

Matematické metody v kartografii

2. Přednáška

Referenční elipsoid a základní vztahy.

Poloměry křivosti.

Délky poledníkového a rovnoběžkového
oblouku.

1. Základní vztahy na rotačním elipsoidu

Rotační elipsoid dán následujícími parametry:

- hlavní poloosa a
- vedlejší poloosa b

Základní parametry elipsoidu:

- Zploštění elipsoidu i :
- První excentricita elipsoidu e
- Druhá excentricita elipsoidu e'
- První geodetická funkce W
- Druhá geodetická funkce V

$$i = \frac{a - b}{a}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$$

2. Opakování: limita funkce

Necht' funkce f je definována na okolí $x_0 \in D_f$. Pokud existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

pak se nazývá derivací funkce f v bodě x_0 a značí se

$$f'(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, \frac{df}{dx}(x_0), \text{ nebo } \frac{dy}{dx}(x_0).$$

Necht' f je spojitá v bodě $x_0 \in D_f$ a necht' má v bodě x_0 derivaci. Pak směrnice k tečny $T = (x_0, f(x_0))$ je definována

$$k = f'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) = \operatorname{tg}(\varphi).$$

3. Opakování: funkce definovaná implicitně

Nechť funkce f je funkcí dvou proměnných na množině $\Omega \in \mathbb{R}^2$ a necht' $(a, b) \in \Omega$ je takový bod, že

$$f(a, b) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$$

potom existují okolí $O(a)$, $O(b)$ bodů $a, b \in \mathbb{R}$ a právě jedna funkce proměnné $g: O(a) \rightarrow O(b)$ taková, že

$$\forall x \in O(a): f(x, g(x)) = 0.$$

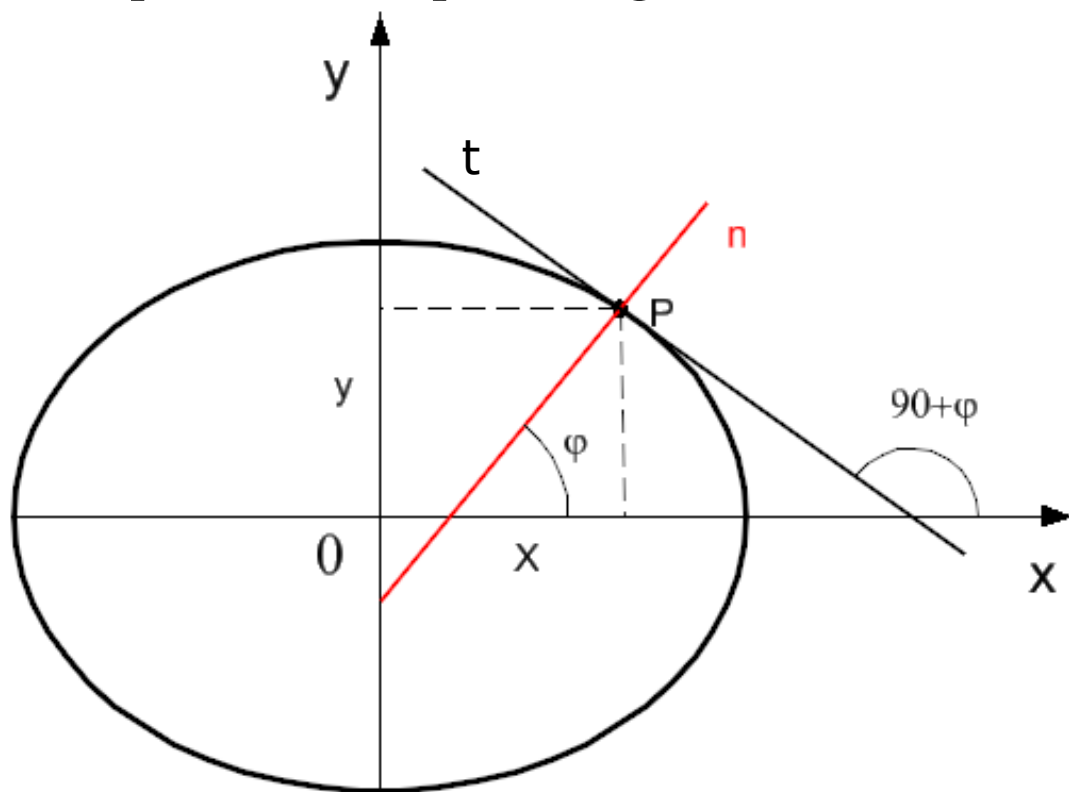
Derivace funkce def. implicitně: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))g'(x) = 0,$

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}.$$

4. Pravoúhlé souřadnice bodu v rovině meridiánové elipsy (1/2)

Hledáme vztah pravoúhlých souřadnice (x,y) v rovině meridiánové elipsy a zeměpisných zeměpisnými souřadnicemi (φ, λ) .

Použití při odvození prostor. geoc, souřadnic $[X,Y,Z]$, poloměrů M,N .



$$P = [\varphi, \lambda] \equiv [x, y],$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2.$$

5. Pravoúhlé souřadnice bodu v rovině meridiánové elipsy (2/2)

Výpočet směrnice tečny funkce dané implicitně:

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y},$$

$$k = \frac{dy}{dx} = 90^\circ + \phi = -\cotg(\phi),$$

$$-\frac{b^2 x}{a^2 y} = \cotg \phi,$$

Po dosazení $\cotg \phi = \cos \phi / \sin \phi$,

získáme.

$$b^4 x^2 \sin^2 \phi - a^4 y^2 \cos^2 \phi = 0$$

$$x^2 b^2 + y^2 a^2 - a^2 b^2 = 0$$

Pak

$$x = \frac{a \cos \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} = \frac{a \cos \phi}{W}$$
$$y = \frac{a(1 - e^2) \sin \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} = \frac{a(1 - e^2) \sin \phi}{W}$$

6. Vztah mezi zeměpisnou a geocentrickou šířkou

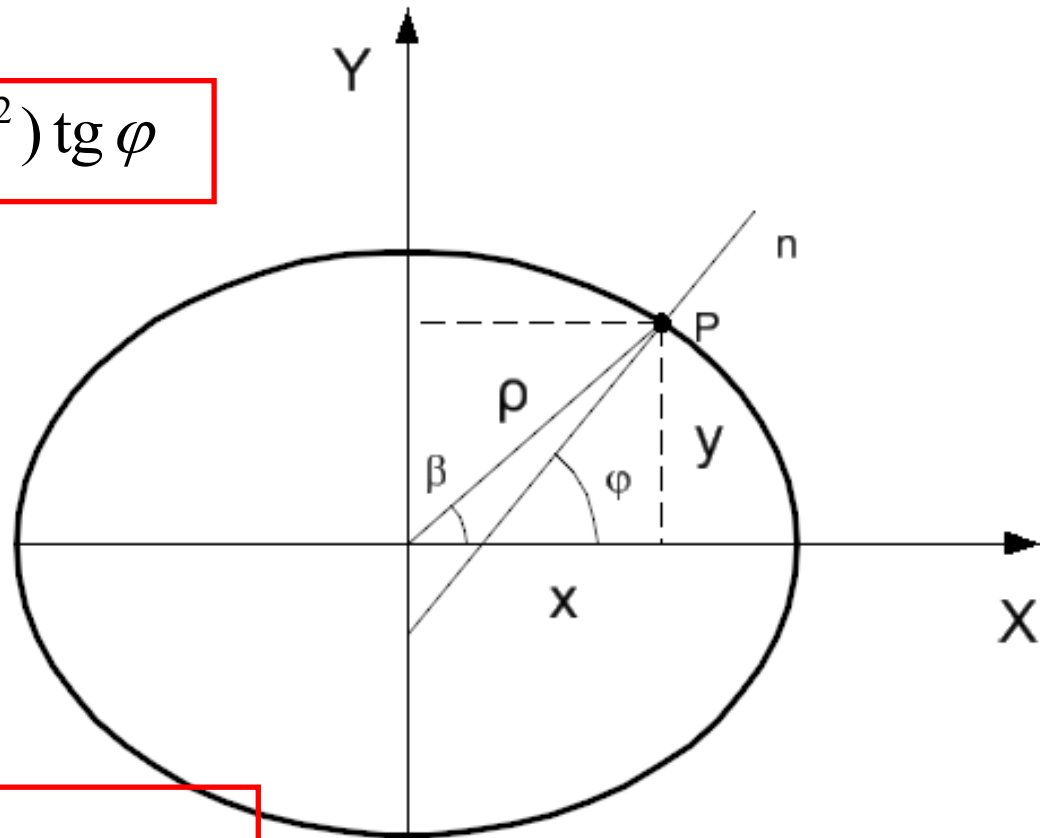
Platí: $\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{x}$

Po dosazení: $\operatorname{tg} \beta = (1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi$

- Pro zvolený elipsoid je e konstantou.
- Největší rozdíl pro $\varphi = 45^\circ$, a to $11^\circ 35'$.

Rádus vektor ρ :

$$\rho = \frac{a^2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} (\cos^2 \varphi + (1 - e^2 \sin^2 \varphi))$$



7. Vztah mezi zeměpisnou a redukovanou šířkou

Platí:

$$x = a \cos \psi$$
$$y = b \sin \psi$$
$$\frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{a}{b} \frac{y}{x}$$

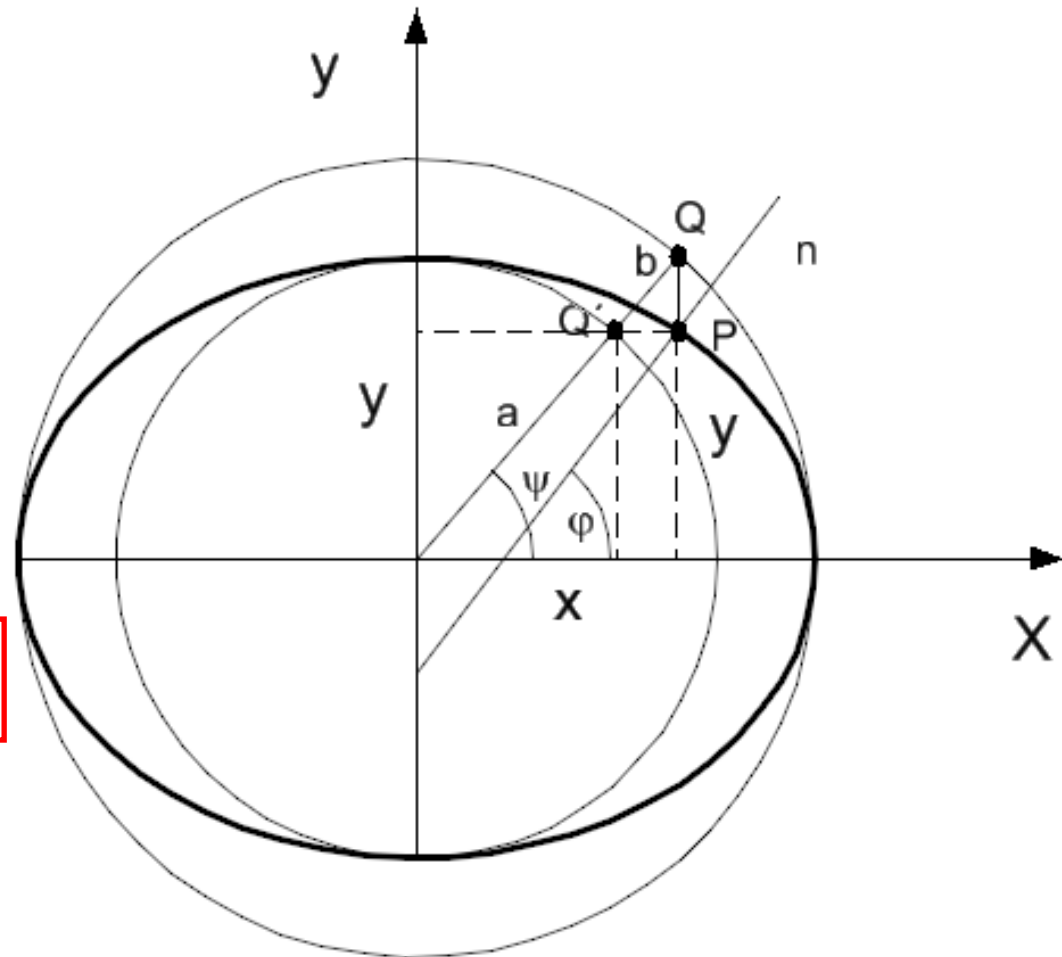
Kde

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \beta$$
$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$$

Pak:

$$\operatorname{tg} \psi = \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} \varphi$$

Pro body na rovníku $\psi = \varphi$.
Největší rozdíl pro $\varphi = 45^\circ$,
a to 6° .



8. Odvození pravoúhlých prostorových souřadnic

Souřadnice x, y v rovině meridiánové elipsy:

$$x = \frac{a \cos \varphi}{W}$$

$$y = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{W}$$

Prostorové pravoúhlé souřadnice X, Y, Z :

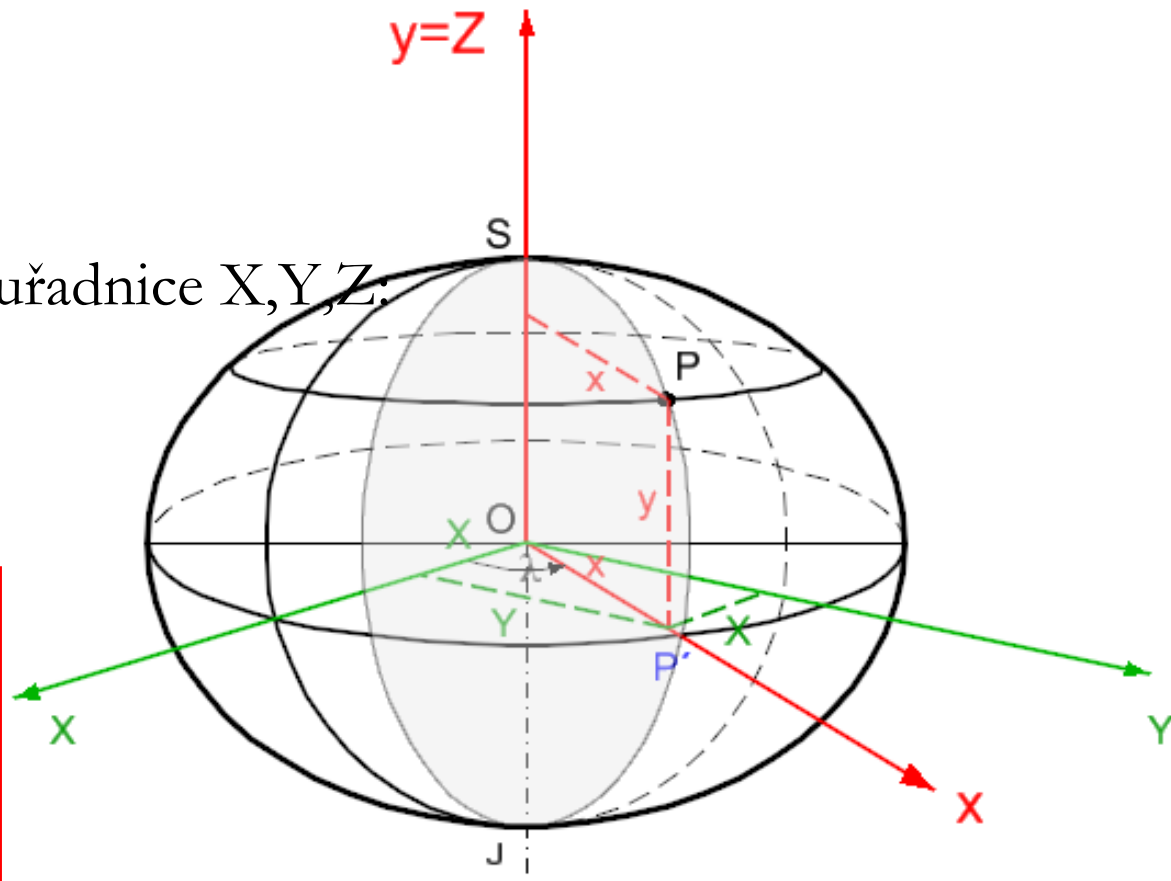
$$\cos \lambda = \frac{X}{x}$$

$$\sin \lambda = \frac{Y}{x}$$

$$X = x \cos \lambda = \frac{a}{W} \cos \varphi \cos \lambda$$

$$Y = x \sin \lambda = \frac{a}{W} \cos \varphi \sin \lambda$$

$$Z = y = \frac{a}{W} (1 - e^2) \sin \varphi$$



9. Hlavní poloměry křivosti

Normála v bodě P: lze jí proložit nekonečně mnoho rovin kolmých k povrchu elipsoidu.

Normálový řez v bodě P: řez rovinou procházející bodem P kolmý k povrchu elipsoidu.

Normálových řezů nekonečně mnoho, jejich křivosti jsou různé.

Existují dva normálové řezy s extrémní křivostí: maximální a minimální.

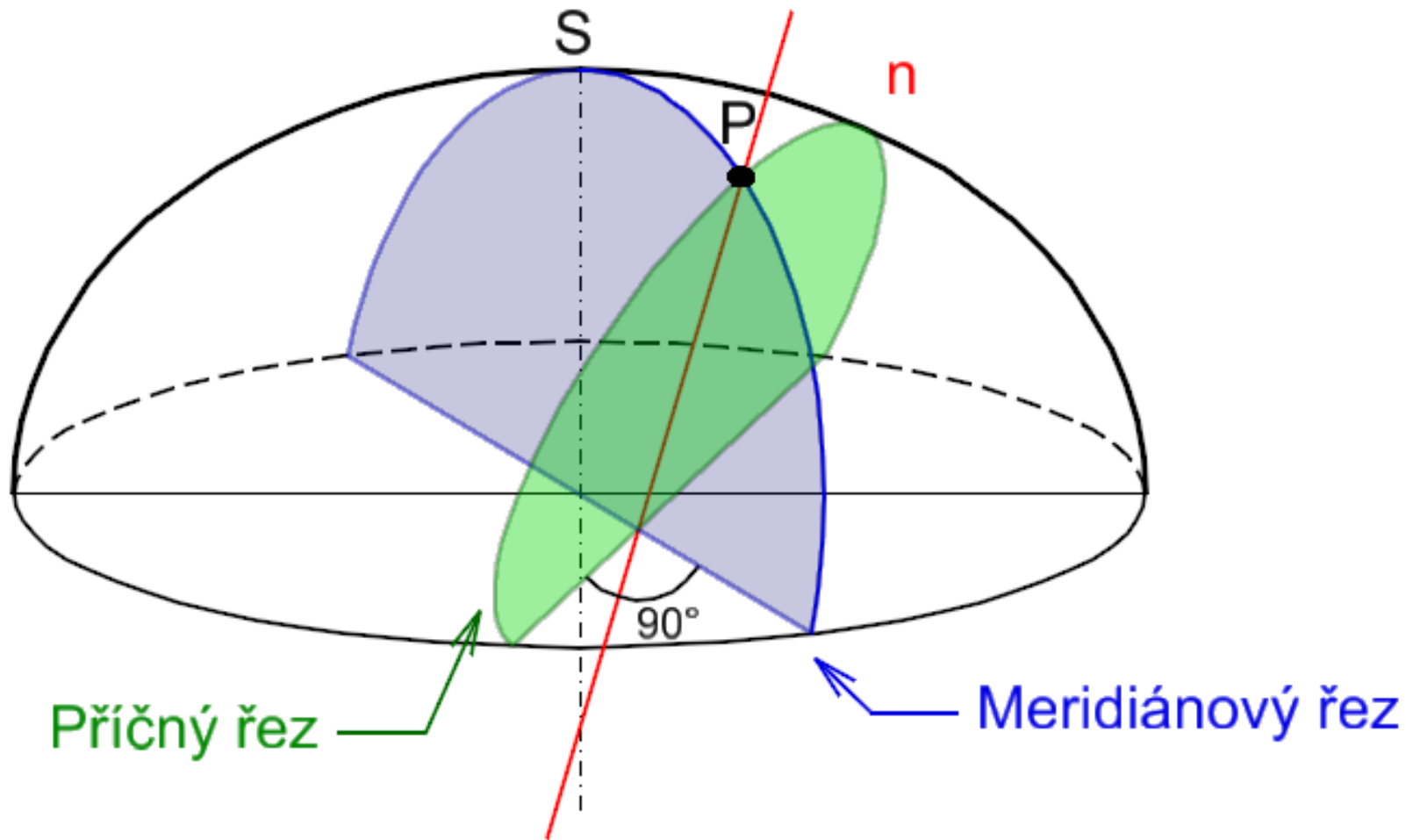
Označovány jako **hlavní normálové řezy**: meridiánový řez elipsoidu a příčný řez elipsoidu.

Jim odpovídají **hlavní poloměry křivosti**:

- Meridiánový poloměr křivosti M
- Příčný poloměr křivosti N

Použití: při řešení geodetických úloh na elipsoidu či v matematické kartografii.

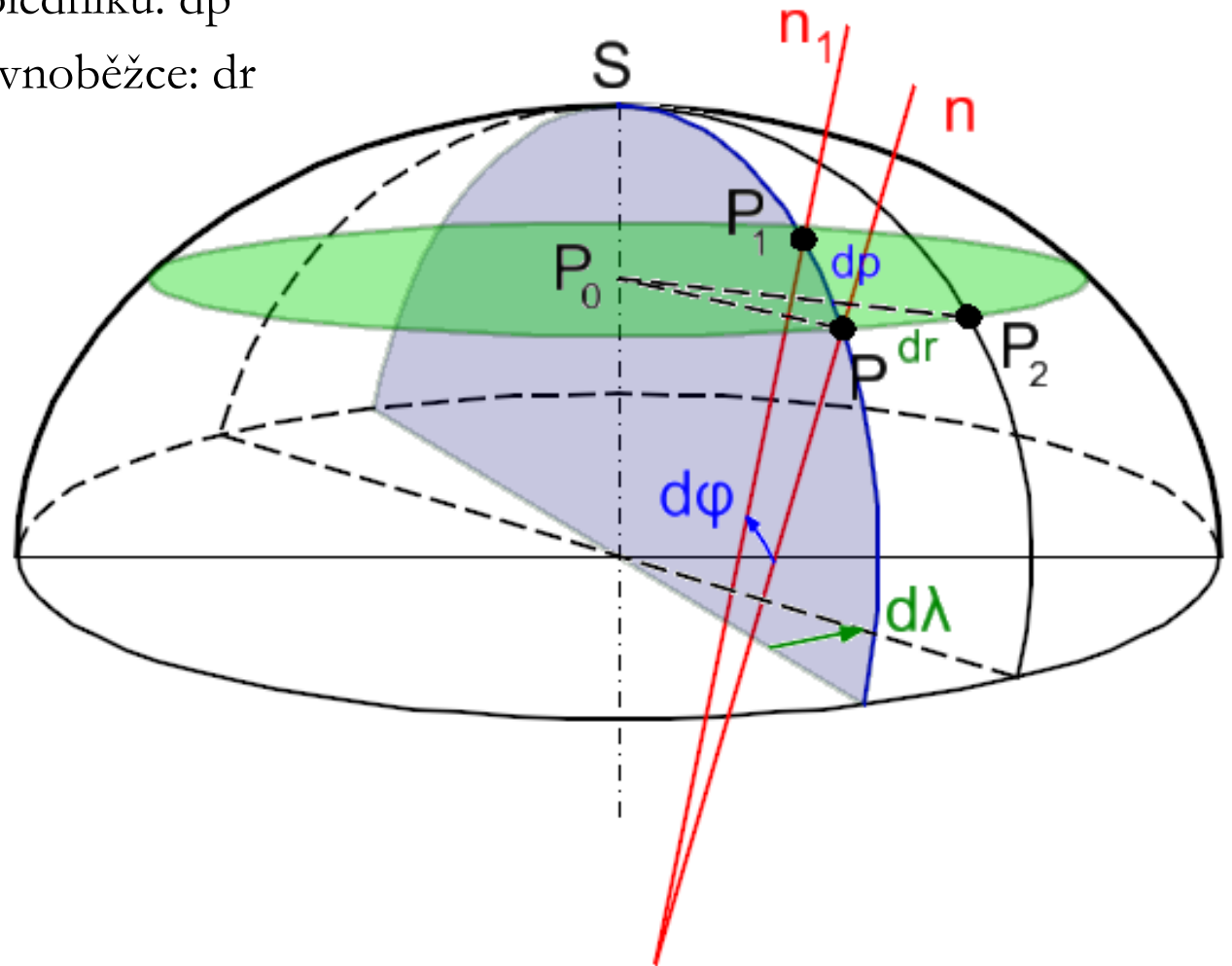
10. Ukázka meridiánového a příčného řezu elipsoidu



11. Délkové elementy v poledníku a rovnoběžce

Délkový element v poledníku: dp

Délkový element v rovnoběžce: dr



12. Meridiánový poloměr křivosti M

Rovina prochází osou rotace a bodem, řezem je meridiánová elipsa.

Meridiánový poloměr křivosti=poloměr křivosti meridiánové elipsy v bodě.

M závisí pouze na φ , pro elipsoidy a φ tabelován.

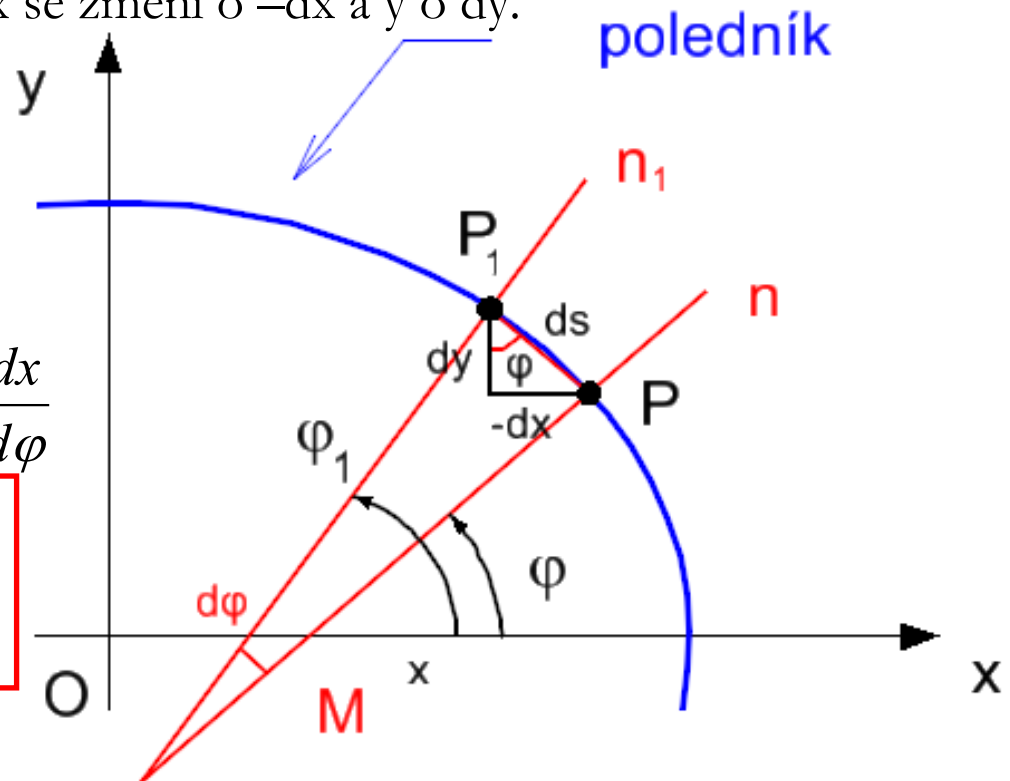
Posuneme se z bodu P do P₁ o ds, x se změní o -dx a y o dy.

$$ds = M d\varphi$$

$$ds = -\frac{dx}{\sin \varphi}$$

$$-\frac{dx}{\sin \varphi} = M d\varphi \Rightarrow M = -\frac{1}{\sin \varphi} \frac{dx}{d\varphi}$$

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a(1-e^2)}{W^3}$$



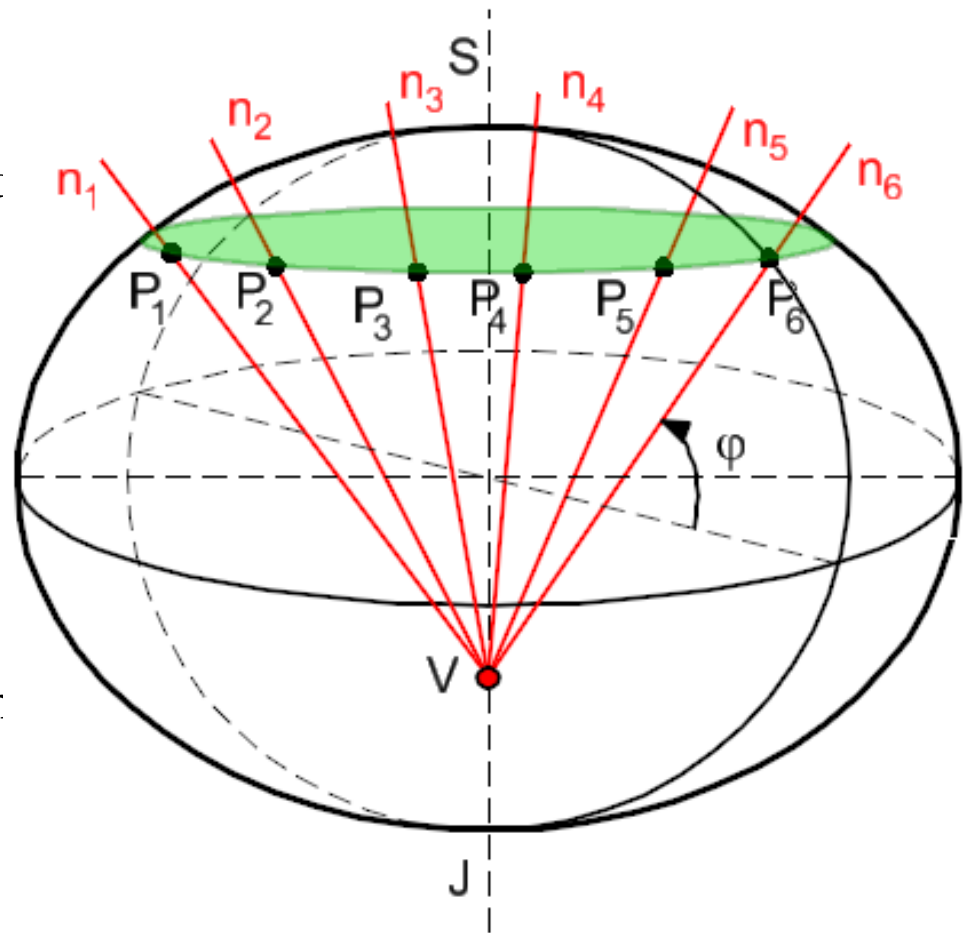
13. Příčný poloměr křivosti N

Rovina obsahuje normálu a je kolmá k rovině poledníku, řezem je elipsa.

Normály všech bodů ležících na jedné rovnoběžce φ_0 se protínají v jednom bodě na malé poloose elipsoidu.

N představuje délku normály mezi bodem P a jejím průsečíkem s vedlejší poloosou. $N = PV$

Opět závisí pouze na φ , pro všechny body na rovnoběžce je stejný.

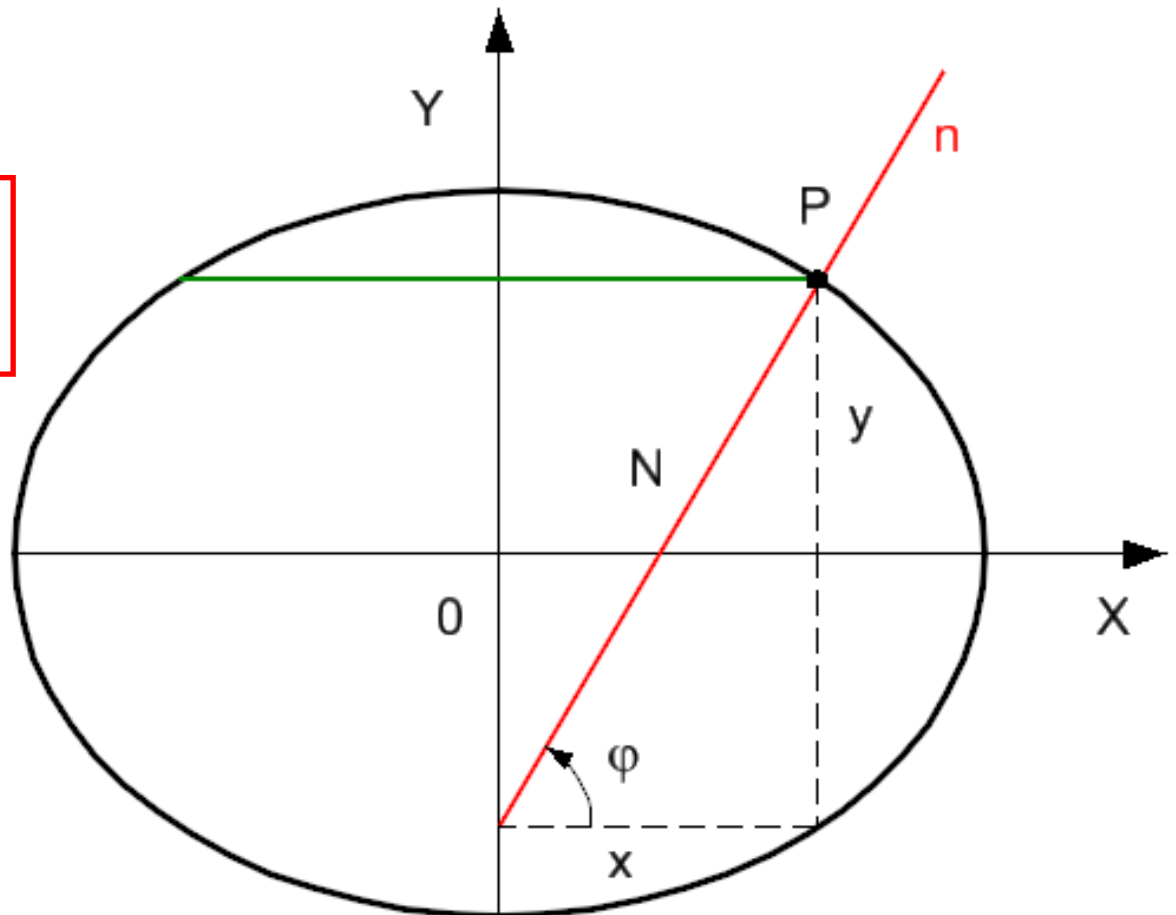


14. Odvození příčného poloměru křivosti N

Platí:

$$\cos \varphi = \frac{x}{N} \Rightarrow N = \frac{x}{\cos \varphi}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a}{W}$$



15. Střední poloměr křivosti R

Definován jako geometrický průměr z meridiánového a příčného poloměru křivosti.

$$R = \sqrt{MN}$$

R závisí pouze na φ .

Hodnoty R jsou tabelovány pro různé elipsoidy.

V matematické kartografii používán pro výpočet poloměru referenční koule z elipsoidu, tzv. **náhradní koule**.

Pro území ČR a $\varphi=49^{\circ} 30'$ a Krasovského elipsoid:

$$R_m = 6\,381\,561,267\text{m}$$

16. Výpočet délky poledníkového oblouku na elipsoidu (1/2)

Z bodu P se posuneme do bodu P1 o diferenciální hodnotu vzdálenosti ds .
Zeměpisná šířka φ se změní o hodnotu $d\varphi$.

Platí:

$$ds = M d\varphi$$

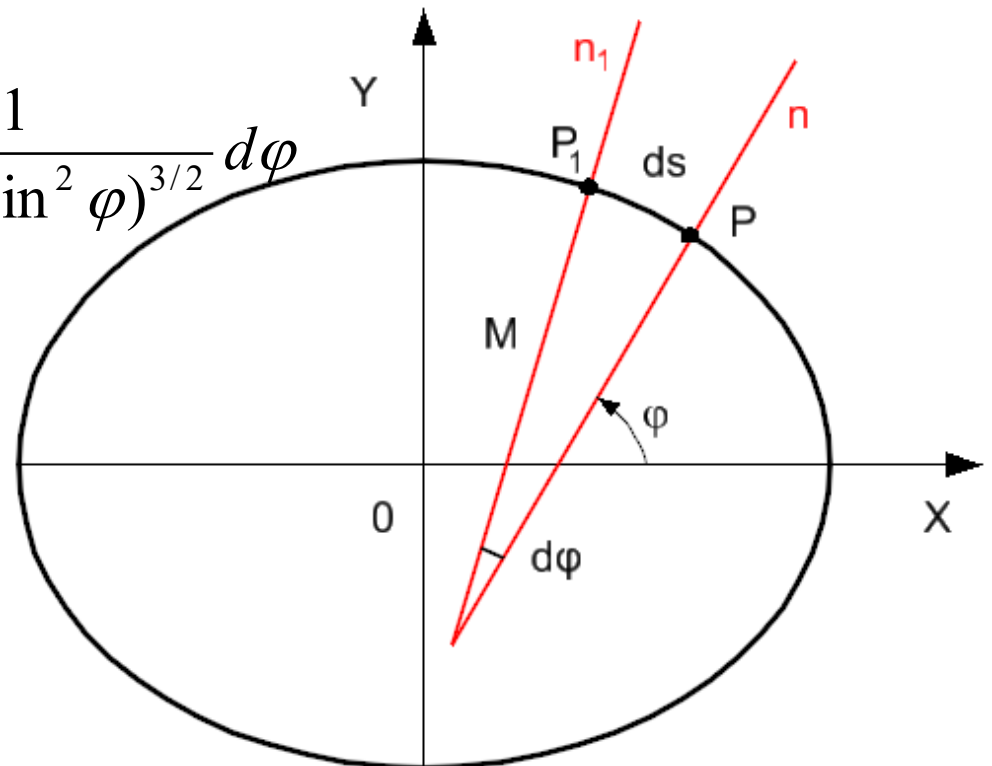
$$s = \int_0^{\varphi} M d\varphi = a(1 - e^2) \int_0^{\varphi} \frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi$$

Eliptický integrál,

Nahrazení řadou za použití
binomické věty.

Praktický výpočet je velmi

Obtížný.



17. Výpočet délky poledníkového oblouku na elipsoidu (2/2)

$$s = A' \varphi^\circ - B' \sin(2\varphi) + C' \sin(4\varphi) - D' \sin(6\varphi) + E' \sin(8\varphi) + \dots$$

$$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \dots$$

$$B = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \dots$$

$$C = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \dots$$

$$D = \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \dots$$

$$E = \frac{315}{16384}e^8 + \dots$$

$$A' = \frac{a(1-e^2)}{\rho^\circ} A$$

$$B' = \frac{a(1-e^2)}{2} B$$

$$C' = \frac{a(1-e^2)}{4} C$$

$$D' = \frac{a(1-e^2)}{6} D$$

$$E' = \frac{a(1-e^2)}{8} E$$

Pro výpočty s přesností 0.1 mm postačuje určit první čtyři členy řady.

18. Výpočet délky rovnoběžkového oblouku.

Poloměr rovnoběžky: r

$$r = N \cos \varphi$$

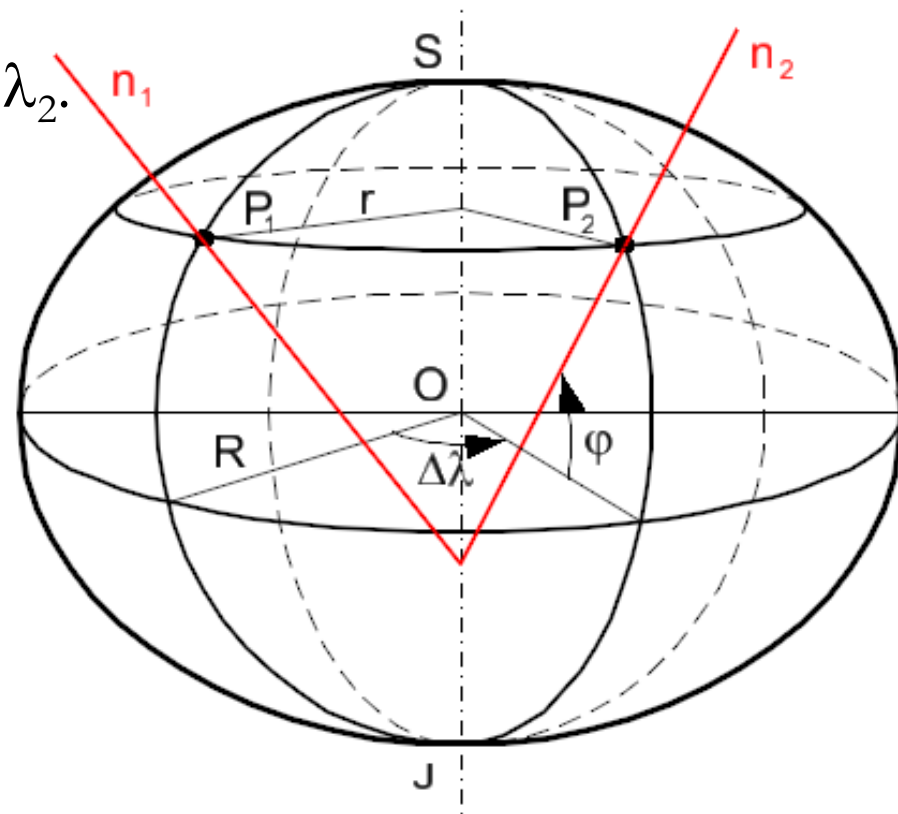
Délka oblouku s rovnoběžky mezi body o zeměpisných délkách λ_1, λ_2 .

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$$

Platí:

$$s = r\Delta\lambda = N \cos \varphi \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\rho^\circ}$$

Hodnoty s tabelovány pro φ a $\Delta\lambda$



19. Délka poledníkového/rovnoběžkového oblouku na kouli

Na kouli se vztahy zjednoduší, zejména výpočet délky poledníkového oblouku.

- **Délka poledníkového oblouku**

Mezi body se zeměpisnými šířkami u_s, u_j .

$$s_p = \frac{R(u_s - u_j)}{\rho}$$

- **Délka rovnoběžkového oblouku**

Mezi body o zeměpisných délkách v_1, v_2 ležících na rovnoběžce se zeměpisnou šířkou u .

$$r = R \cos u$$

$$s_r = \frac{r(v_v - v_z)}{\rho} = R \cos u \frac{(v_v - v_z)}{\rho^\circ}$$