

Kartometrické analýzy starých map.

Kartometrie. Měření vzdáleností, úhlů, ploch. Stanovení měřítkového čísla mapy. Lokální změny měřítka/stočení. Polohová přesnost mapy.

Tomáš Bayer | bayertom@natur.cuni.cz

Katedra aplikované geoinformatiky a kartografie, Přírodovědecká fakulta UK.

Obsah přednášky

1 Kartometrie

2 Přehled kartometrických analýz

- Měření vzdáleností, úhlů, ploch
- Stanovení měřítkového čísla mapy
- Lokální změna měřítka
- Lokální změna stočení
- Polohová přesnost mapy

1. Úvod

Mapa = zmenšený, zevšeobecněný, konvencionální model zemského povrchu.

Mezi obrazem mapy (modelem) a skutečností existují matematické vztahy.

Dány zejména zobrazovacími rovnicemi a měřítkem.

Kartometrie:

Odměřování parametrů mapy/plánu/glóbů (obsahové/konstrukční prvky).

Výsledky ovlivněny řadou faktorů: typ, měřítko mapy, zobrazení, materiál, stáří...

Hodnocení kartografického díla z kartometrického pohledu:

- kartografické parametry,
- matematických parametry,
- geometrické parametry.

Rozvoj díky pokroku v informatice, matematice, statistice.

Vznik složitých modelů (přesnost).

2. Určované/měřené parametry

Týkají se obsahových/konstrukčních prvků/mapy jako celku.

- 1 *Geometrické parametry:*
Vzdálenosti, délky, úhly, souřadnice, plochy, azimuty, směry.
- 2 *Kvalitativní/kvantitativní parametry:*
Hodnoty jevů, vlastnosti (výška, velikost,).
Analýza kartografických znaků v mapách.
- 3 *Kartografické parametry:*
Kartografické zobrazení, zkreslení, zaplněnost.
- 4 *Matematické parametry:*
Měřítko, stočení, rozměry mapového listu.
- 5 *Přesnost mapy:*
Polohová přesnost, deformace.

Výsledné parametry ovlivněny řadou faktorů.

3. Faktory v kartometrii

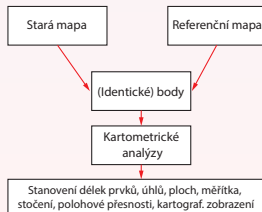
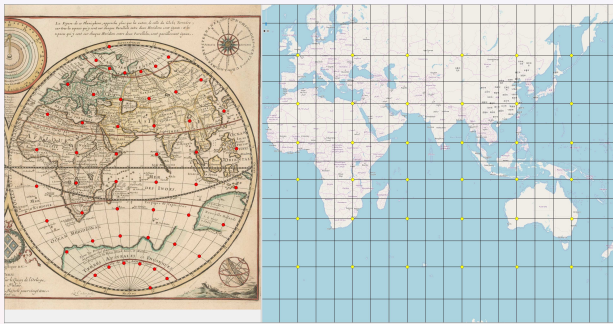
Přehled faktorů ovlivňujících výsledek:

- Přesnost měřických postupů.
- Vliv kartografických postupů (generalizace).
- Typ mapy (topografická vs. tematická).
- Měřítko mapy (přesnost vs. obsah).
- Kartografické zobrazení (délkojevná, úhlojevná, plochojevná, vyrovnávací).
- Počet analyzovaných prvků.
- Rozložení analyzovaných prvků (pravidelné).
- Stáří mapy (absence geometrických základů).
- Srážka mapového listu (staré mapy, papír).
- Vstupní prvky (mapová kresba vs. konstrukční prvky).

Metody používané v kartometrii:

- a) Přímé: přímé měření údajů (délky, úhly, plochy).
- b) Nepřímé: zprostředkující hodnoty (souřadnice).

4. Princip kartometrických analýz



5. Odměřování údajů z mapy

Přípravné kroky:

- Odstranění vlivu srážky (transformace).
- Odstranění vlivu kartografického zobrazení (velká území).
- Stanovení měřítka mapy.

Vliv chyb měřených údajů na hodnotu $y = f(x_1, \dots, x_n)$, **zákon hromadění středních chyb**:

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2.$$

Měření délek prvků:

Odměřování pixelových souřadnic koncových bodů $P_1 = [x_1, y_1]$, $P_2 = [x_2, y_2]$:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Aplikace zákona hromadění středních chyb

$$\frac{\partial d}{\partial x_1} = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \frac{\partial d}{\partial x_2} = \frac{x_1 - x_2}{d}, \quad \frac{\partial d}{\partial y_1} = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \frac{\partial d}{\partial y_2} = \frac{y_1 - y_2}{d}.$$

Pak

$$\begin{aligned} \sigma_d^2 &= \frac{\Delta x^2}{d^2} \sigma_{x_1}^2 + \frac{\Delta x^2}{d^2} \sigma_{x_2}^2 + \frac{\Delta y^2}{d^2} \sigma_{y_1}^2 + \frac{\Delta y^2}{d^2} \sigma_{y_2}^2 \doteq 2 \frac{\Delta x^2}{d^2} \sigma_x^2 + 2 \frac{\Delta y^2}{d^2} \sigma_y^2 \doteq 2 \frac{\sigma_{xy}^2}{d^2} (\Delta x^2 + \Delta y^2), \\ &\doteq 2 \sigma_{xy}^2. \end{aligned}$$

Skutečná vzdálenost v mapě s měřítkovým číslem M

$$D_M = Md.$$

6. Měření směrů, úhlů

Veličiny nezávislé na měřítkovém čísle M mapy.

Úhel mezi přímkami $p(P_1, P_2)$, $q(P_3, P_4)$

$$\omega = |\sigma_p - \sigma_q| = \left| \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \arctan \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} \right|.$$

Pro odměřování používat konformní zobrazení, ekvivalentní extrémně zkreslují úhly.

Aplikace zákona hromadění středních chyb

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial x_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2} = \frac{-\Delta y_{12}}{d_{12}^2}, \quad \frac{\partial \sigma_p}{\partial y_1} = \frac{-1}{x_2 - x_1} \frac{1}{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2} = \frac{-\Delta x_{12}}{d_{12}^2}.$$

Pak

$$\begin{aligned} \sigma_\omega^2 &= 2 \left(\frac{\Delta y_{12}^2}{d_{12}^4} + \frac{\Delta x_{12}^2}{d_{12}^4} \right) \sigma_{xy}^2 + 2 \left(\frac{\Delta y_{34}^2}{d_{34}^4} + \frac{\Delta x_{34}^2}{d_{34}^4} \right) \sigma_{xy}^2 \doteq 2 \left(\frac{1}{d_{12}^2} + \frac{1}{d_{34}^2} \right) \sigma_{xy}^2, \\ &\doteq \frac{4}{d^2} \sigma_{xy}^2. \end{aligned}$$

Chyba v úhlu nepřímo úměrná délce jeho ramene.

7. Měření ploch

Plocha funkcí měřítkového čísla M mapy.

Odstranění vlivu plošné srážky a kartografického zobrazení.

Výpočet plochy oblasti tvořené lomenou čarou (LH vzorec)

$$2P = \left| \sum_{i=1}^n x_i(y_{i+1} - y_{i-1}) \right|,$$

$$= |x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + \dots + x_{n-1}(y_n - y_{n-2}) + x_n(y_1 - y_{n-1})|.$$

Aplikace zákona hromadění středních chyb

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{4} \left[(y_2 - y_n)^2 \sigma_{x_1}^2 + (x_n - x_2)^2 \sigma_{y_1}^2 + \dots + (y_1 - y_{n-1})^2 \sigma_{x_n}^2 + (x_{n-1} - x_1)^2 \sigma_{y_n}^2 \right],$$

$$\doteq \frac{1}{4} \left[d_{2,n}^2 \sigma_{xy_1}^2 + \dots + d_{n-1,1}^2 \sigma_{xy_n}^2 \right] = \frac{1}{4} \sigma_{xy}^2 \sum_{i=1}^n d_{i+1,i-1}^2.$$

Chyba roste s obvodem oblasti.

Skutečná plocha v mapě s měřítkovým číslem M

$$P_M = PM^2.$$

Konformní zobrazení: extrémně zkresluje plochy.

8. Vliv zobrazení na plochu: Švédsko



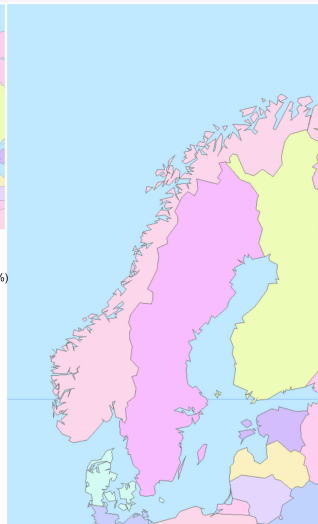
Válcové ekvivalentní

A = 442 246 km²



Válcové ekvidistantní

A = 446 347 km² (+0.93%)



Válcové konformní

A = 2 155 932 km² (+387.5%)

9. Měřítkové číslo mapy

Měřítko mapy: důležitý matematicko-konstrukční prvek.

Vyjádřeno měřítkovým číslem M

$$M = \frac{s}{S},$$

poměr délky s ve skutečnosti k *nezkreslené délce* S v mapě.

Měřítkové číslo lze určit několika různými postupy:

- 1 Z číselného/grafického měřítka (přepočít).
- 2 Měřením mapového rámu.
- 3 Porovnáním délek mezi identickými body v analyzované/referenční mapě.
- 4 Využití transformace (podobnostní, afinní).
- 5 Analýzou kartografického zobrazení.

Pro mapu nutné alespoň *dvojit nezavisle* určení.

10. Formy měřítka

Vyjádření měřítka na mapě:

- *Textová forma*

Nejstarší forma, předchůdce číselného.

Přibližné vs. přesné vyjádření (1 palec čtverečný $\approx$ 1 jitro rakouské).

V mnohých případech nejde přesně převést do číselného.

- *Grafická forma*

Jak dlouhý úsek v mapě odpovídá dekadické vzdálenosti ve skutečnosti.

Z důvodu nejednoznačnosti vyjadřováno k několika délkovým jednotkám.

Např. míle, loket (národně specifické), či přesně nedefinované (stádie).

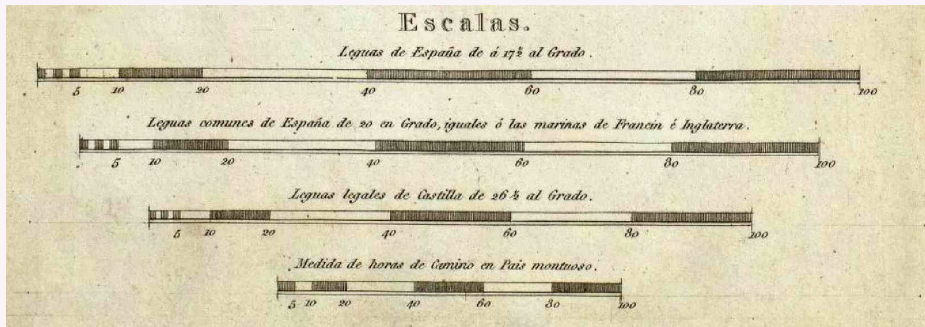
- *Číselná forma*

Používáno od konce 18. století.

Uváděno ve tvaru 1 : M .

U některých map kombinace různých forem měřítka.

11. Ukázka grafického měřítka



12. Měřítkové číslo a zkreslení

Měřítkové číslo M v mapě lokálně proměnlivé.

Závislost na hodnotě *kartografického zkreslení*.
Obecně funkcí polohy a azimutu.

Uváděné měřítko “platí” v nezkraslených oblastech:

- nezkraslená rovnoběžka,
- rovník (ne vždy),
- centrální poledník (ne vždy).

Pro stanovení *lokálního měřítkového čísla* nutná znalost kartografického zobrazení.

Konformní zobrazení: zkreslení pouze funkcí polohy.

Ekvidistantní zobrazení: zkreslení pouze funkcí azimutu.

Ostatní zobrazení: zkreslení funkcí polohy i azimutu.

13. Vztah měřítka mapy a zkreslení

Měřítkové číslo mapy $M(\varphi, \lambda)$ funkcí polohy.

Poměr diferenciálních elementů délky ve skutečnosti ds (na sféře) a na mapě $dS(\varphi, \lambda)$.

Hodnota $dS(\varphi, \lambda)$ funkcí polohy.

$$M(\varphi, \lambda) = \frac{ds}{dS(\varphi, \lambda)}.$$

Mapa zmenšeným obrazem.

Použité kartografické zobrazení má proporčně zmenšený poloměr sféry

$$R' = \frac{R}{M}.$$

Měřítko kartografické $m(\varphi, \lambda)$ (poměr diferenciální délky v mapě a na "zmenšené" sféře $R' \ll R$)

$$m(\varphi, \lambda) = \frac{dS(\varphi, \lambda)}{ds/M} \Rightarrow dS(\varphi, \lambda) = \frac{m(\varphi, \lambda)}{M} ds.$$

Měřítkové číslo mapy

$$M(\varphi, \lambda) = \frac{Mds}{m(\varphi, \lambda)ds} = \frac{M}{m(\varphi, \lambda)}.$$

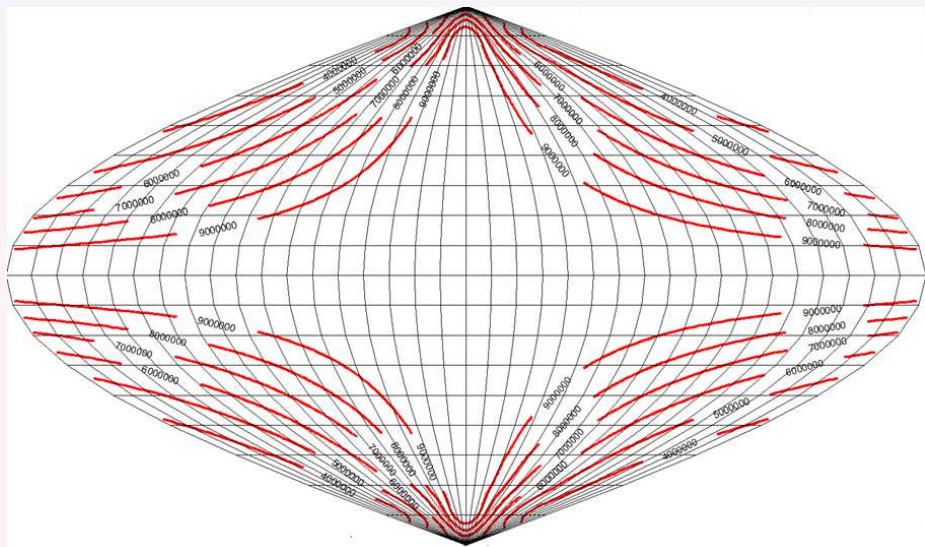
Proměnlivá veličina, může se měnit o desítky/stovky procent.

Díky zkreslení se směrem okrajů délky zkreslují (zvětšují, $m > 1$).

Pozor při odměřování vzdáleností z map !!!

14. Měřitkové číslo jako funkce polohy

Sansonovo zobrazení: $M = 100\,000\,000$, okraje $M(\varphi, \lambda) = 40\,000\,000$.



15. Určení M ze slovního měřítka

Přepočet nemetrických měr do SI soustavy.

Nevýhodou nejednotnost definice: stádie, míle, loket.

Hodnoty se mohou výrazně lišit.

Nutno znát vzájemné poměry a převodní vztahy mezi jednotkami.

1 Wiener Zoll gleich 2000 Wiener Klafter, oder 1 : 144000 der natürlichen Größe bekannt.

1 Wiener Klafter (sáh, 1.896 m) = 72 Wiener Zollen (palec, 2.63 cm)

1 Wiener Zoll $\equiv$ 2000 Wiener Klafter (na mapě).

$$M = \frac{2000 \cdot 72}{1} = 144000.$$

Analogicky byla odvozena i měřítka 1:28800/1:2880:

1 Wiener Klafter (sáh, 1.896 m) = 72 Wiener Zollen (palec, 2.63 cm)

1 Postmeile (poštovní míle, 7578.5 m) = 4000 Wiener Klafter.

1 Wiener Zoll $\equiv$ 1 Postmeile

$$M = 4000 \cdot 72 = 288000.$$

1 Wiener Zoll $\equiv$ 40 Wiener Klafter

$$M = 40 \cdot 72 = 2880.$$

Alternativně 1 Quadratzoll $\equiv$ 1 niederösterreichisches Joch (40 x 40 Quadratklafter).

16. Určení M z grafického měřítka

Přepočet délky grafického měřítka do metrického systému.

Mapa může obsahovat více grafických měřítek.

V takovém případě výsledkem průměrná hodnota.

Lieues Marines de 20 au degré (20 na 1°).

Lieues Communes de 25 au degré (25 na 1°).

Milles de 15 au degré (15 na 1°).

Milles de 60 degré (60 na 1°).

Lieues Marines: (1/20 stupně) 5556 m.

Lieues Communes: 2282 fr. sáhů = 4444 m.

Mille: 1000 sáhů = 1949.04 m.

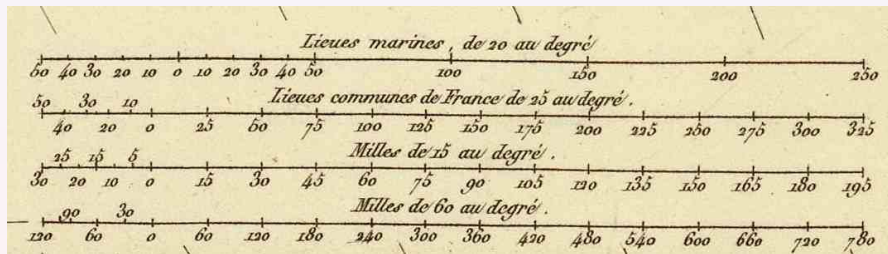
Velikost pixelu $\varphi = 0.127$ mm.

$$M_1 = s_1 / S_1 = (250 \cdot 5556) / 0.291 = 4773196.$$

$$M_2 = s_2 / S_2 = (325 \cdot 4444) / 0.304 = 4750987.$$

$$M_3 = s_3 / S_3 = (780 \cdot 1949) / 0.307 = 4951856. \text{ (Jaká míle??)}$$

17. Ukázka grafického měřítka



18. Určení M interpolací na mapovém rámu

Použití u topografických map velkých/středních měřítek.

Na mapovém rámu rysy zeměpisné či souřadnicové sítě.

Proměřeny vzdálenosti s_φ , s_λ mezi všemi ryskami v obou směrech.

Odpovídající vzdálenosti na sféře (ve směru poledníků/rovnoběžek):

$$S_\varphi = r\Delta\lambda, \quad S_\lambda = R\Delta\varphi, \quad r = R \cos \varphi.$$

Měřítkové číslo ve 2 směrech

$$M_\varphi = \frac{S_\varphi}{s_\varphi}, \quad M_\lambda = \frac{S_\lambda}{s_\lambda}.$$

Měřítkové číslo mapy – geometrický průměr

$$M = \sqrt{M_\varphi M_\lambda}.$$

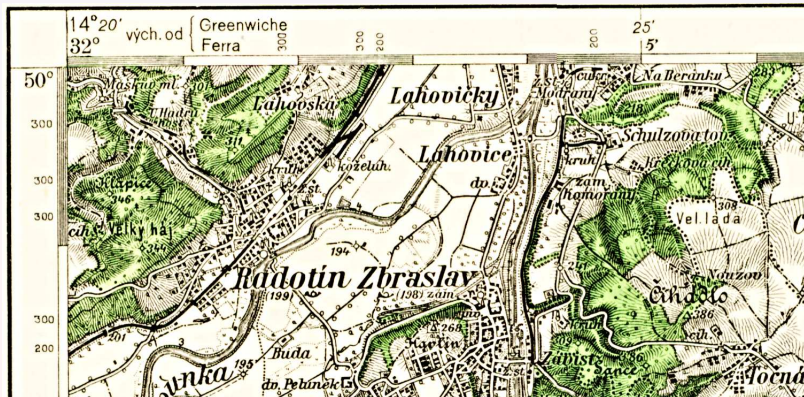
Obdobně lze pracovat např. s křížky hektometrické sítě.

Jsou-li vyneseny souřadnice, lze odečítat souřadnicové rozdíly.

Pak $D_\varphi \approx \Delta y$ a $D_\lambda \approx \Delta x$ (dle orientace souř. systému).

19. 3. vojenské mapování (1:25 000)

SZ roh.



20. 3. vojenské mapování (1:25 000)

SV roh.



21. Určení M z prvků mapové kresby

Mapová kresba méně přesná než matematicko-konstrukční prvky.

Absence geometrického základu (u starých map do 18. stol).

Čím starší mapa, tím nižší spolehlivost odhadu měřítka.

Kresba ovlivněna generalizací.

Větší počet zprostředkujících prvků $\Rightarrow$ vyrovnání MNČ.

Volba prvků mapové kresby:

- Použity dobře identifikovatelné body (stará/současná mapa).
- Rovnoměrné rozmístění po celé ploše mapy.
- Poloha bodů se v čase příliš nemění.

Příklady: hrady, kostely, kláštery, náměstí, historická centra, soutoky řek.

Měřítka lokálně proměnné díky chybám v zákresu prvků.

Lze následně analyzovat a vizualizovat (izočáry).

Výsledek závislý na počtu a rozložení identických bodů a jejich přesnosti.

22. Ukázka umístění identických bodů



23. Metody určení M z mapové kresby

Dvě základní metody určení M :

- Měření vzdálenosti mezi n dvojicemi bodů.
- Určení měřítka s využitím transformace.

Určení M měřením vzdálenosti mezi n dvojicemi bodů

V analyzované/referenční mapě vybráno n vhodných délek mezi identickými body

Identické body voleny v různých částech mapy, vzdálenosti mezi nimi dostatečně velké.

Měřítkové číslo M_i (pro každou délku) mezi 2 identickými body

$$M_i = \frac{S_i}{S'_i},$$

poměrem poměrem skutečné délky S_i a délky v analyzované mapě s_i .

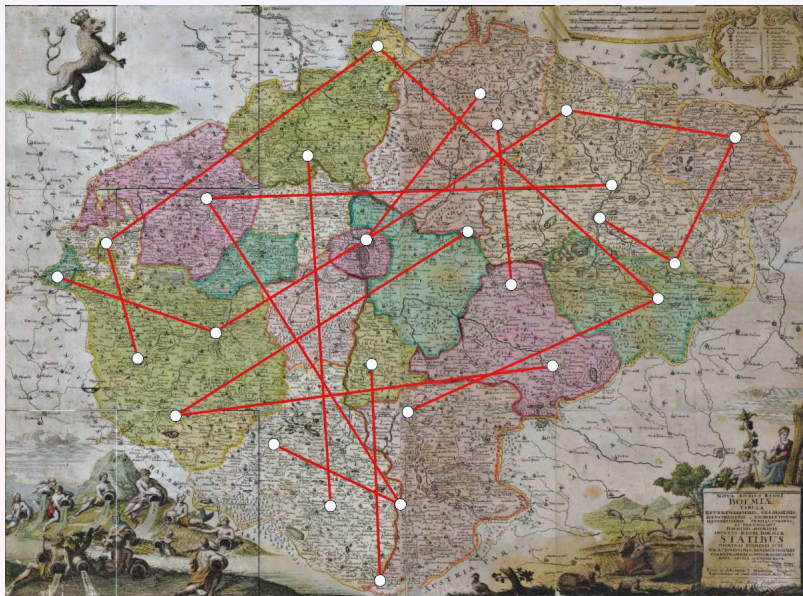
Porovnání analyzované a referenční mapy s měřítkovým číslem M_r

$$M_i = \frac{s'_i M_r}{S_i}.$$

Výsledkem střední hodnota

$$M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i.$$

24. Určení M měřením mezi n dvojicemi



25. Určení M transformací

Nejpoužívanější metoda určení M .

Měřítkové číslo M jedním z parametrů transformace mezi analyzovanou/referenční mapou.
Zohlednění rotace, srážky mapového listu.

V rámci transformace provedeno vyrovnaní $\Rightarrow$ spolehlivější výsledek..

Nejčastěji používané transformace:

- Podobnostní transformace (s nadbyt. počtem bodů, Helmertova).
- Afinní transformace, M geometrickým průměrem

$$M = \sqrt{M_x M_y}.$$

- Polynomické transformace vyšších řádů.

Polynomické transformace vyšších řádů zpravidla nepoužíváme.

Dochází k deformacím mapové kresby (zkroucení).

Globální systém $[0, X, Y]$ referenční mapa.

Lokální systém $[0, x, y]$ analyzovaná mapa.

26. Určení M s využitím podobnostní transformace

1x rotace Ω , 2x posun Δ , 1x měřítko q . Konformní. Neopravuje srážku.

$$\begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix}.$$

Podobnostní transformace pro nadbytečný počet bodů (Helmertova), $v^T v = \min$

$$v = A\lambda - I, \quad A_k = \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & -y_n & 1 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & x_n & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}.$$

Řešení

$$\lambda = (A^T A)^{-1} A^T I, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix}.$$

Měřítko a stočení

$$M = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \quad \Omega = \arctan \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

27. Určení M s využitím afinní transformace

2x rotace Ω_x, Ω_y , 2x posun Δ , 2x měřítko q_x, q_y . Eliminuje srážku.

$$\begin{bmatrix} \hat{Y} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x \cos \Omega_x & -q_y \sin \Omega_y \\ q_x \sin \Omega_x & q_y \cos \Omega_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}.$$

Afinní transformace pro nadbytečný počet bodů, $v^T v = \min$

$$v = A\lambda - I, \quad A_k = \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & -y_n & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & y_1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & x_n & y_n & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}.$$

Řešení

$$\lambda = (A^T A)^{-1} A^T I, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}.$$

Měřítka a stočení

$$M_x = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \quad M_y = \sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}, \quad \Omega_x = \arctan \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \Omega_y = \arctan \frac{\lambda_4}{\lambda_3}.$$

28. Identické body, analyzovaná mapa

Voleny v místech, která se v čase málo mění.

Historická centra měst, náměstí, hrady, zámky, kláštery, kostely, soutoky řek.

Detailní kartometrická analýza: přibližně 100 bodů.

Rovnoměrné rozmístění nad celým mapovým polem.



29. Opravy na identických bodech

Ilustrují polohovou přesnost bodů.

Důležitá jejich velikost a distribuce (náhodná nebo nějaké systematickosti?).

Hrubé chyby v identických bodech

$$v_i = \|\hat{Q}_i - Q_i\|_2 > 3\sigma_0.$$

V praxi nutné použití robustní statistiky: M -odhady.



30. Lokální změna měřítka

Měřítkové číslo M se nad analyzovanou mapou mění: $M(\varphi, \lambda)$.

Faktory změny měřítka:

- *Vliv kartografického zobrazení*
Délkové zkreslení, lze exaktně vyjádřit jako funkci φ, λ .
Umíme matematicky odstranit, pro každé zobrazení specifické.
- *Chyby v mapové kresbě*
Mají náhodný/systematický charakter, občas hrubé chyby.
Absence geometrických a polohových základů.
Spíše lokální charakter.
- *Kartografické faktory*
Generalizace (kresba přes míru, odsuny).
Náhodný charakter.
- *Srážka papíru*
Lineární průběh.
Lze matematicky odstranit: eliminace srážky, afinní transformace.
Změny M lze vizualizovat, např. formou izochar.

Mohou být značně velké, desítky až stovky %.

Pozor na odměřování vzdáleností v těchto místech z mapy.

31. Princip analýzy změny měřítka (1/2)

Analýzovaná/referenční mapa, identické body: $P = \{p_i\}_{i=1}^n$, $Q = \{q_i\}_{i=1}^n$.

Mezi kterými body měřit vzdálenosti?

Analýza lokálních vlastností mapy, použití blízkých bodů.

Pro každý identický bod p_i hledáme nejbližší bod $\langle k, \underline{p}_k \rangle$ a jeho index k

$$\underline{p}_k = \arg \min_{\forall p_j \in P} \|p_i - p_j\|_2, \quad p_j \neq p_i,$$

Lokální hodnota měřítkového čísla mezi p_i a nejbližším sousedem p_k

$$M(x_{i,k}, y_{i,k}) = \frac{\|q_i - q_k\|_2}{\|p_i - \underline{p}_k\|_2},$$

vztažena ke střednímu bodu $p_{i,k} = 0.5(p_i + p_k)$

$$x_{i,k} = \frac{1}{2} (x_i + x_k), \quad y_{i,k} = \frac{1}{2} (y_i + y_k).$$

Alternativně **transformace na 2 identické body**: $p_i, \underline{p}_k$ a odpovídající $q_i, q_k \Rightarrow M \equiv M(x_{i,k}, y_{i,k})$.

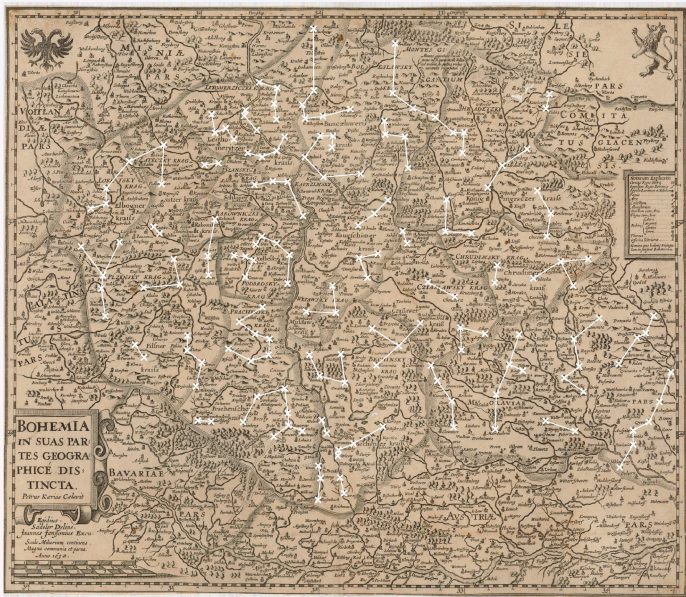
Interpolace izočar nad množinou

$$\{x_{i,k}, y_{i,k}, M(x_{i,k}, y_{i,k})\},$$

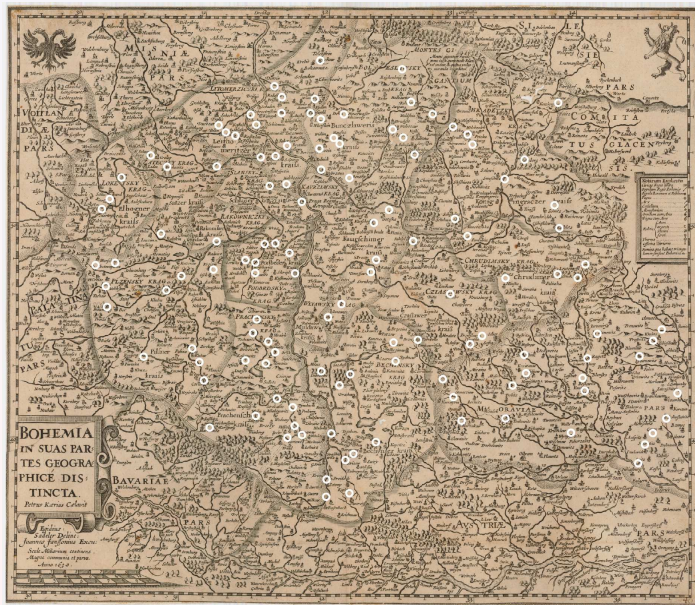
alternativně odchylky od určeného měřítkového čísla

$$\{x_{i,k}, y_{i,k}, \Delta M\}, \quad \Delta M = M - M(x_{i,k}, y_{i,k}).$$

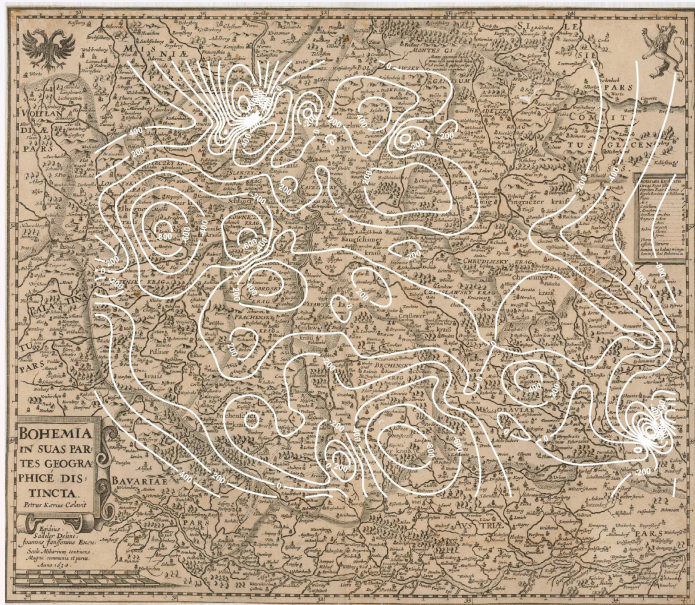
33. Identické body a jejich NN



34. Metoda NN, body M_i



35. Metoda NN, izočáry ΔM



36. Lokální změna stočení

Stočení Ω se nad analyzovanou mapou mění: $\Omega(\varphi, \lambda)$.

Podobné faktory jako u změny měřítka.

Nejvýraznější roli hrají chyby v mapové kresbě, typické pro staré mapy.

Blízké body vybírány metodou NN, MST, DT, ...

Lokální změna hodnota stočení

$$\Omega(x_{i,k}, y_{i,k}) = \sigma'_i - \sigma_i, \quad \tan \sigma'_i = \frac{Y_k - Y_i}{X_k - X_i}, \quad \tan \sigma_i = \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i},$$

vztažena ke střednímu bodu $p_{i,k} = 0.5(p_i + p_k)$

$$x_{i,k} = \frac{1}{2}(x_i + x_k), \quad y_{i,k} = \frac{1}{2}(y_i + y_k).$$

Alternativně **transformace na 2 identické body**: $p_i, \underline{p}_k$ a odpovídající $q_i, q_k \Rightarrow \Omega \equiv \Omega(x_{i,k}, y_{i,k})$.

Interpolace izochar nad množinou

$$\{x_{i,k}, y_{i,k}, \Omega(x_{i,k}, y_{i,k})\}.$$

Největší hodnoty Ω v místech s lokální změnou M .

Ω může nabývat značných hodnot, až desítky $^\circ$.

Pozor při odměřování úhlů z map.

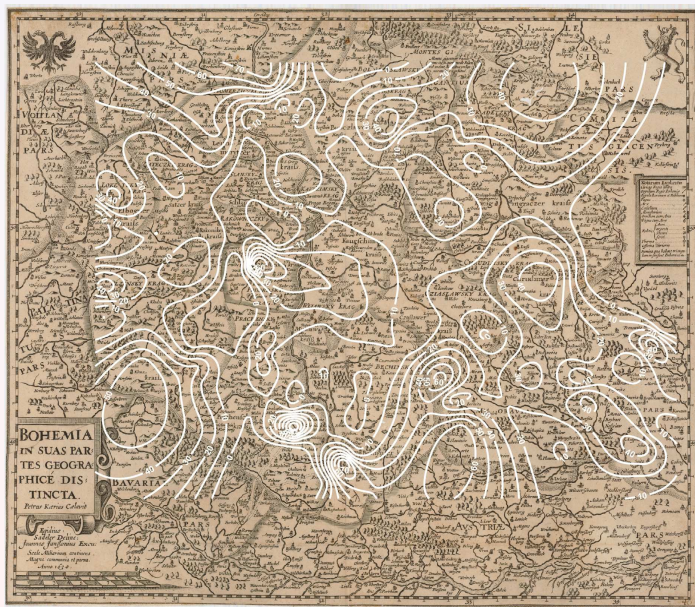
37. Princip analýzy

Ω měřen mezi spojnicemi odpovídajících identických bodů.

Opět vybírány blízké body.



38. Lokální změna stočení, izočáry Ω



39. Polohová přesnost mapy

Dána velikostí/orientací vektorů oprav $v_i = \hat{Q}_i - Q_i$ na identických bodech.

$$\|v_i\|_2 = \|\hat{Q}_i - Q_i\|_2 = \sqrt{(\hat{X}_i - X_i)^2 + (\hat{Y}_i - Y_i)^2}.$$

Chyby v mapové kresbě mají náhodný/systematický charakter.

Chybně zadaný identický bod

$$\|v_i\|_2 > 3\sigma_0.$$

MNČ není robustní, jedna hrubá chyba může ovlivnit výsledek: M - odhady.

Střední polohová chyba (RMSE), charakterizuje geometrickou přesnost mapy jako celku

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{X}_i - X_i)^2}{n}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y_i)^2}{n}}, \quad \sigma_{xy} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$

Jednotková střední chyba, charakterizuje přesnost 1 měření

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{X}_i - X_i)^2 + (\hat{Y}_i - Y_i)^2}{2n - k}},$$

kde:

k je počet určovaných parametrů (podobnostní $k = 4$, afinní $k = 6$).

$\hat{X}_i, \hat{Y}_i$ transformované (vyrovnané) souřadnice,

X_i, Y_i souřadnice v globálním systému (referenční mapě).

40. Polohová přesnost starých map

Výrazně se mění v čase.

Klíčovým faktorem geometrické a polohové základy při konstrukci map.

Důležitou roli hraje i měřítko mapy.

Staré mapy bez geometrického základu:

Hodnoty σ_{xy} v řádech km/desítek km.

Kaeriova mapa: $\sigma_{xy} = 8.4$ km, Vogtova mapa: $\sigma_{xy} = 5.8$ km.

Historická topografická mapování:

O 2-3 řády přesnější (polohové a geometrické základy).

I. vojenské mapování: σ_{xy} v řádech desítek m.

II. vojenské mapování: $\sigma_{xy} = 8.8$ m.

III. vojenské mapování: $\sigma_{xy} = 12.1$ m (zhoršení oproti II.).

Současné státní mapové dílo:

Vysoká polohová přesnost, o další 3 řády přesnější.

Hodnoty σ_{xy} řádech cm, dle měřítka.