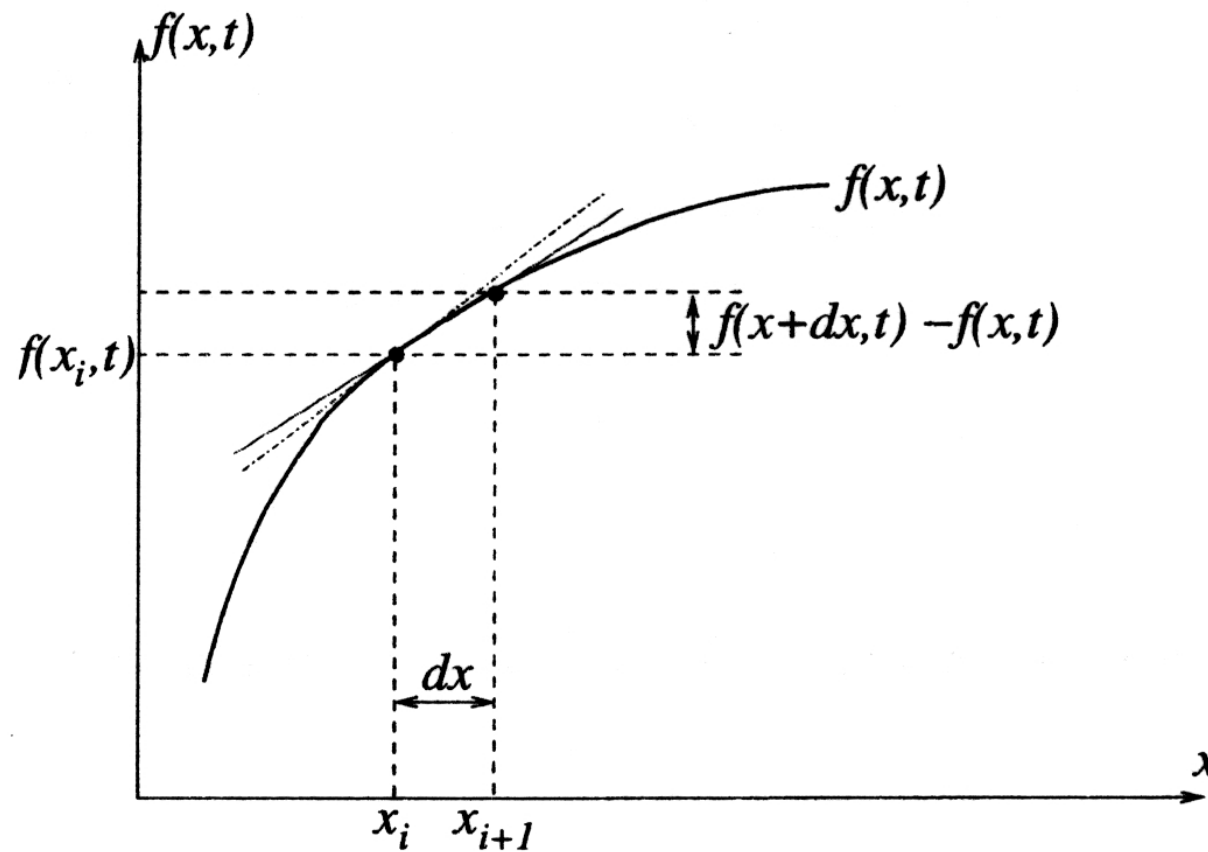
V případě diskretizace prostoru nahradíme derivace z parciálních diferenciálních rovnic diferencemi následujícím způsobem (pro tzv. implicitní algoritmus):

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \approx \frac{f(x + dx, t) - f(x - dx, t)}{2dx}$$



Či pro explicitní algoritmus:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \approx \frac{f(x + dx, t) - f(x, t)}{dx}$$



Pro derivaci druhého řádu platí (s využitím Taylorova rozvoje)

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \underset{\approx}{=} \frac{f(x + dx, t) - 2f(x, t) + f(x - dx, t)}{dx^2}$$

Obdobným způsobem diskretizujeme čas pro daný bod prostoru

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \underset{\approx}{=} \frac{f(x, t + dt) - f(x, t - dt)}{2dt}$$

Jednoosá konsolidace

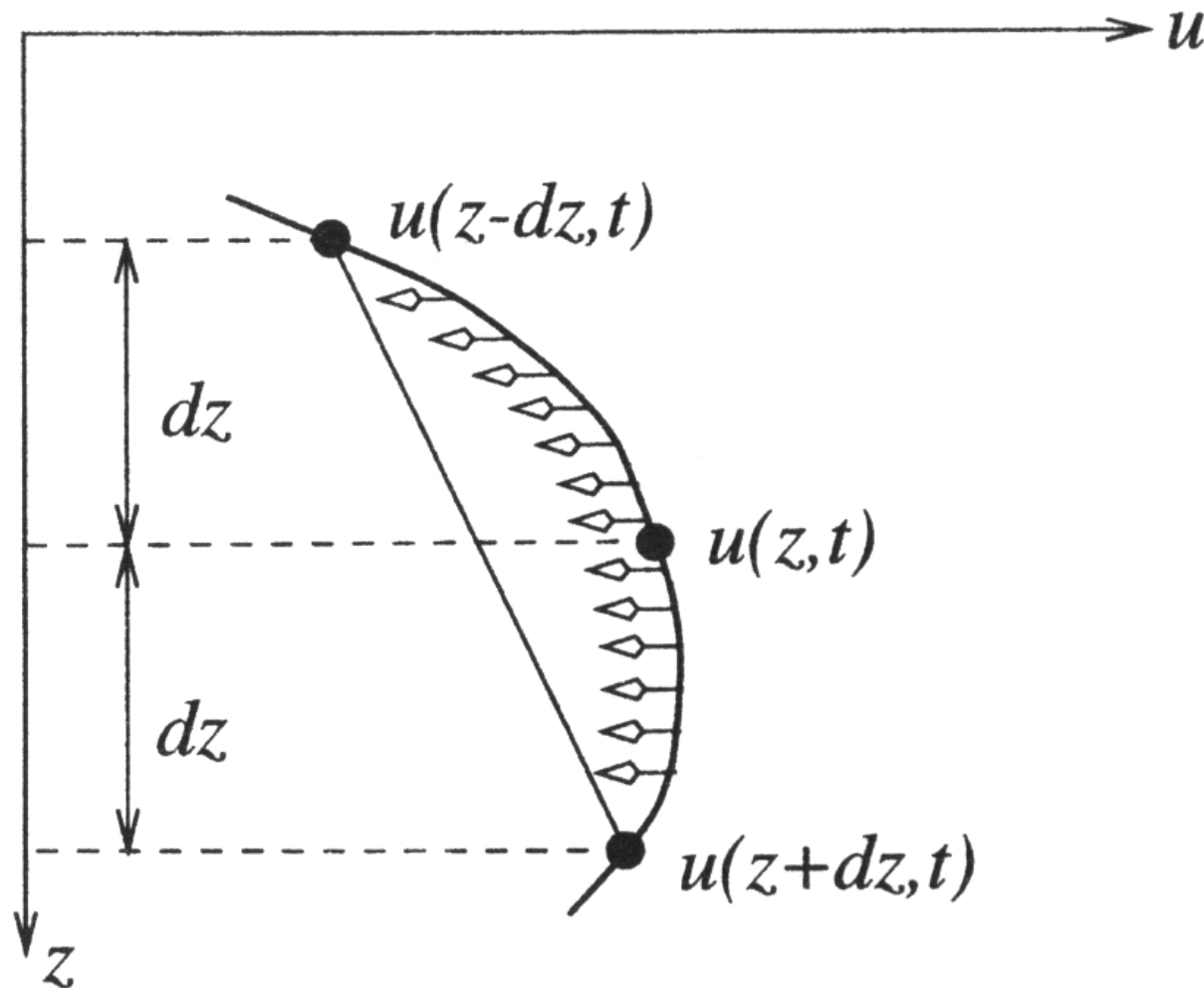
Metodu sítí si budeme demonstrovat na jednoduchém příkladu jednoosé konsolidace.

V tomto případě z *bilančních rovnic* a pružného *konstitučního vztahu* plyne následující rovnice pro jednoosou konsolidaci:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

kde u je pórový tlak, c_v je součinitel konsolidace, t je čas a z je hloubka.

Rovnice vyjadřuje, že změna pórového tlaku je přímo úměrná zakřivení profilu pórového tlaku s hloubkou:



V rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

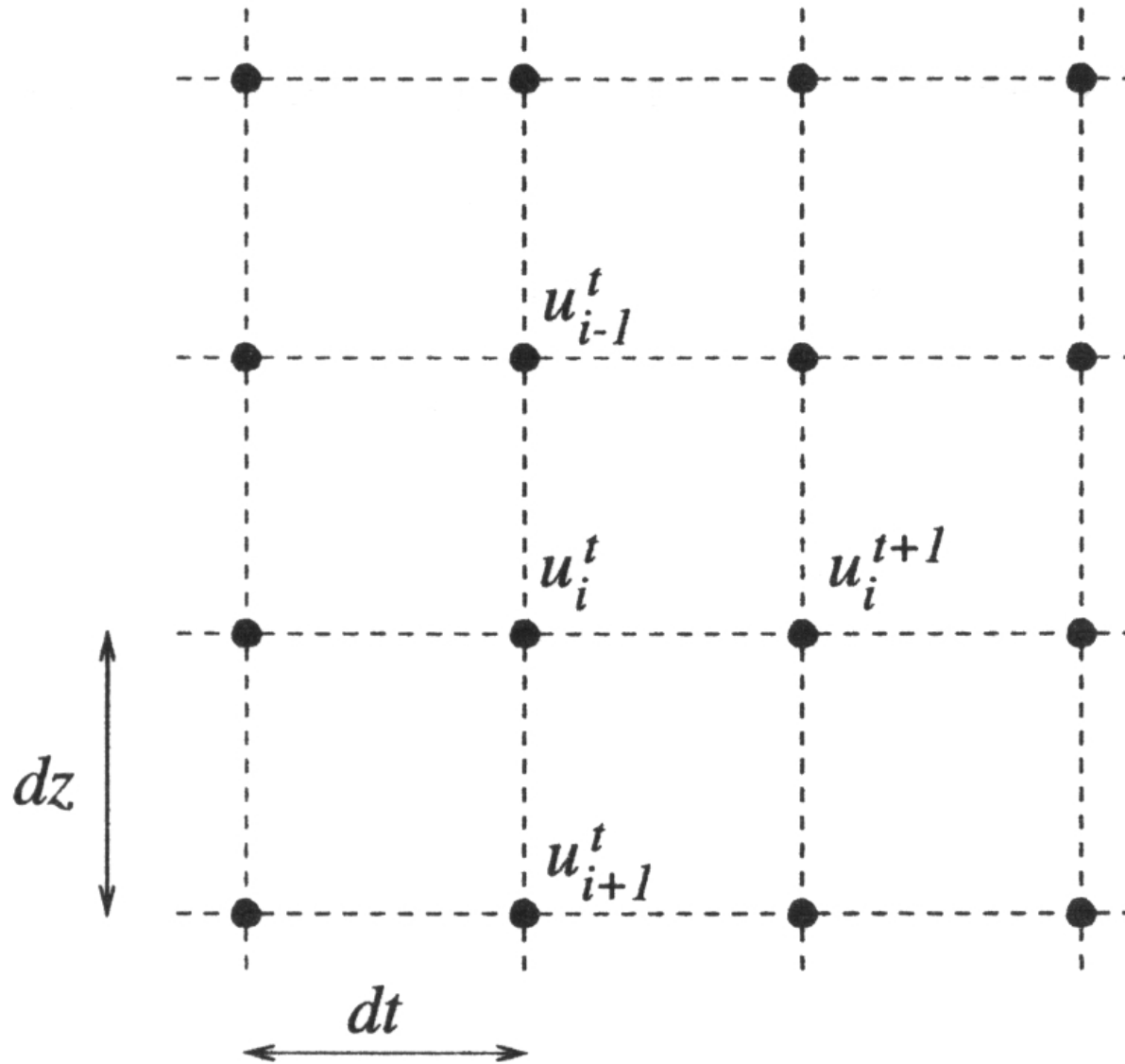
nahradíme derivaci podle času pomocí explicitního algoritmu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(z, t + dt) - u(z, t)}{dt}$$

a derivaci podle hloubky pomocí implicitního algoritmu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{u(z + dz, t) - 2u(z, t) + u(z - dz, t)}{dz^2}$$

Časoprostor diskretizujeme např. následujícím způsobem:



S využitím náhrady derivací diferencemi pro danou diskretizaci získáme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{t+1} - u_i^t}{dt} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{u_{i-1}^t - 2u_i^t + u_{i+1}^t}{dz^2}$$

Dosazením do základní rovnice máme

$$u_i^{t+1} = u_i^t + c_v \left(u_{i-1}^t - 2u_i^t + u_{i+1}^t \right) \frac{dt}{dz^2}$$

Rovnici

$$u_i^{t+1} = u_i^t + c_v (u_{i-1}^t - 2u_i^t + u_{i+1}^t) \frac{dt}{dz^2}$$

snadno vyřešíme pro příslušné okrajové a počáteční podmínky

- Počáteční podmínky: $u(x, 0)$
- Okrajové podmínky:

$u(z_{min}, t) = 0, u(z_{max}, t) = 0$ pro oboustrannou drenáž

$\frac{\partial u(z_{min}, t)}{\partial t} = 0, u(z_{max}, t) = 0$ pro jednostrannou horní drenáž

Evidentně řešení rovnice závisí i na zvolené diskretizaci. Pro dobrou podmíněnost řešení je nutno zvolit vhodný poměr mezi dt a dz (většinou tím způsobem aby $(c_v dt / dz^2) < 0.5$).

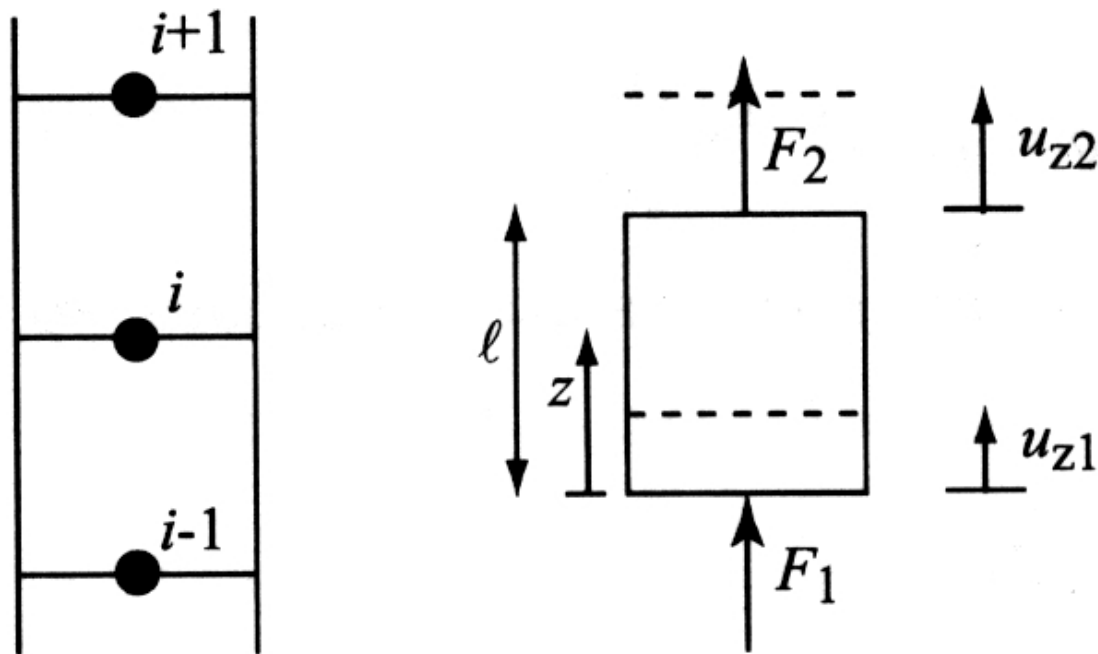
Metoda konečných prvků

V geomechanice nejpoužívanější numerická metoda pro řešení okrajových úloh.

Vyvíjená od padesátých let minulého století, její plné využití bylo možné až s nástupem výpočetní techniky.

Princip metody konečných prvků si v úvodu demonstrováme na její jednorozměrné formulaci s lineárně elastickým konstitučním vztahem.

Jednorozměrný problém si rozdělíme na sérii elementů s délkou l , jež jsou spojeny v uzlech. Posuny uzlů budou značeny u_{z1} a u_{z2} .



V dalším kroku si definujeme tzv. *interpolační funkci*, jež nám bude udávat rozložení posunů v celém jednorozměrném konečném prvku na základě posunu jednotlivých uzlů.

$$u_z = N_1 u_{z1} + N_2 u_{z2}$$

Což můžeme zapsat pomocí tenzorového zápisu (vektor posunutí uzlů označíme $\mathbf{d} = [u_{z1}, u_{z2}]$)

$$u_z = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d}$$

V nejjednodušším případě bude funkce \mathbf{N} předepisovat lineární změnu posunu uvnitř prvku. (z je definováno v rámci lokální soustavy souřadnic pro každý element)

$$N_1 = \frac{l - z}{l} \quad N_2 = \frac{z}{l}$$

Pomocí *interpolační funkce* můžeme vypočítat rozložení *přetvoření* ϵ_z pro jakýkoli bod elementu.

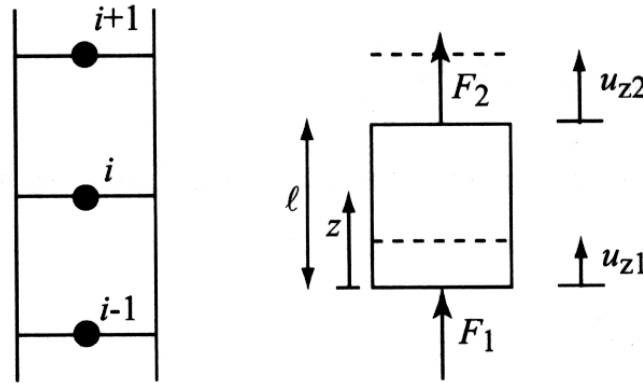
$$\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial N_1}{\partial z} u_{z1} + \frac{\partial N_2}{\partial z} u_{z2} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \cdot \mathbf{d}$$

Pro náš jednorozměrný element evidentně platí

$$\epsilon_z = \frac{u_{z2} - u_{z1}}{l}$$

Přetvoření je tedy pro různé souřadnice z konstantní.

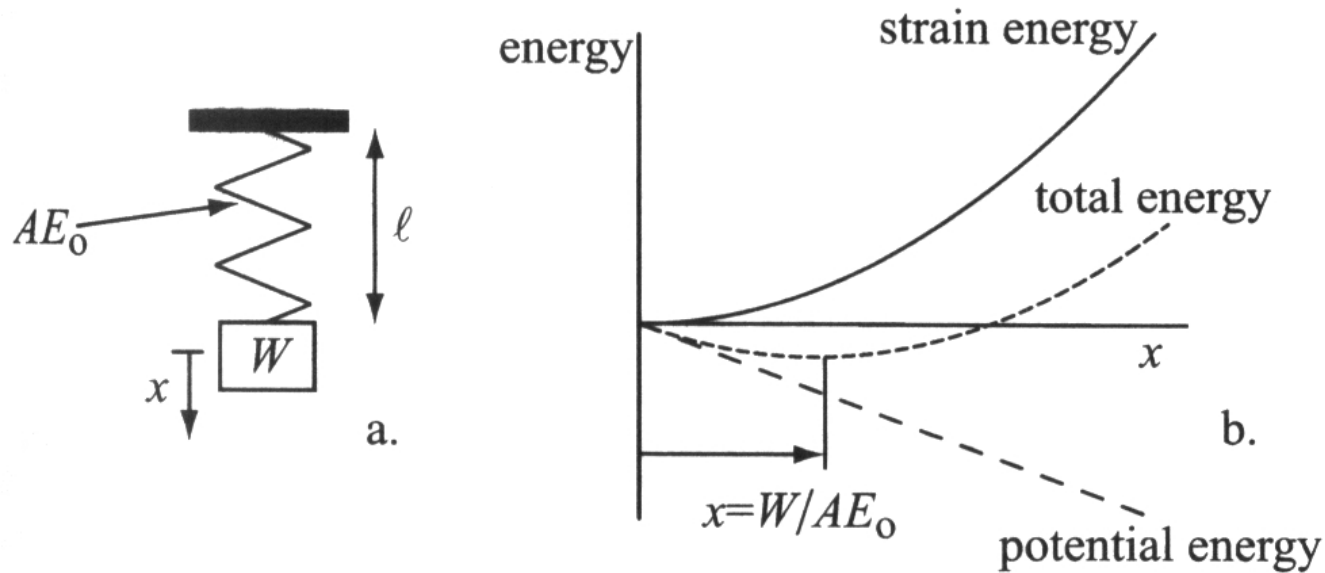
Uzlové posuny budou způsobeny uzlovými silami F_1 a F_2



Pro naše řešení požadujeme aby síly působící v uzlech na jednotlivé elementy byly v rovnováze. Využijeme tzv. *Princip virtuálních prací* jež říká, že:

Těleso je v rovnováze, jestliže pro libovolné přípustné virtuální posuny bodů tělesa je virtuální práce vnitřních sil rovna virtuální práci vnějších sil

Princip lze dobře demonstrovat na případě jediné pružiny:



Práce vnějších sil je dána změnou potenciální energie závaží ($-Wx$)

Práce vnitřních sil je dána silou nutnou k deformaci pružiny
 $(\frac{1}{2l}AE_0x^2)$

Celková energie systému je tedy

$$V = \frac{1}{2l}AE_0x^2 - Wx$$

Práce vnějších sil bude rovna práci vnitřních sil v situaci, kdy je *celková energie systému minimální*, tedy pro $\partial V / \partial x = 0$, což je splněno pro $x = lW / (AE_0)$.

Obecná formulace principu virtuálních prací je následující:

$$\int_V \bar{\boldsymbol{\epsilon}} : \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{f}^B dV + \int_S \bar{\mathbf{U}}^S \cdot \mathbf{f}^S dS + \sum_i \bar{\mathbf{U}}^i \cdot \mathbf{R}_C^i$$

Levá strana rovnice znázorňuje virtuální práci vnitřních sil, pravá strana virtuální práci vnějších sil. $\bar{\mathbf{U}}$ jsou virtuální posuny a $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ odpovídající virtuální přetvoření, \mathbf{f}^B a \mathbf{f}^S jsou objemové síly a povrchová napětí a \mathbf{R}_C^i osamělé síly.

Princip virtuálních prací, společně s interpolační funkcí \mathbf{N} , můžeme využít k sestavení *matice tuhosti* prvku \mathbf{k} , jež vztahuje *uzlové* síly a *uzlové* posuny:

$$\mathbf{F} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{d}$$

Pro náš případ jednorozměrného elementu s konstantním přetvořením má matice tuhosti prvku formu

$$\mathbf{k} = \frac{E_{oed}A}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice tuhosti elementu tedy zohledňuje jak materiálové vlastnosti, tak geometrii prvku.

V obecném případě je matice tuhosti prvku \mathbf{k} vypočtena jako

$$\mathbf{k} = \int_V (\mathbf{B}^T : \mathcal{M} : \mathbf{B}) dV$$

kde tenzor \mathbf{B} získáme derivací vektoru \mathbf{N}

$$\mathbf{B} = \frac{\partial N_i}{\partial x_j}$$

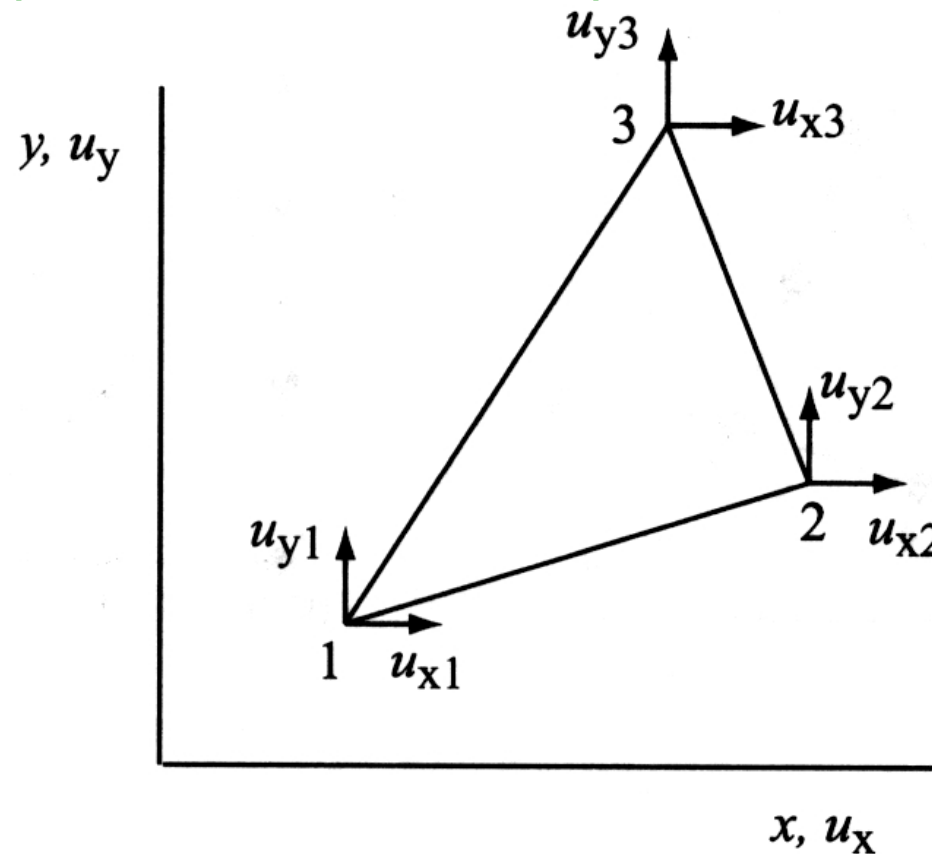
Prvek je v metodě konečných prvků tedy charakterizován:

1. Maticí tuhosti materiálu \mathcal{M}
2. Interpolační funkcí \mathbf{N}

V závislosti na interpolační funkci \mathbf{N} rozdělujeme elementy následovně:

Prvky v 2D MKP

- Trojúhelníkový prvek s konstantním přetvořením



Nejjednodušší prvek v metodě konečných prvků v 2D.

Tvořen třemi uzly, posunutí jakéhokoli bodu uvnitř elementu je dáno lineární interpolační funkcí:

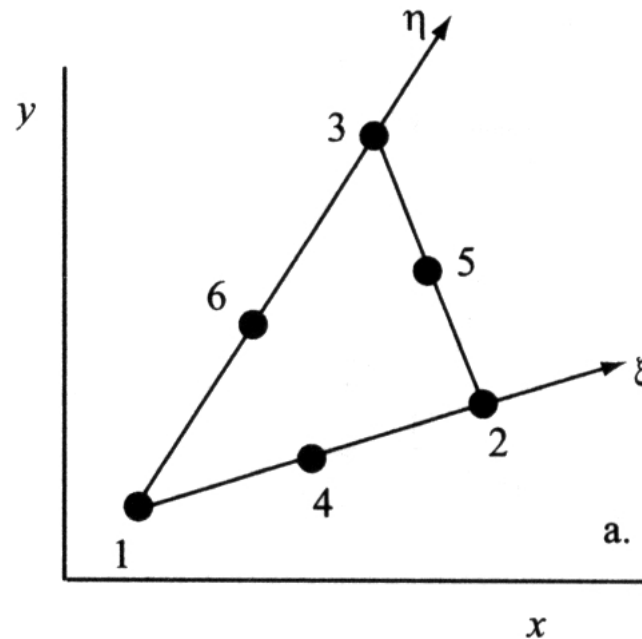
$$u_x = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \quad u_y = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$$

tedy

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \alpha_2; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \alpha_6$$
$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \alpha_5 + \alpha_6$$

Koeficienty $\alpha_1 \dots \alpha_6$ lze vypočítat z uzlových posunů a interpolačních funkcí \mathbf{N} .

- Trojúhelníkový prvek s lineárním přetvořením

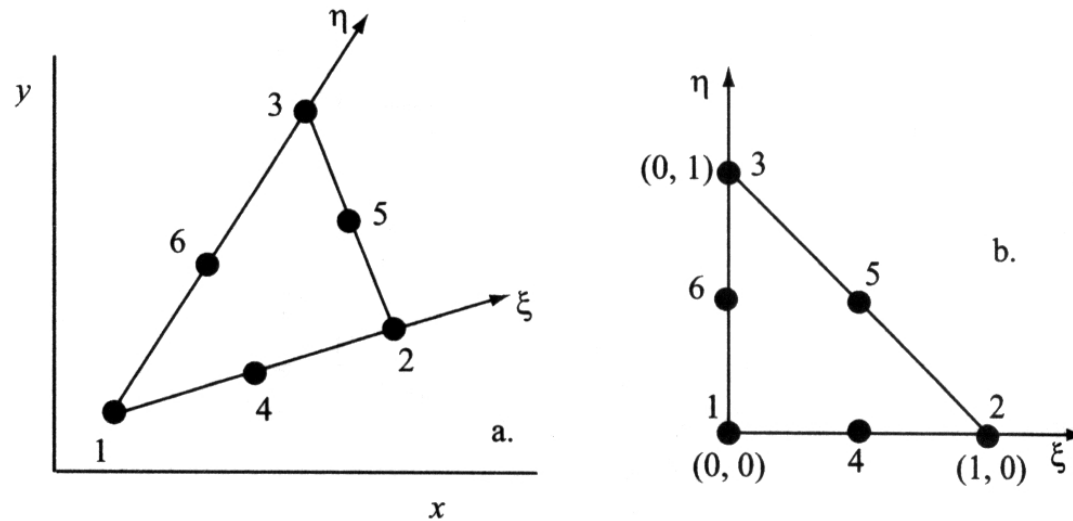


Tvořen šesti uzly, interpolační funkce definují kvadraticky pole posunutí uvnitř elementu, což vede na lineární změnu přetvoření vzhledem k souřadnicím uzlů. Př. pro směr x :

$$u_x = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y$$

Pro vyjádření interpolačních funkcí \mathbf{N} je výhodné zavést *lokální soustavu souřadnic* η, ξ následujícím způsobem:

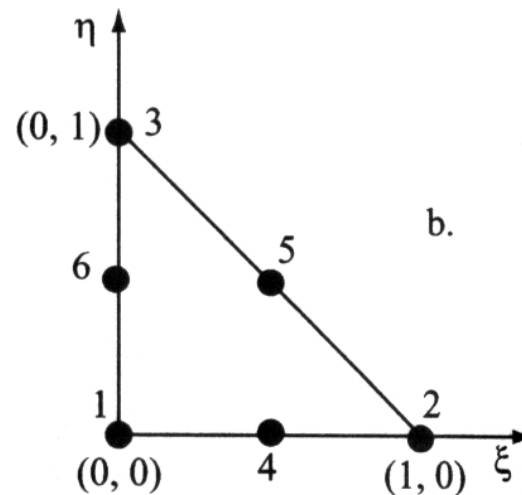


Pokud jsou stejné interpolační funkce \mathbf{N} využity pro souřadnice uzlů v prvku (měřené v lokální soustavě souřadnic) a pro uzlové posuny, hovoříme o tzv. *izoparametrických prvcích*.

$$x = \sum N_i x_i; \quad y = \sum N_i y_i$$

$$u_x = \sum N_i u_{xi}; \quad u_y = \sum N_i u_{yi}$$

Izoparametrický prvek *s konstantním přetvořením* (třemi uzly) by měl tedy následující vyjádření pro interpolační funkce



$$N_1 = 1 - \xi - \eta; \quad N_2 = \xi; \quad N_3 = \eta$$

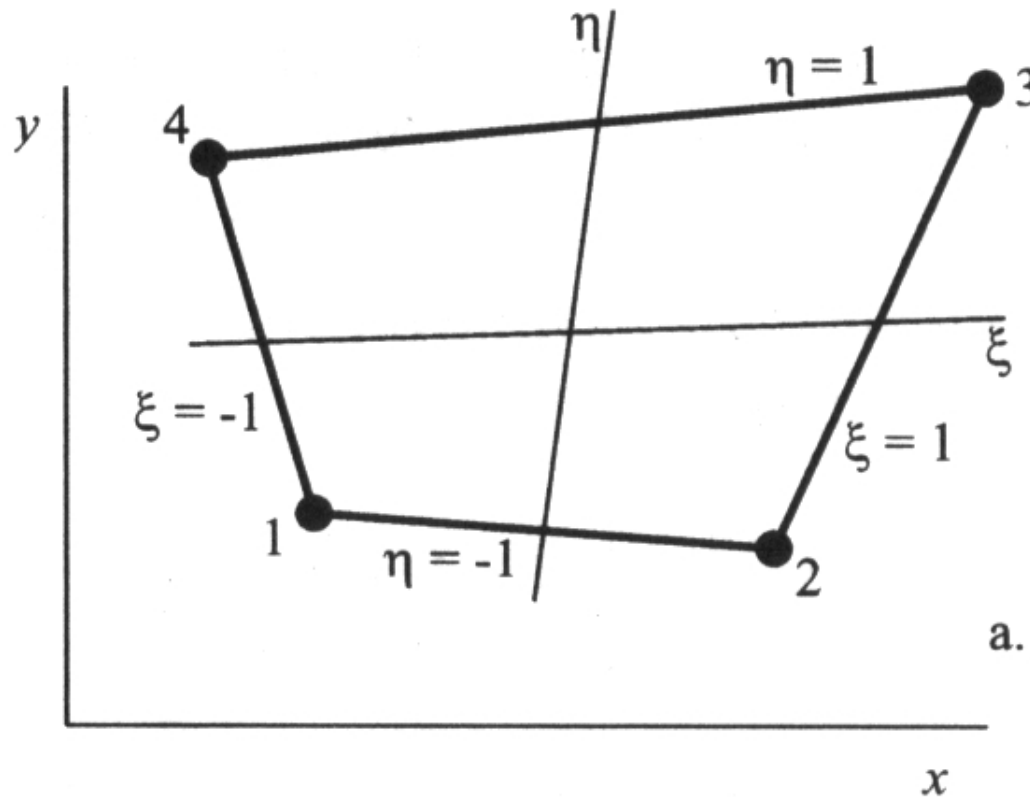
(všimněte si že $N_i = 1$ v uzlu i a $N_i = 0$ v ostatních uzlech. *Musí platit* díky izoparametrické formulaci prvku.).

Obdobným způsobem bychom našli výraz pro interpolační funkce $N_1 \dots N_6$ pro trojúhelníkový prvek s lineárním přetvořením.

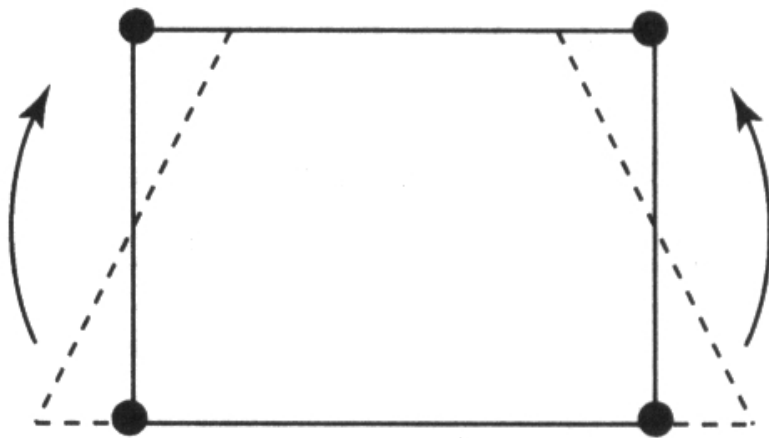
- Čtyřúhelníkový prvek s konstantním přetvořením

Definovaný obdobně jako tříuzlový trojúhelníkový prvek.

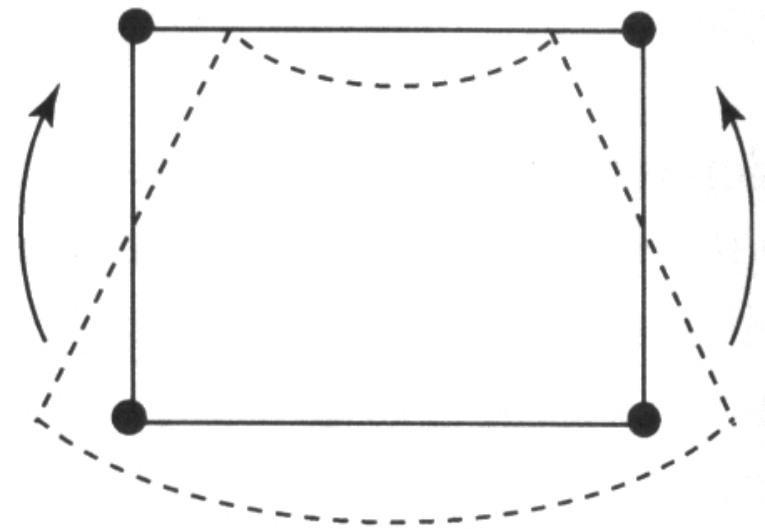
Izoparametrický čtyřúhelníkový prvek s konstantním přetvořením lze zobrazit následovně:



Nevýhoda prvků nízkého řádu tkví v tom, že není možné s dostatečnou přesností vystihnout deformační pole uvnitř elementů. Např. čtyřúhelníkový prvek s konstantním přetvořením, jež je vystaven čistému ohybu, má následující odezvu:



a.

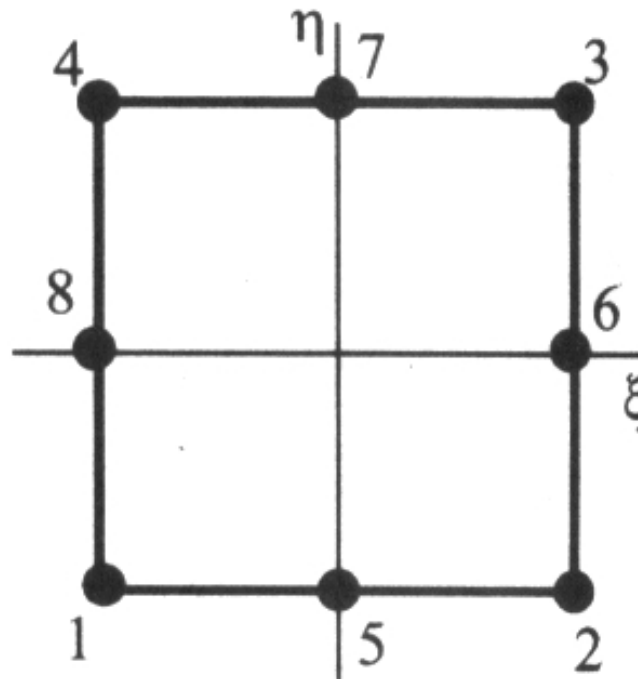


b.

V některých aplikacích mají pak takovéto prvky vyšší tuhost než by odpovídala samotnému materiálu. Proto raději využíváme prvky vyšších řádů, např. →

- Čtyřúhelníkový prvek s lineárním přetvořením

Definovaný obdobně jako šestiuzlový trojúhelníkový prvek. V lokálních izoparametrických souřadnicích jej lze zobrazit následovně:



Z numerického hlediska je většinou výhodnější využívat méně prvků s vyššími interpolačními stupni než více prvků s nižšími.

Sestavení matice tuhosti prvku – Gaussova integrace

Jak již bylo řečeno, matice tuhosti prvku \mathbf{k} je vypočtena podle

$$\mathbf{k} = \int_V (\mathbf{B}^T : \mathcal{M} : \mathbf{B}) dV$$

Tento objemový integrál lze vypočítat přímo pouze pro nejjednodušší prvky, u kterých je matice \mathbf{B} konstantní (prvky s konstantním přetvořením). Potom

$$\mathbf{k} = (\mathbf{B}^T : \mathcal{M} : \mathbf{B}) tA$$

kde A je plocha prvku a t jeho šířka.

V případě složitějších prvků může být analytické sestavení matice tuhosti problém.

Proto se přistupuje k numerické integraci pouze v několika bodech elementu, jejichž pozice vyplývá z geometrie prvku. Mezi nejpoužívanější patří tzv. *Gaussova integrace*.

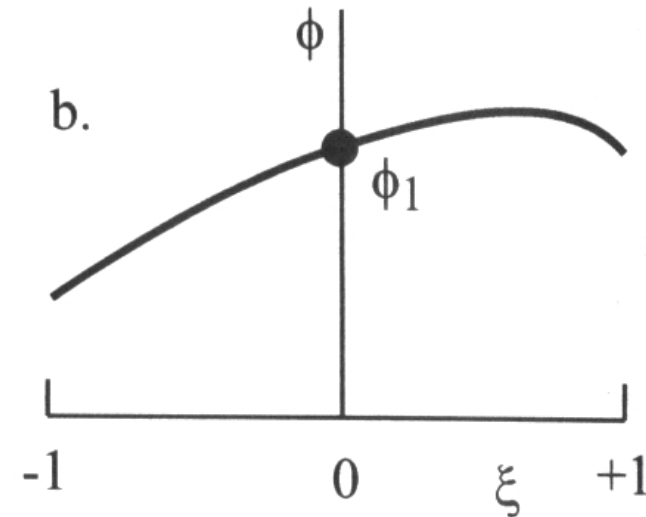
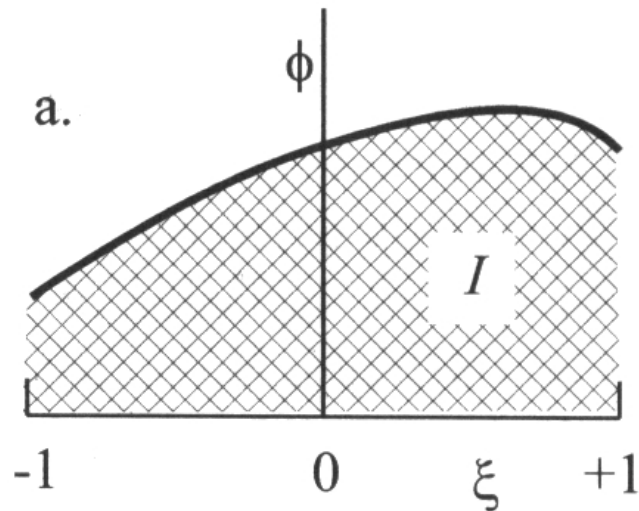
Přesný výpočet integrálu funkce ϕ se nahrazuje váženými hodnotami ϕ_i v *integračních bodech*. Pro jednorozměrný případ:

$$I = \int_{-1}^1 \phi d\xi \approx \sum_1^n w_i \phi_i$$

kde n je počet integračních bodů a w_i je váha i -tého bodu (všimněte si, že opět využíváme lokální soustavu souřadnic).

Pozice a počet integračních bodů vyplývá z řádu interpolační funkce N .

Např. pro jednorozměrných prvek, kde je přesná hodnota integrálu I dána jako na obr. vlevo (\downarrow)

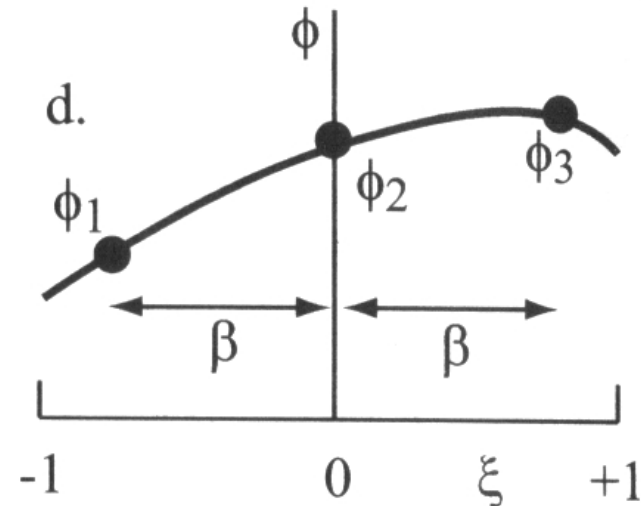
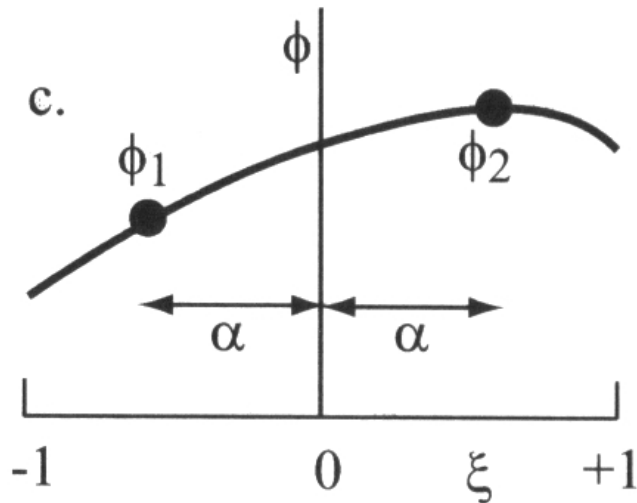


By byla volba jediného integračního bodu v centru prvku (obr. vpravo \uparrow) vhodná pouze pro *konstantní hodnotu* funkce ϕ .

$$I = \int_{-1}^{+1} \phi d\xi \approx 2\phi_1$$

Obdobně jediný Gaussův integrační bod (např. v centru prvku) bude dostatečný pro trojúhelníkové a čtyřúhelníkové prvky s konstantním přetvořením.

V případě vyššího řádu interpolační funkce \mathbf{N} musíme volit vyšší počet integračních bodů.



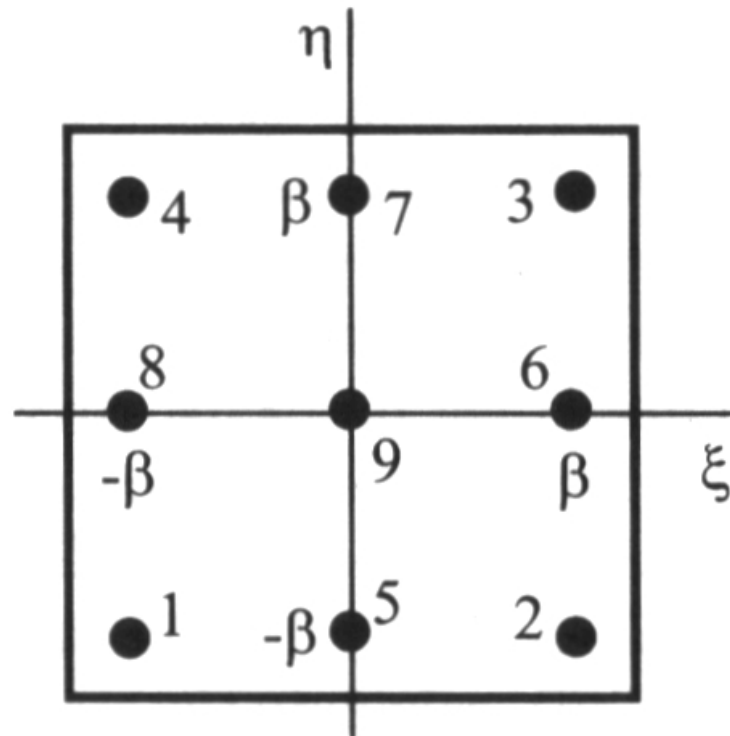
Př. vlevo \uparrow dva integrační body

$$I \approx \phi_1 + \phi_2; \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

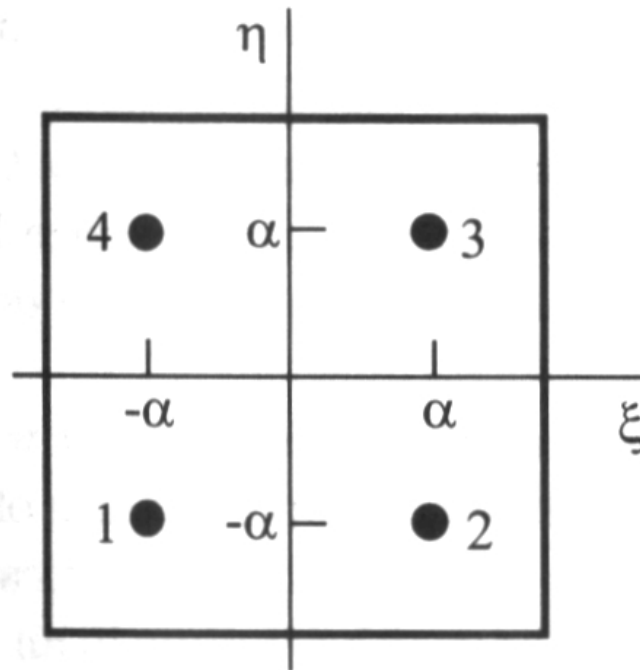
A pro tři integrační body (\leftarrow vpravo)

$$I \approx \frac{5}{9}\phi_1 + \frac{8}{9}\phi_2 + \frac{5}{9}\phi_3; \quad \beta = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

V případě čtyřúhelníkového prvku s osmi uzly (lineární změnou přetvoření) je pro přesný výpočet integrálu I nutných 9 integračních bodů s následující pozicí:



Často se přistupuje k tzv. *redukovánoé integraci*. Při ní je využit menší počet integračních bodů než je pro daný řád funkce \mathbf{N} nutný pro přesnou integraci. Př. pro čtyřúhelníkový prvek s lineární změnou přetvoření \downarrow .



Paradoxně pro některé případy může nepřesnost ve výpočtu matice tuhosti prvku \mathbf{k} vést k zvýšení přesnosti celé MKP analýzy (se zvyšujícím se počtem Gaussových bodů se zvyšuje tuhost prvku vzhledem k tuhosti materiálu jež popisuje).

V Gaussově integračních bodech je nejpřesnější výpočet *přetvoření z uzlových posunů*.

Proto výpočet vnitřních sil, jež probíhá *integrací konstitučního modelu*, je prováděn právě v Gaussových bodech.

Z toho důvodu výstup MKP programů udává *přetvoření a napětí v integračních bodech*, zatímco *posunutí a síly v uzlech*.

Pro vyhodnocení rovnováhy mezi vnějšími a vnitřními silami (viz. dále \rightarrow) je nutno napětí *extrapolovat* z integračních bodů do uzlů. K tomu se využívá polynomiální funkce jež odpovídá počtu integračních bodů (při redukované integraci může mít nižší stupeň než interpolační funkce \mathbf{N} již jsme využívali k sestavení matice tuhosti prvku \mathbf{k}).

Sestavení rovnic MKP

Matice tuhosti všech prvků je možno sjednotit do tzv. *globální matice tuhosti* \mathbf{K} .

$$\mathbf{K} = \sum_m \mathbf{k}^m$$

kde \mathbf{k}^m je matice tuhosti m -tého prvku.

Obdobným způsobem sjednocením uzlových posunů \mathbf{d} a sil \mathbf{F} vzniknou globální vektory posunů \mathbf{U} a zatížení \mathbf{R} .

Rovnice rovnováhy pro celý MKP problém, jež vyplývají z *principu virtuálních prací* (viz. rovnice rovnováhy pro jednotlivé elementy \leftarrow) lze pak zapsat jako

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}$$

Řešení rovnic MKP

Soustavu rovnic

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}$$

Ize řešit přímo pouze pro nejjednodušší úlohy s lineárně elastickým konstitučním vztahem.

U nelineárních problémů (v geotechnických aplikacích prakticky všechny) musíme soustavu řešit iterativním způsobem.

Předpokládáme, že v čase t jsou známy vnitřní uzlové síly \mathbf{F}^t i vnější uzlové síly \mathbf{R}^t a jsou navzájem v rovnováze. Při řešení soustavy rovnic MKP hledáme *uzlové posuny* v čase $(t + \Delta t)$ tak, aby byly vnitřní uzlové síly v rovnováze s vnějšími $\mathbf{R}^{t+\Delta t} = \mathbf{F}^{t+\Delta t}$.

1. Známé vnější zatížení v čase $t + \Delta t$ (dané okrajovými podmínkami) rozdělíme na konečné přírůstky $\Delta \mathbf{R} = \mathbf{R}^{t+\Delta t} - \mathbf{R}^t$.

2. S využitím tečné *globální matice tuhosti* \mathbf{K} vypočteme aproximaci uzlových posunů $\Delta \mathbf{U}$.

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \Delta \mathbf{R}$$

3. Pomocí *interpolačních funkcí* \mathbf{N} vypočteme *přírůstky přetvoření* $\Delta \epsilon$ v *Gaussových integračních bodech* odpovídající přibližným uzlovým posunům $\Delta \mathbf{U}$.

4. Časovou integrací konstitučního vztahu vypočteme *přírůstky napětí* v integračních bodech $\Delta\sigma$.

$$\Delta\sigma = \int_t^{t+\Delta t} h(\sigma, \dot{\epsilon}, \chi) dt$$

5. Výsledné napětí extrapolujeme zpět do uzlů (viz. \leftarrow) čímž získáme přírůstky vnitřních sil $\Delta\mathbf{F}$.

6. Porovnáme vnitřní a vnější uzlové síly v čase $t + \Delta t$. Jejich rozdíl nazýváme *nevyrovnané síly* \mathbf{F}_u .

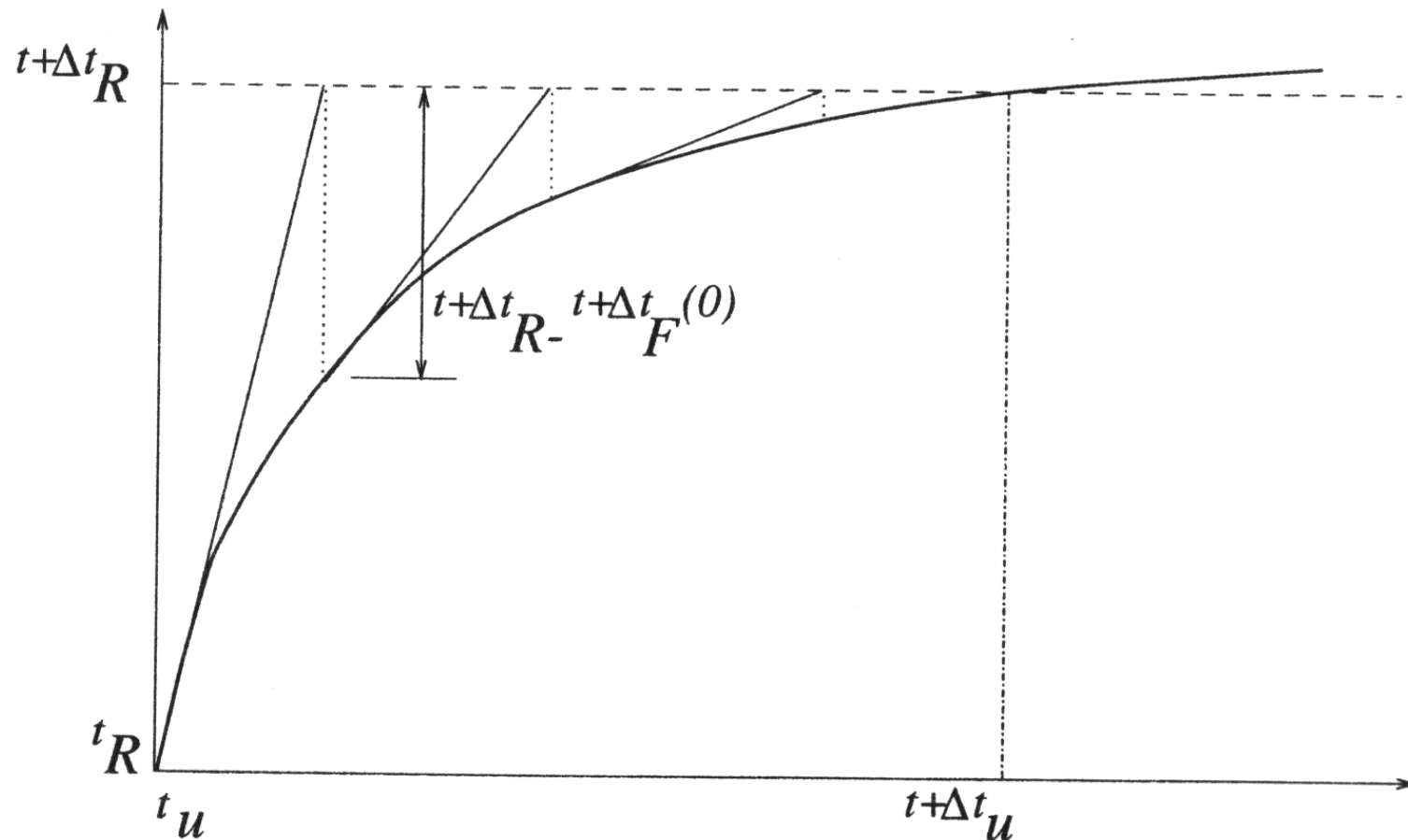
$$\mathbf{F}_u = \mathbf{F}^{t+\Delta t} - \mathbf{R}^{t+\Delta t}$$

V případě, že \mathbf{F}_u jsou menší než předem specifikovaná tolerance, pokračujeme ve výpočtu dalším časovým krokem. Jinak řešíme problém iterativně pomocí jedné z iteračních metod (viz. \rightarrow)

Iterační metody řešení MKP rovnic

- Newton-Raphsonova metoda

Její princip je znázorněn na obrázku:

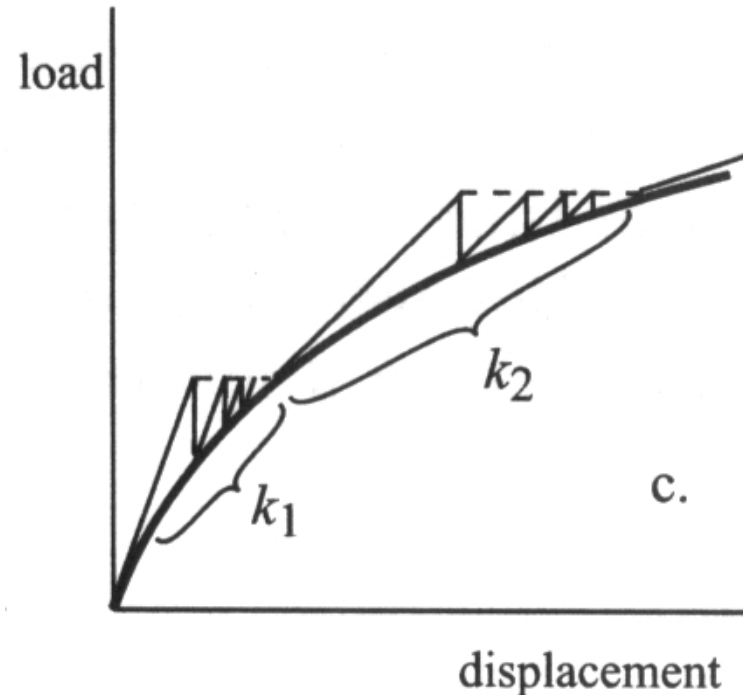


U Newton-Raphsonovy metody dochází k *sestavování* a *inverzi* globální matice tuhosti \mathbf{K} v každé iteraci.

Metoda se vyznačuje rychlou konvergencí, nicméně sestavování a inverze matice tuhosti je časově náročné.

Proto byla vyvinuta alternativní schemata jako \rightarrow

- Modifikovaná Newton-Raphsonova metoda



Matice tuhosti \mathbf{K} se přepočítá v každém výpočtovém kroku, nicméně v průběhu iterací se nemění.

- Metoda s počáteční maticí tuhosti

Matice tuhosti \mathbf{K} se, jak již název napovídá, v průběhu výpočtu nepřepočítává. Ušetří se tedy výpočtový čas na sestavení a inverzi matice, ovšem za cenu vysokého počtu iterací nutného k dosažení rovnováhy.

Různá iterační schémata mohou být výhodná pro různé problémy. Kvalitní MKP program by tedy měl nabízet volbu způsobu iterací.

Přesnost MKP výpočtu

Výsledky MKP výpočtu by měly při zjemňující se diskretizaci (velikost elementů a časových kroků) konvergovat k přesnému analytickému řešení.

Chyby numerického řešení jsou způsobeny zejména následujícími faktory:

- **Diskretizací** (dělení na prvky a časové kroky, omezený stupeň interpolačních funkcí)
- **Numerickou integrací** (Gaussova integrace při výpočtu matic tuhosti)
- **Časovou integrací nelineárních konstitučních vztahů** (viz. řešení rovnic MKP, bod 4.←)
- **Iterativním řešením soustavy rovnic** (Např. Newton-Raphsonova metoda)

Modely diskontinua

Bezpochyby, *modely mechaniky kontinua* patří k nejpoužívanějším matematickým nástrojům v geomechanice.

Pro řešení některých úloh však modely mechaniky kontinua nejsou vhodné, zejména potom tam kde je chování významně ovlivněno *partikulární povahou materiálu* (rozpukaný horninový masiv. . .) a také tam kde dochází k výrazné *lokalizaci deformace* (smyková zóna - při využití MKP dochází k tak velkým deformacím elementů, že je výpočet nepřesný).

Nejznámějším reprezentantem modelů diskontinua je *Metoda oddělených prvků*.

Metoda oddělených prvků

Studovaná oblast je opět rozdělena na prvky (reprezentující zrna či skalní bloky). V tomto případě jsou sice zrna považována za kontinuum (většinou dokonale tuhé), ale *výsledné chování je dáno pravidly interakce mezi jednotlivými prvky.*

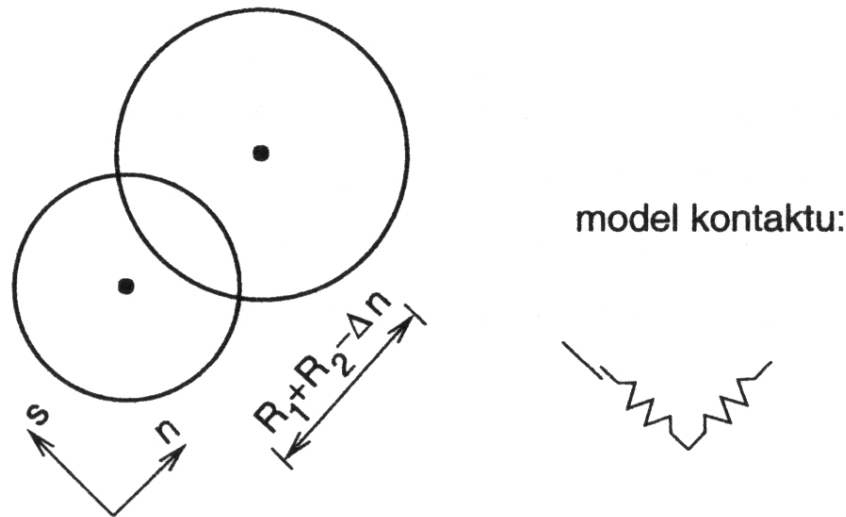
Problém konstitučních vztahů v kontinuu se tedy přenesse na úroveň kontaktů.

Princip metody oddělených prvků

Změna kontaktních normálových sil ΔF_n se vypočte z *fiktivního* překrytí prvků v místě kontaktu jako

$$\Delta F_n = k_n \Delta n$$

k_n představuje normálovou tuhost kontaktu a n velikost překrytí $\Delta n = v_n \Delta t$, kde v_n je rychlost částice.



Kontaktní sílu v tangenciálním směru F_s získáme analogicky, uvažujeme ale navíc možnost plastické deformace na kontaktu.

$$\Delta F_s = k_s \Delta s; \quad F_s \leq F_n \tan \phi + c$$

Výpočet celkového přetvoření má *dynamický charakter*. Je založen na aplikaci 2. Newtonova zákona, z něhož se získá změna rychlosti:

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F \rightarrow \Delta v = \frac{\sum F}{m} \Delta t$$

Při výpočtu je důležitá vhodná volba časového kroku, tak aby se vzruch v průběhu jednoho kroku mohl šířit jen mezi *sousedními prvky*.

Do výpočtu se také musí zavést *tlumení*, jinak by docházelo k nekonečným oscilacím díky setrvačným silám. Výsledé vztahy lze zapsat jako

$$m \frac{dv}{dt} = \sum (F + D) - Cv; \quad \Delta v = \frac{\sum (F + D) - Cv}{m} \Delta t$$

Kde D značí *kontaktní tlumení* ($D = cv$, c je vazkost kontaktu) a C *globální tlumení*.

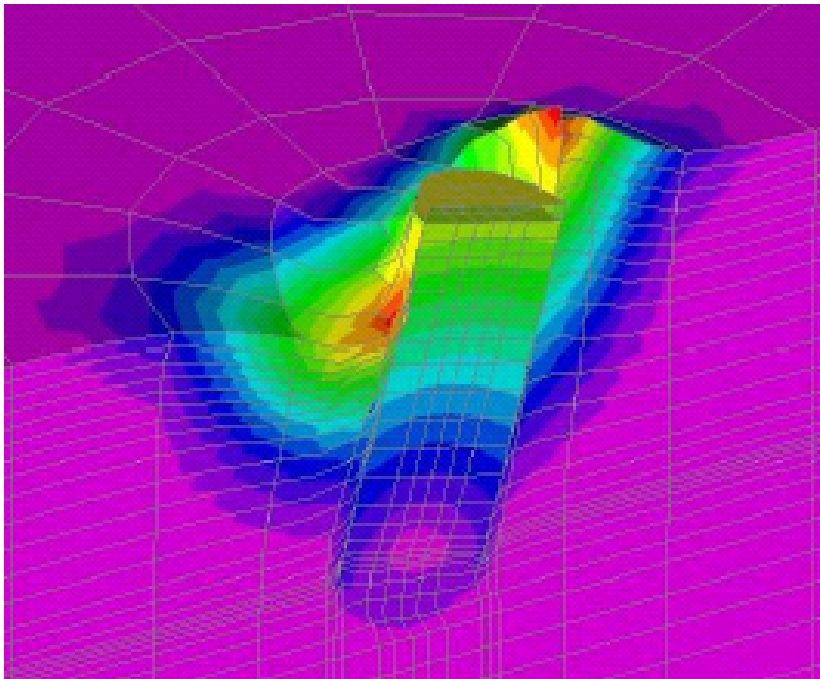
Přestože metoda oddělených prvků představuje významné doplnění možností numerických metod pro kontinuum, její praktické využití je stále limitováno mnohými nevýhodami a nedostatky →

Nevýhody metody oddělených prvků

- **Tvar prvků.** Nejčastěji se používají kruhové (kulové) prvky, neboť prvky nepravidelného tvaru jsou náročné na numerické zpracování.
- **Rozměr úlohy.** Většina výpočtů probíhá ve 2D. Nesimulujeme pak chování kulových zrn, nýbrž válečků!
- **Chování kontaktů a určování parametrů.** Problém konstitučních vztahů v kontinuu se přenesse na úroveň kontaktních vztahů mezi prvky. Parametry pro chování kontaktů jsou pak *velmi obtížně* kalibrovatelné.
- **Výpočetní kapacita.** I přes rychlý rozvoj výpočetní techniky je stále výpočetní kapacita nedostatečná pro řešení skutečných geotechnických úloh.

Závěr k Matematickému modelování v geomechanice I

Dnešní programy pro numerické metody umožňují snadné provádění komplexních geotechnických analýz, což si budeme demonstrovat v druhé části tohoto kurzu.



Přednáška měla ukázat základy teorie numerického modelování v geomechanice. Její znalost je zásadní pro zodpovědné provádění geotechnických výpočtů.