

Matematické metody v kartografii

Jednoduchá azimutální zobrazení.

Azimutální projekce. UPS.

(10.)

1. Jednoduchá azimutální zobrazení

Společné vlastnosti:

- Jednoduché zobrazení, zobrazuje na tečnou rovinu v bodě
- Použita pro mapy malých a středních měřítek, zobrazování polárních oblastí nebo zemské hemisféry.
- Speciální případ kuželových zobrazení: $n=1$, vrchol kužele totožný s kartografickým pólem.
- Většinou v obecné poloze.
- Obraz pólu: bod.
- Obrazem poledníků úsečky, stýkají se v obrazu pólu.
- Obrazy rovnoběžek: koncentrické kružnice, střed v obrazu pólu.
- Symetrie vzhledem k poledníku, nikoliv vzhledem k rovníku.
- Ekvideformáty: obrazy zeměpisných/kartografických rovnoběžek.
- Délkové zkreslení roste od obrazu pólu

2. Souřadnicový systém

Typ souřadnicového systému:

- Polární.
- Pravoúhlý.

Počátek souřadnicového systému:

V obrazu pólu nebo posunutí o adiční konstantu (nepříliš časté)

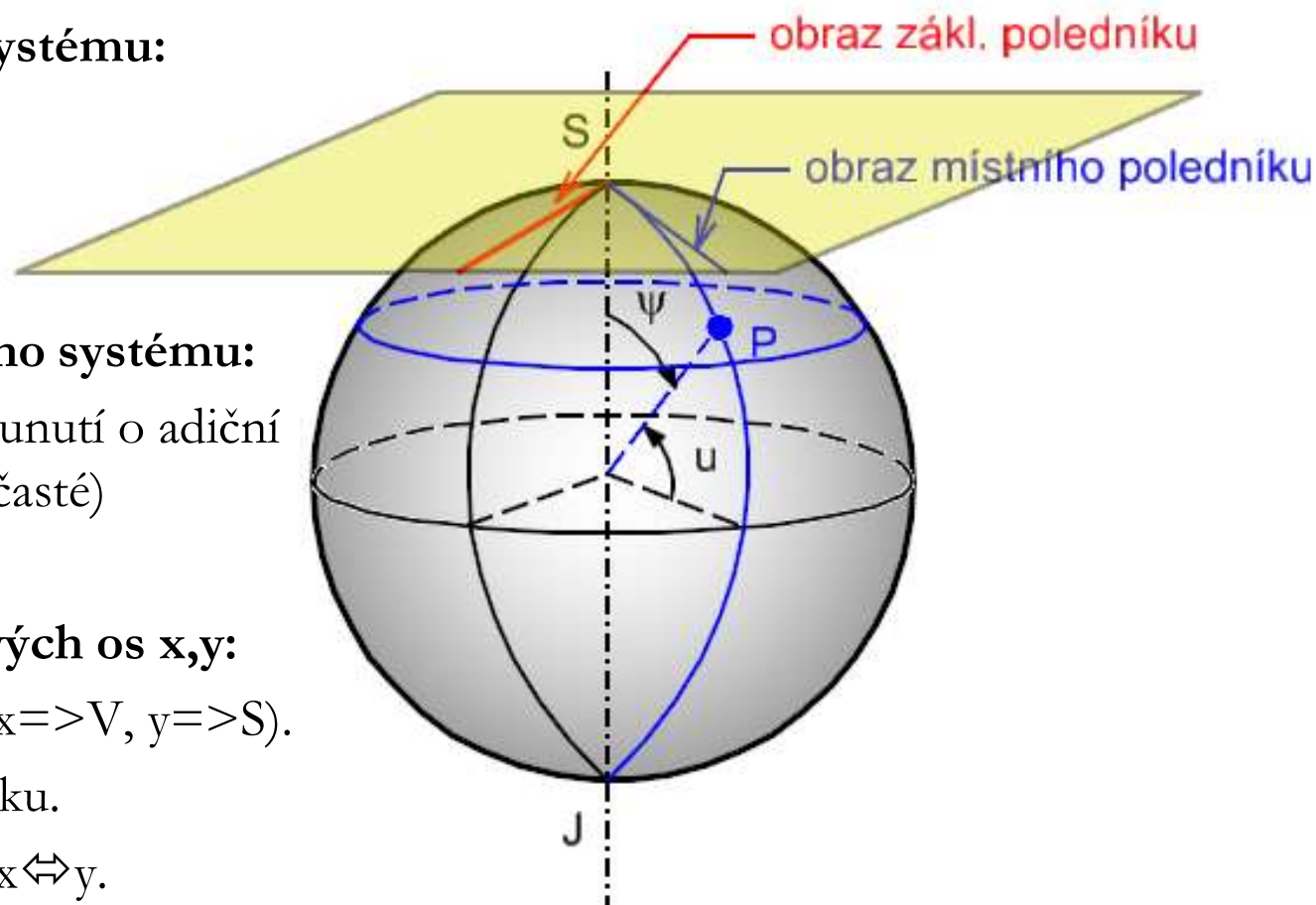
Orientace souřadnicových os x, y :

a) Matematický systém ($x \Rightarrow V$, $y \Rightarrow S$).

y =obraz zákl. poledníku.

b) Matematický systém: $x \Leftrightarrow y$.

x =obraz zákl. poledníku.



3. Vztah mezi polárními a pravouhlymi souřadnicemi

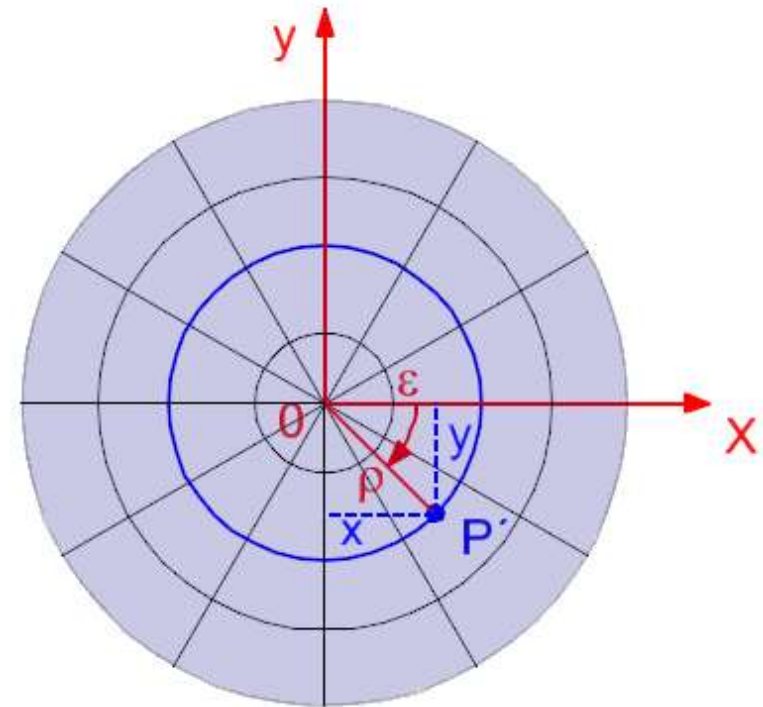
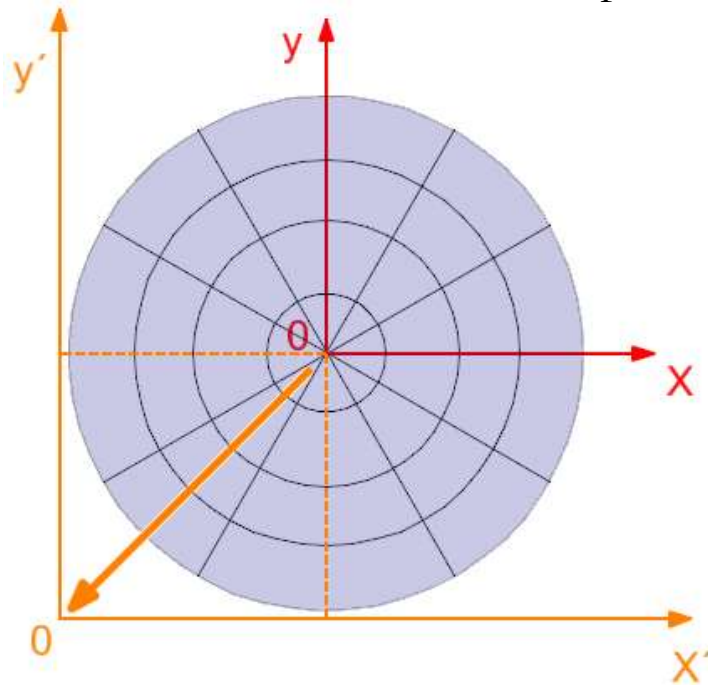
Symbolika:

ρ ...poloměr obrazu rovnoběžky v bodě P'

ε ... úhel mezi obrazem zákl. a místního poledníku.

y ... obraz základního poledníku

x ... kolmice k obrazu základního poledníku



Vztah mezi polárními a pravouhlymi souřadnicemi:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varepsilon & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\y &= \rho \sin \varepsilon & \varepsilon &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\end{aligned}$$

4. Zobrazovací rovnice, měřítko a zkreslení

Jednoduché zobrazení, každá zobrazovací rovnice funkcí pouze jedné proměnné:
 ρ je funkcí u , ε funkcí v .

Zavedena pomocná proměnná: $\psi = 90 - u$, $d\psi = -du$.

Obecný tvar zobrazovacích rovnic: $\rho = f(\psi)$,
 $\varepsilon = v$.

Délkový element v poledníku: $m_p = -\frac{d\rho}{Rdu} = \frac{d\rho}{Rd\psi}$.

Délkový element v rovnoběžce: $m_r = \frac{\rho d\varepsilon}{R \cos(90 - \psi) dv} = \frac{\rho}{R \sin \psi}$.

Plošné zkreslení: $P = m_p m_r$.

Maximální úhlové zkreslení: $\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) = \frac{|m_p - m_r|}{m_p + m_r}$.

5. Azimutální zobrazení ekvidistantní v polednicích

=tzv. Postelovo zobrazení (Guillauma Postel, 1581).

Vlastnosti:

Znázorňuje celou Zemi (zobrazení planisféry).

Vzdálenosti obrazů rovnoběžek stejné.

Zachovává vzdálenosti od kartografického pólu, používá se v případech, kdy je nutné zachovat vzdálenost od pozorovacího místa (obrazovky radiolokátorů).

Využíváno pro konstrukci map polárních oblastí.

Součástí kompozitního zobrazení Berghaus Star.

Podmínka:

$$m_p = 1 = \frac{d\rho}{Rd\psi}$$

$$d\rho = Rd\psi$$

$$\rho = R\psi + c \Rightarrow \rho_0 = R0 + c$$

$$\rho = R\psi$$

$$\varepsilon = \nu$$

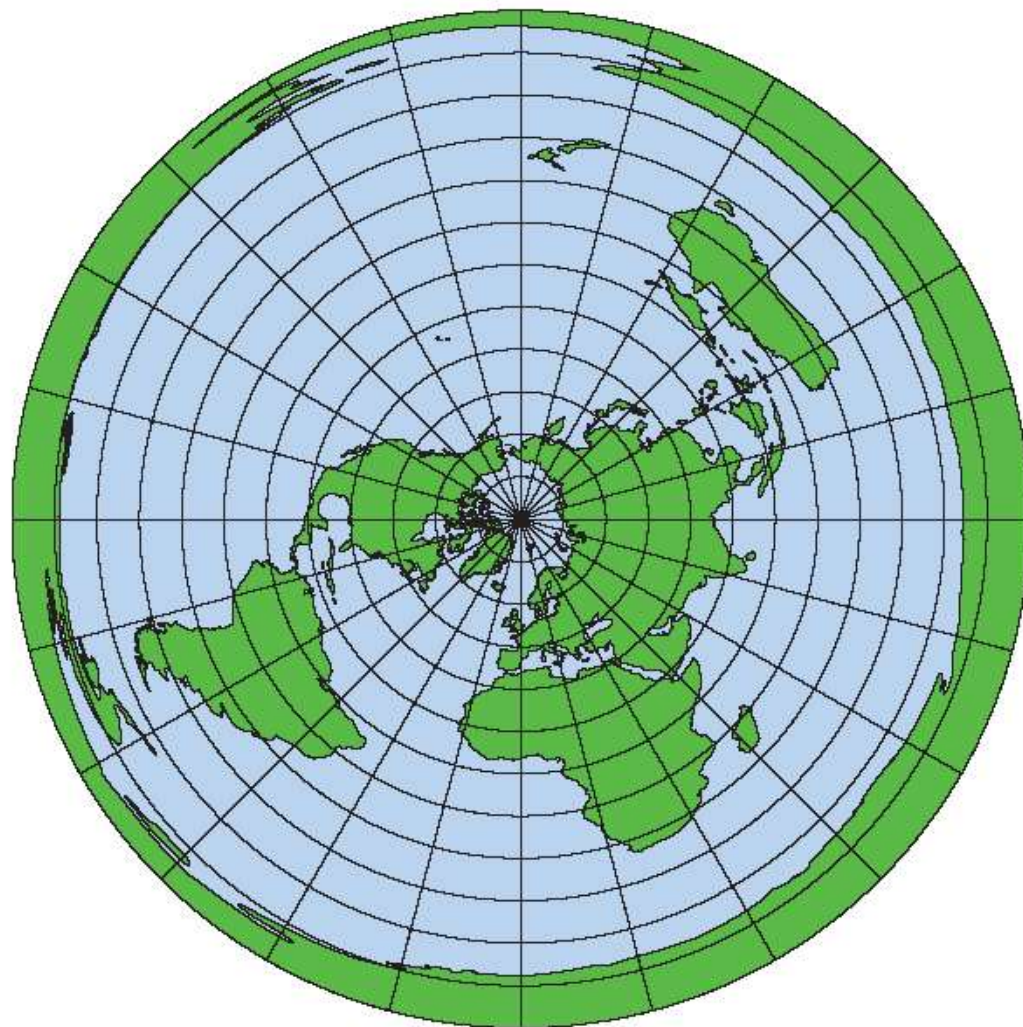
Měřítko a zkreslení:

$$m_r = \frac{\psi}{\sin \psi}$$

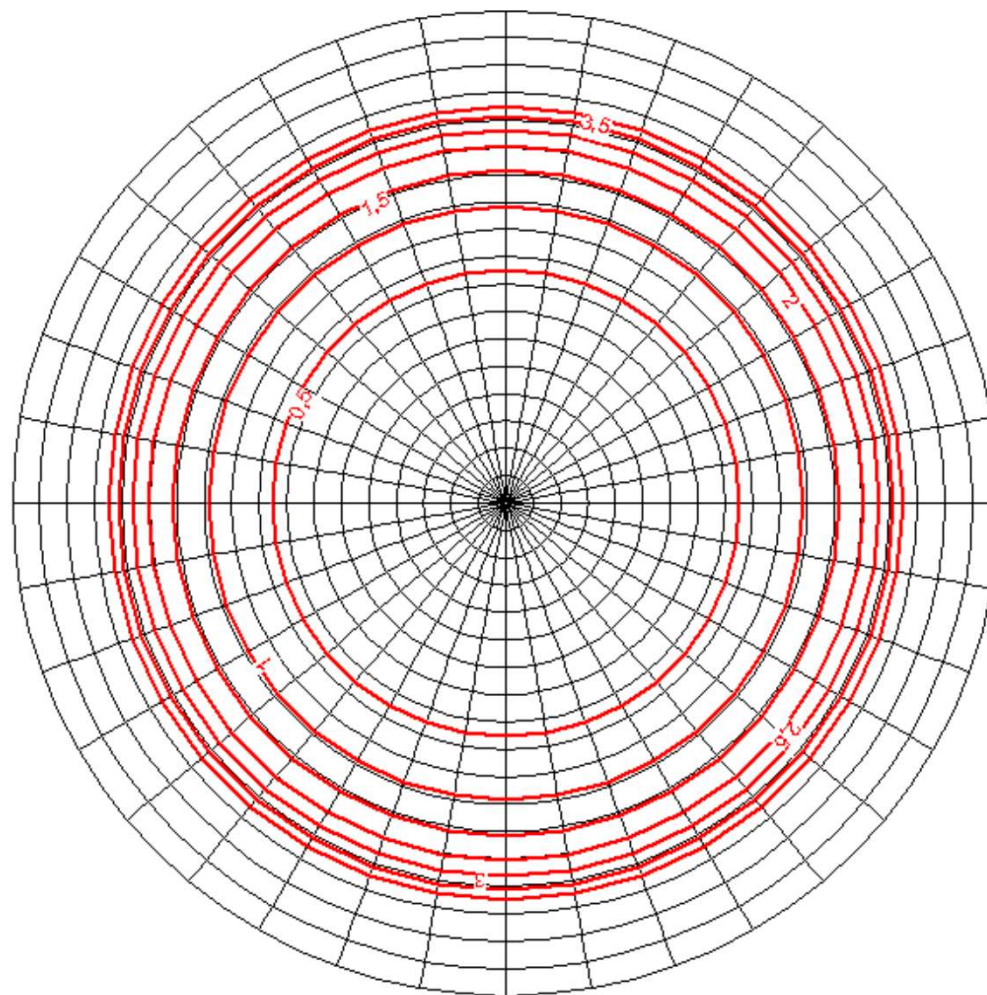
$$P = \frac{\psi}{\sin \psi}$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{|\psi - \sin \psi|}{\psi + \sin \psi}$$

6. Ukázka Postelova zobrazení

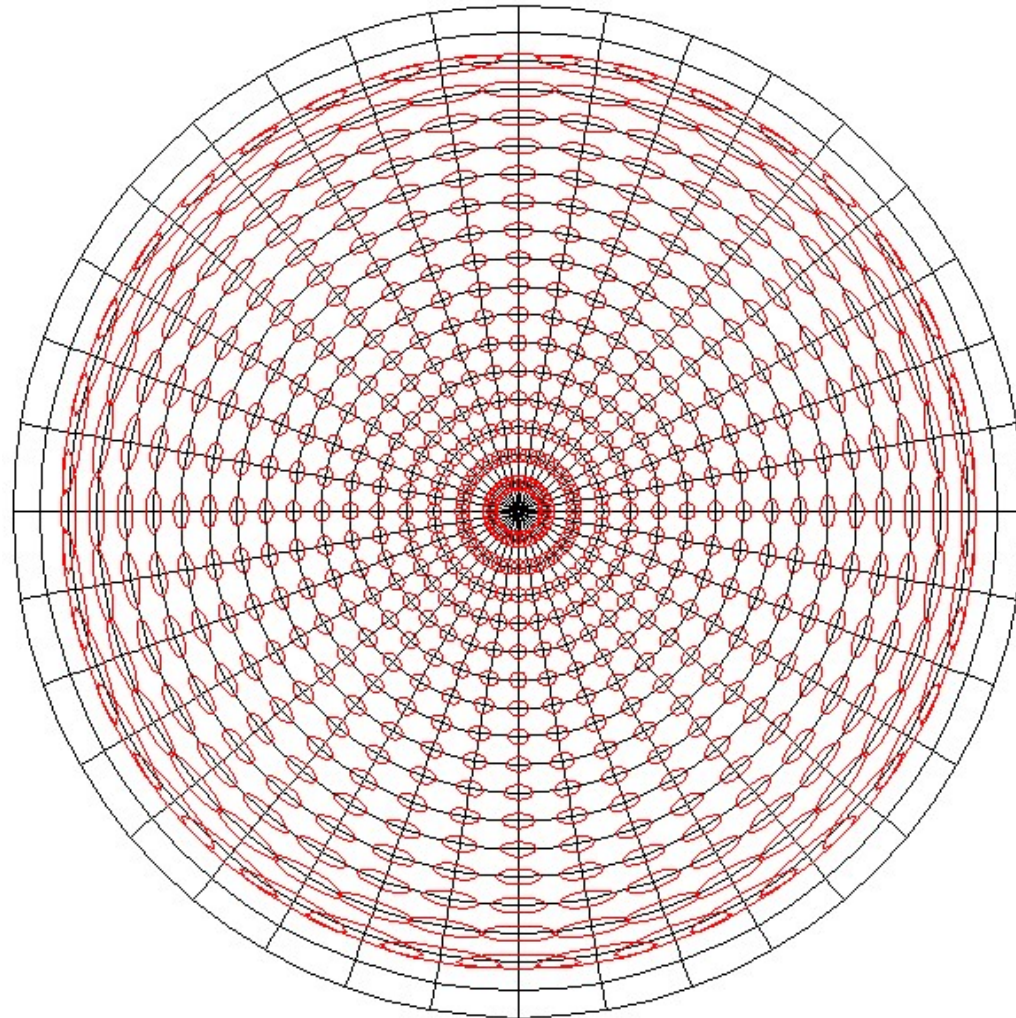


7. Ukázka ekvideformát m_r azimutálního ekvidistantního zobrazení



Geografická síť + ekvideformáty. Normální poloha. Ekvideformáty m_r , krok 0.5, Interval $\langle 0,3.5 \rangle$.

8. Ukázka Tissotových indikatrix azimutálního ekvidistantního zobrazení



Geografická síť + Tissotovy indikatrix. Normální poloha. Interval generování indikatrix $\langle -70^\circ, 90^\circ \rangle$.

9. Azimutální konformní zobrazení

=používáno již v Antice (2. století p.n.l).

Vlastnosti:

- Známo pod názvem stereografická projekce
- Vzdálenosti obrazů rovnoběžek se zvětšují směrem od středu mapy.
- Zachovává kružnice: kružnice v originálu se zobrazí v obrazu také jako kružnice.
- Velmi často používáno v kartografii.

Podmínka:

$$m_p = m_r = \frac{d\rho}{R d\psi} = \frac{\rho}{R \sin \psi},$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\psi}{\sin \psi},$$

$$\ln \rho = \operatorname{Intg} \frac{\psi}{2} + c \Rightarrow c = \ln k \Rightarrow \ln \rho = \operatorname{Intg} \frac{\psi}{2} + \ln k,$$

$$\rho = k \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \Rightarrow m_p = 1,$$

$$m_p = \frac{\rho}{R \sin \psi} = \frac{k \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{R \sin \psi} = \frac{k \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{2R \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}} = \frac{k}{2R \cos^2 \frac{\psi}{2}} = 1,$$

$$k = 2R \cos^2 \frac{\psi}{2}.$$

Volba konstant:

Tečná rovina, $\psi_0 = 0$:

$$k(\psi_0) = 2R \cos^2 \frac{0}{2} = 2R.$$

Sečná rovina:

$$k(\psi_0) = 2R \cos^2 \frac{\psi_0}{2}.$$

Měřítko:

$$m_p = m_r = \frac{\cos^2 \frac{\psi_0}{2}}{\cos^2 \frac{\psi}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \frac{\psi}{2}},$$

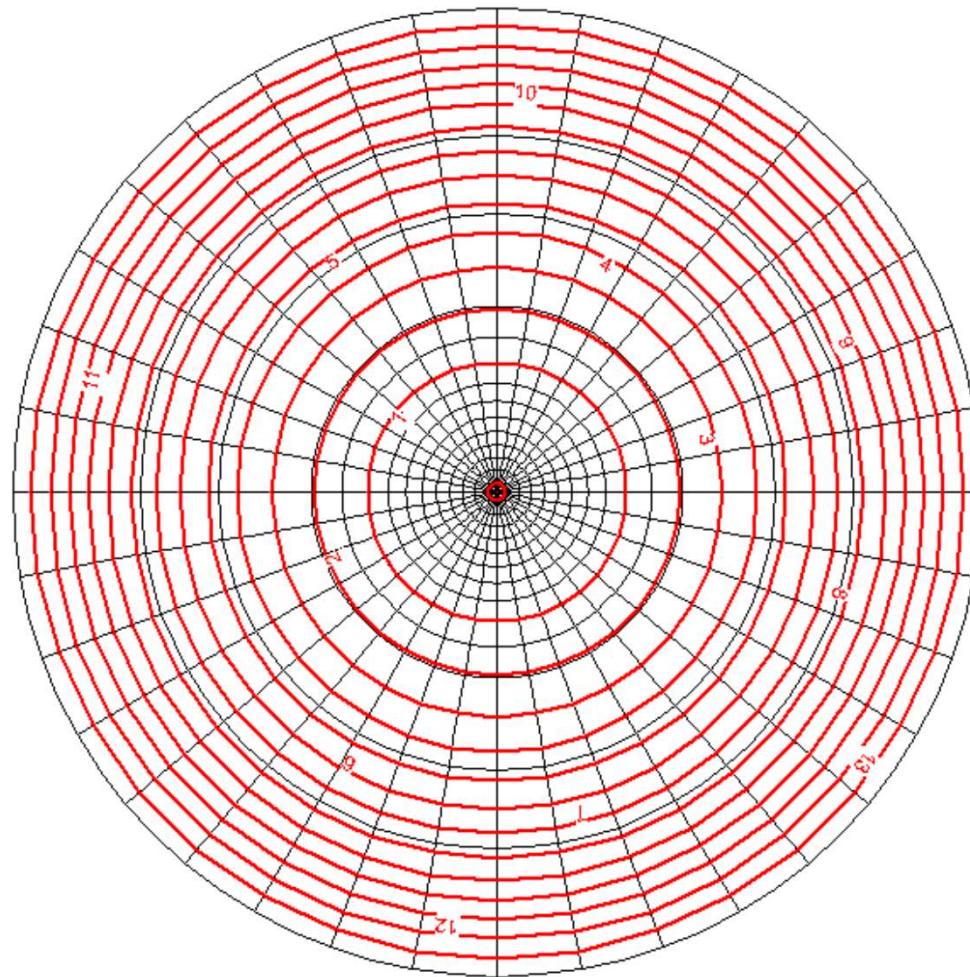
$$P = \frac{\cos^4 \frac{\psi_0}{2}}{\cos^4 \frac{\psi}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\cos^4 \frac{\psi}{2}}.$$

Zobrazovací rovnice:

$$\rho = 2R \cos^2 \frac{\psi_0}{2} \tan \frac{\psi}{2}$$

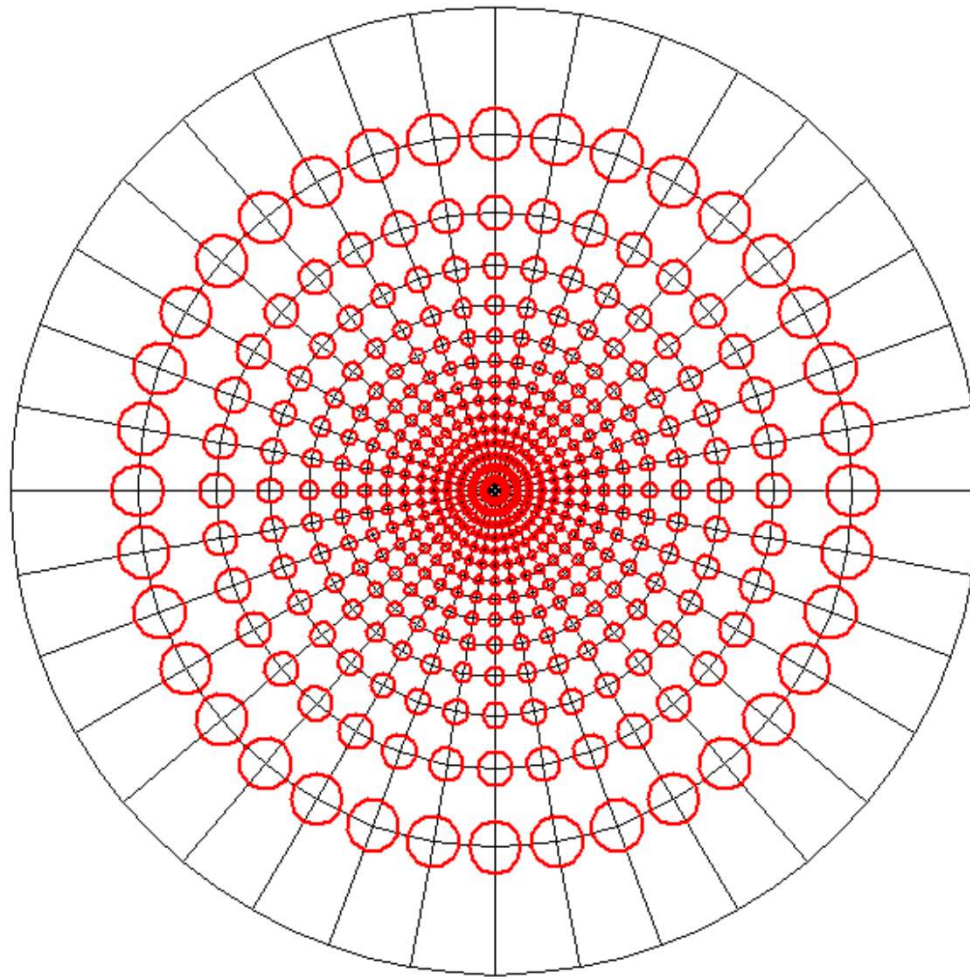
$$\varepsilon = \nu$$

10. Ukázka ekvideformát m_r azimutálního konformního zobrazení



Geografická síť + ekvideformáty. Normální poloha, 1NR.. Ekvideformáty m_r , krok 1, Interval $\langle 0,15 \rangle$.

11. Ukázka Tissotových indikatrix azimutálního konformního zobrazení



Geografická síť + Tissotovy indikatrix. Normální poloha. Interval generování indikatrix $\langle -60^\circ, 90^\circ \rangle$.

12. Azimutální ekvivalentní zobrazení

= Lambertovo azimutální zobrazení (Johan Heinrich Lambert, 1772).

Vlastnosti:

- Vzdálenosti obrazů rovnoběžek se směrem k pólu zmenšují.
- Vzdálenosti obrazů poledníků stejné.
- Využití v atlasové kartografii.
- Často používáno pro mapy planisfér.

Podmínka:

$$m_p m_r = 1$$

$$\frac{d\rho}{R d\psi} \frac{\rho}{R \sin \psi} = 1$$

$$\rho d\rho = R^2 \sin \psi d\psi$$

$$\rho^2 = -2R^2 \cos \psi + c \Rightarrow 0 = -2R^2 + c$$

$$\rho^2 = 2R^2 (1 - \cos \psi) \Rightarrow 1 - \cos \psi = 2 \sin^2 \frac{\psi}{2}$$

$$\rho = 2R \sin \frac{\psi}{2}$$

Měřítko a zkreslení:

$$m_p = \cos \frac{\psi}{2}$$

$$m_r = \frac{1}{\cos \frac{\psi}{2}}$$

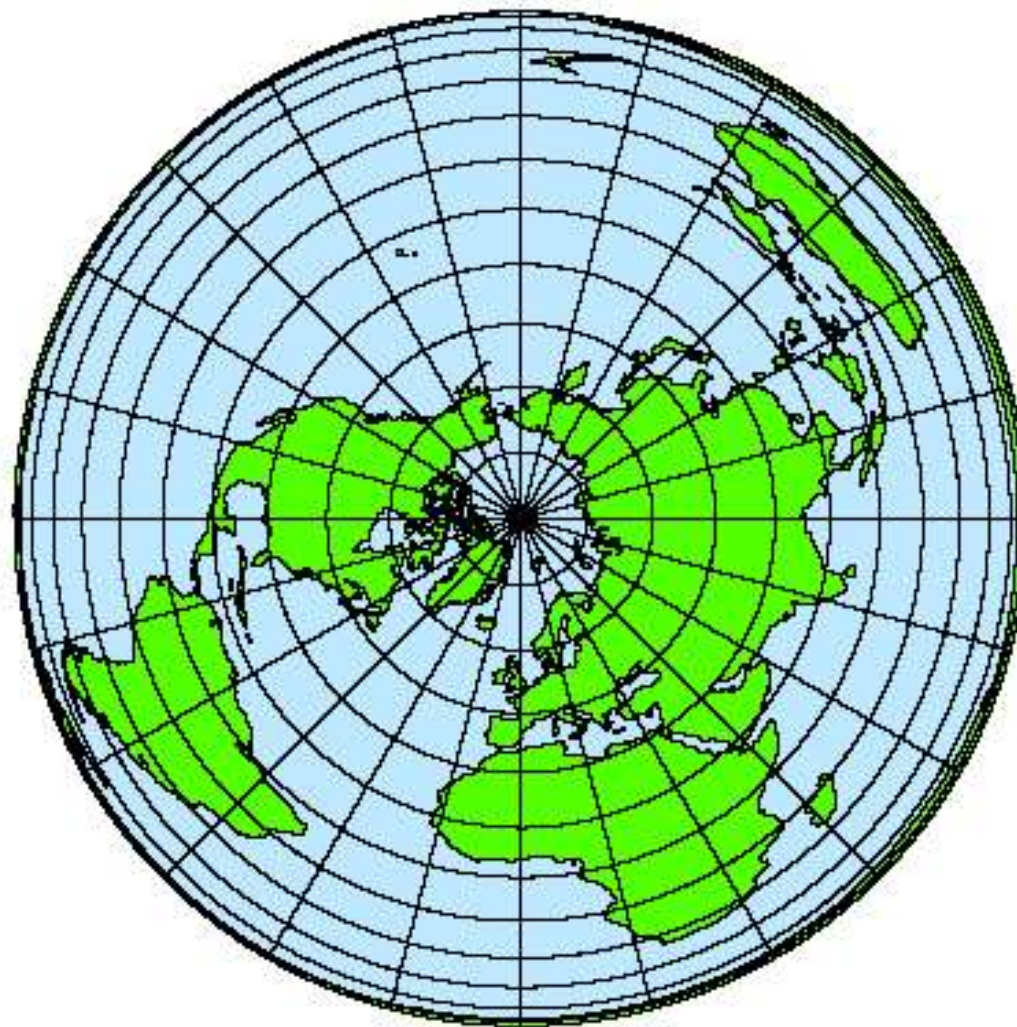
$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{|1 - \cos \frac{\psi}{2}|}{1 + \cos \frac{\psi}{2}}$$

Zobrazovací rovnice:

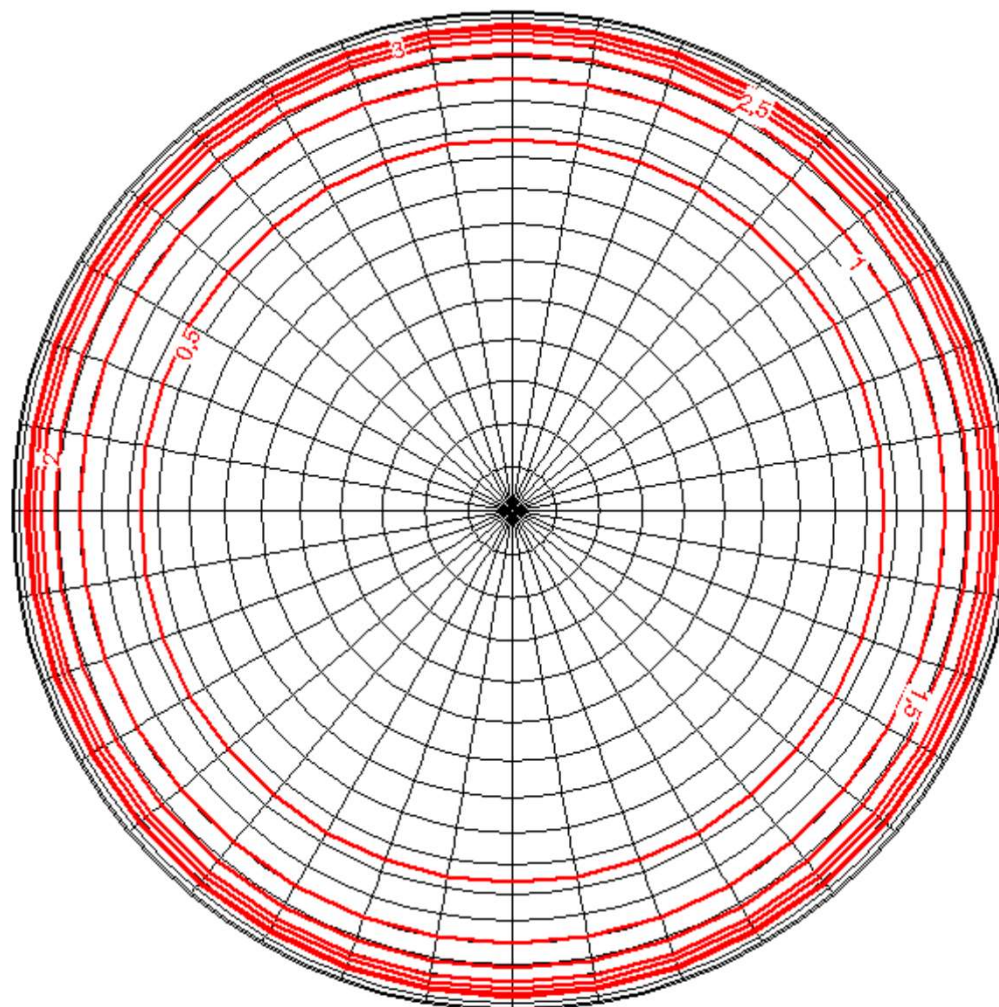
$$\rho = 2R \sin \frac{\psi}{2}$$

$$\varepsilon = \nu$$

13. Ukázka Lambertova zobrazení

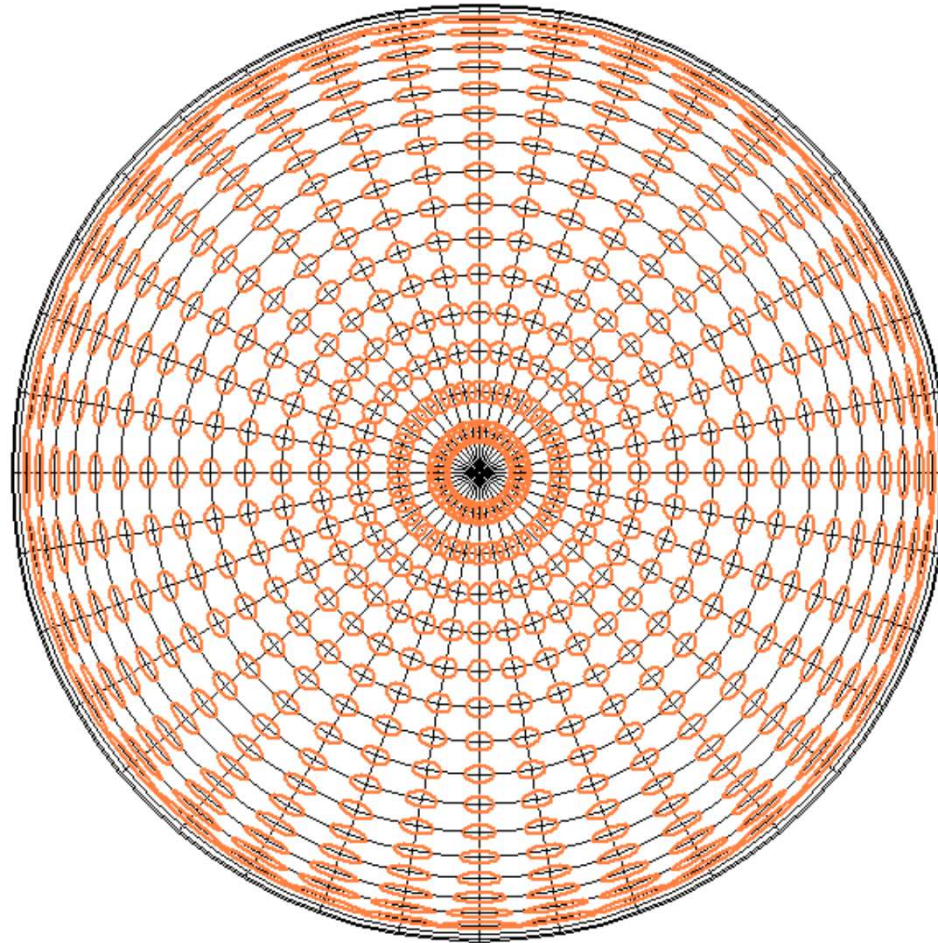


14. Ukázka ekvideformát m_r azimutálního ekvivalentního zobrazení



Geografická síť + ekvideformáty. Normální poloha.. Ekvideformáty m_r , krok 1, Interval $\langle 0,3.5 \rangle$.

15. Ukázka Tissotových indikatrix azimutálního ekvivalentního zobrazení



Geografická síť + Tissotovy indikatrix. Normální poloha. Interval generování indikatrix $\langle -60^\circ, 90^\circ \rangle$.

16. Azimutální kompenzační zobrazení.

Při použití azimutálního konformního zobrazení dochází k velkému plošnému zkreslení.

Při použití azimutálního ekvivalentního zobrazení dochází k velkému úhlovému zkreslení.

Východiskem může být použití kompenzačního (tj. vyrovnávacího) zobrazení.

Azimutální kompenzační zobrazení:

tzv. Breusignovo zobrazení (Arthur Breusign, 1892).

Zkresluje vše, ale méně než konformní či ekvivalentní zobrazení.

Poloměr ρ volen jako geometrický průměr z poloměrů azimutálního ekvivalentního a konformního zobrazení.

Zobrazovací rovnice:

$$\rho = \sqrt{4R^2 \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \sin \frac{\psi}{2}} = 2R \frac{\sin \frac{\psi}{2}}{\sqrt{\cos \frac{\psi}{2}}}$$

$\varepsilon = \nu$

Měřítko a zkreslení:

$$m_p = \frac{1 + \cos^2 \frac{\psi}{2}}{2\sqrt{\cos^3 \frac{\psi}{2}}}$$
$$m_r = \frac{1}{\cos^2 \frac{\psi}{2}}$$
$$P = m_p m_r$$
$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{|1 - \cos \frac{\psi}{2}|}{1 + \cos \frac{\psi}{2}}$$

17. Azimutální projekce

Vznikají promítáním referenční koule na rovinu tečnou k referenční kouli, tj. geometrickou cestou.

Existuje pět základních projekcí, které se liší středem promítání:

- ❑ Gnómonická projekce
- ❑ Stereografická projekce
- ❑ Ortografická projekce
- ❑ Vnější (satelitní) projekce
- ❑ Dvojitá projekce

18. Gnómonická projekce

Vlastnosti:

- ❑ Známo již starém Řecku (Thales z Milétu, 7.st. p.n.l)
- ❑ Střed promítání leží na zemské ose a je totožný se středem koule
- ❑ Tato projekce zobrazí jen 1 polokouli bez rovníku.
- ❑ Vše zkresluje a poměrně hodně.
- ❑ Použití pro mapy polárních oblastí nebo námořní mapy.
- ❑ Ortodroma se v ní zobrazí jako úsečka.
- ❑ Transverzální poloha: poledníky// úsečky, rovnoběžky hyperboly se středem na rovníku.
- ❑ Obecná poloha: poledníky úsečky, rovnoběžky hyperboly, elipsy, paraboly

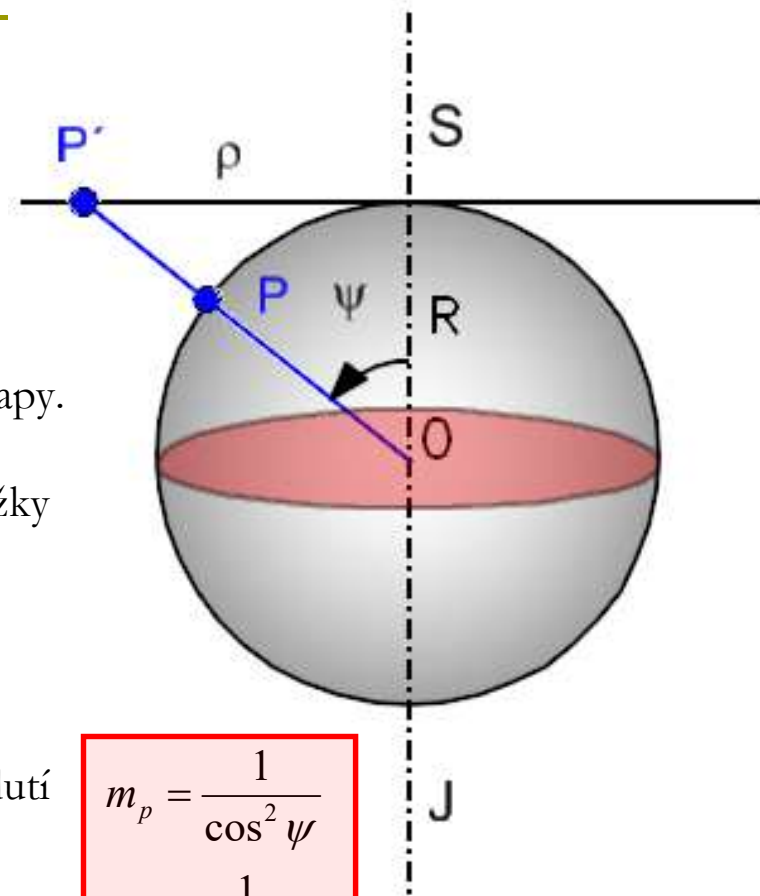
Ortodromická zobrazení:

Zobrazují ortodromu jako přímku popř. křivku, jejíž vzduť vůči spojnici počáteční-koncový bod je menší než grafická přesnost mapy.

Zobrazovací rovnice:

$$\rho = R \operatorname{tg} \psi$$

$$\varepsilon = \nu$$

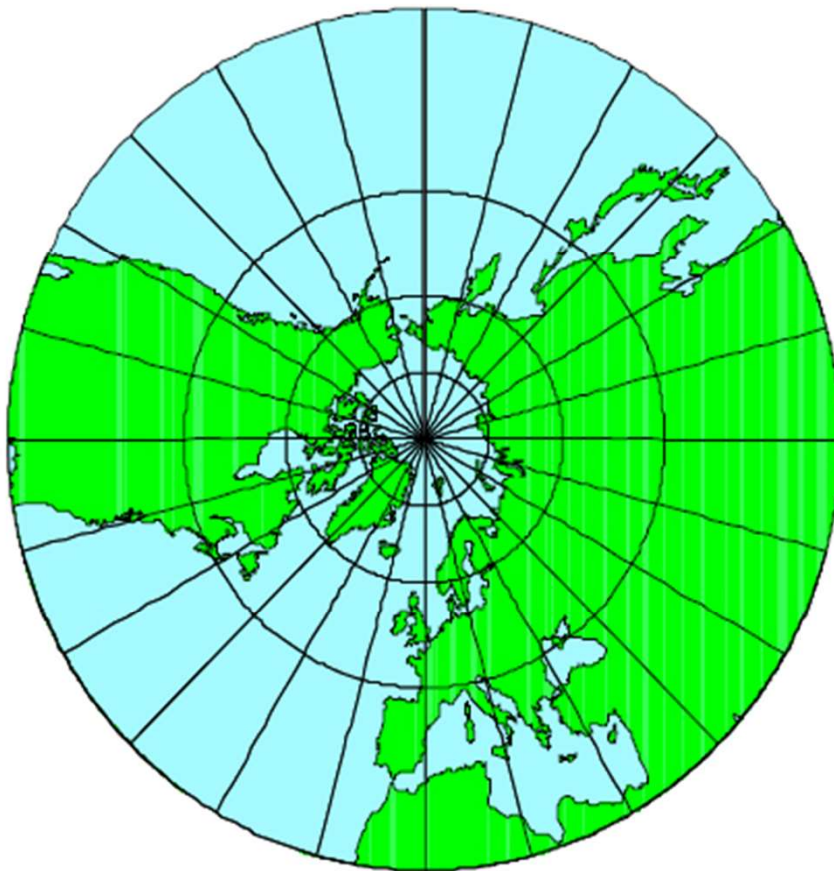


$$m_p = \frac{1}{\cos^2 \psi}$$

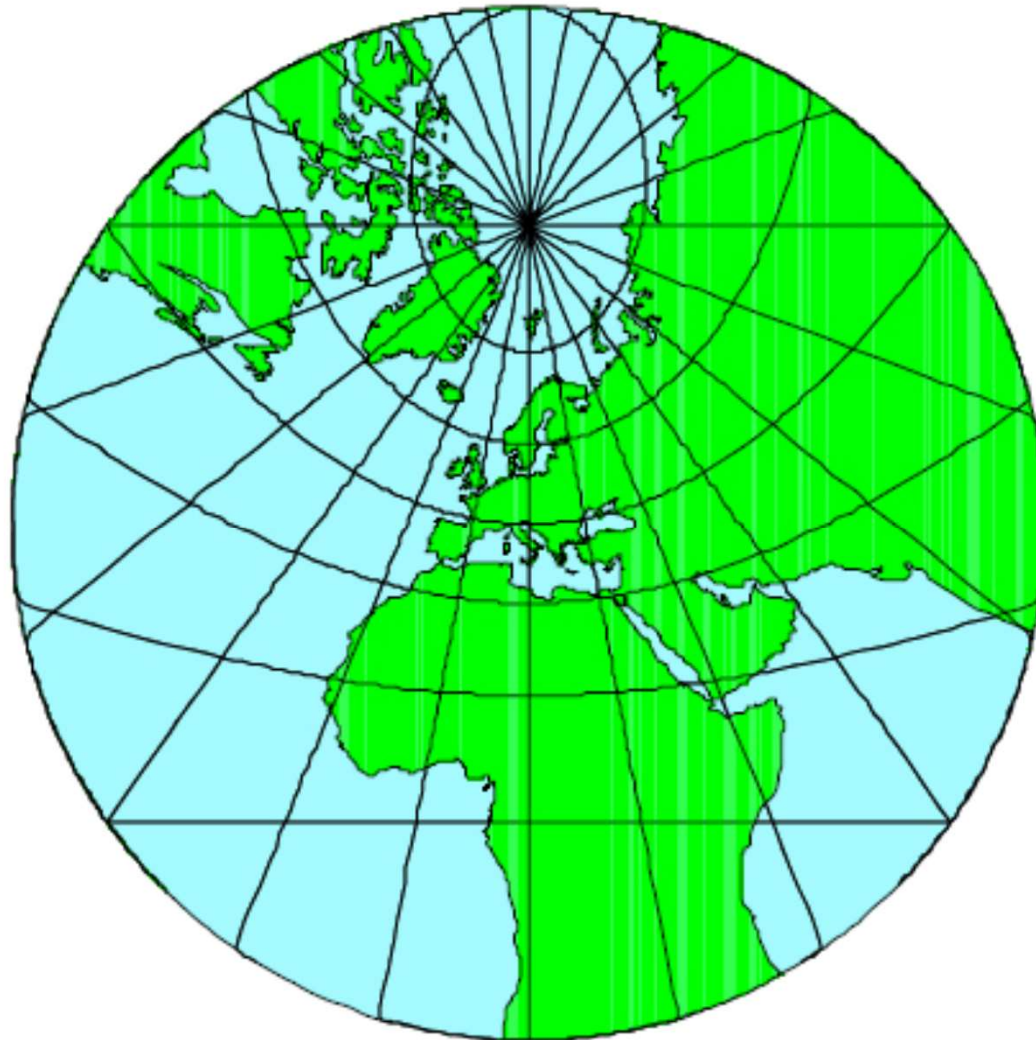
$$m_r = \frac{1}{\cos \psi}$$

$$P = \frac{1}{\cos^3 \psi}$$

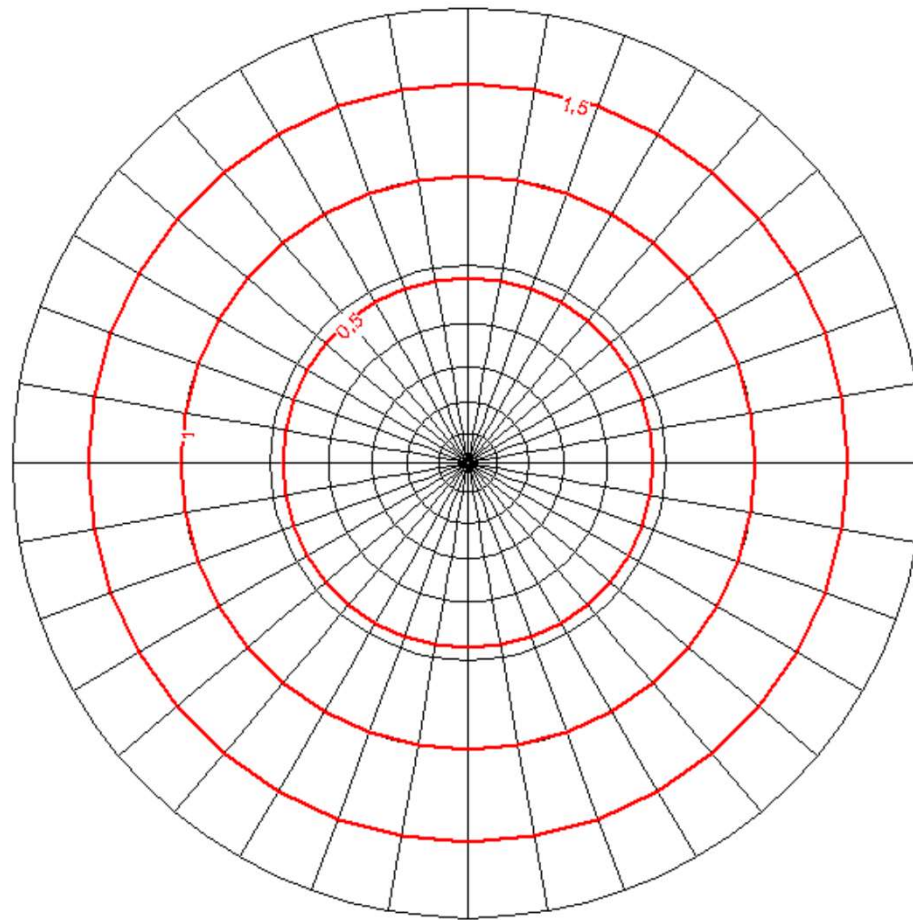
19. Gnómonická projekce, normální a transverzální poloha



20. Gnómonická projekce, obecná poloha

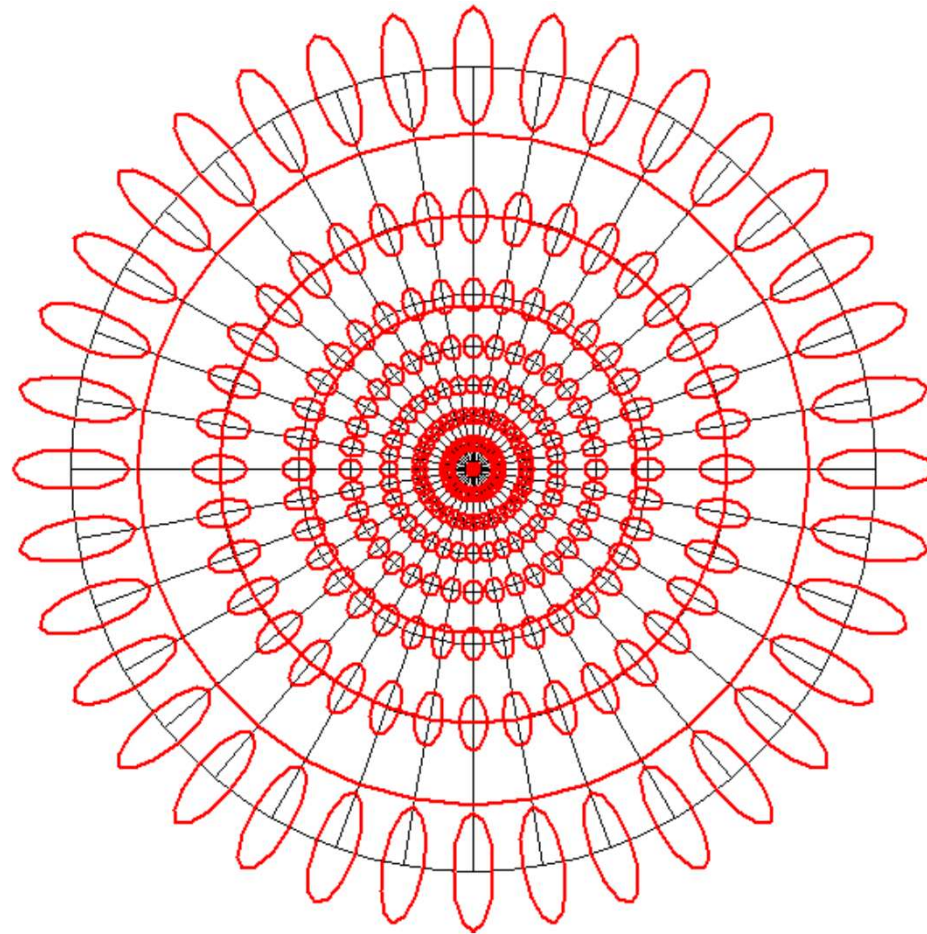


21. Ukázka ekvideformát m_r gnómonické projekce.



Geografická síť + ekvideformáty. Normální poloha, $u \in \langle 20^\circ, 90^\circ \rangle$..Ekvideformáty m_r , krok 0,5, Interval $\langle 0, 1,5 \rangle$.

22. Ukázka Tissotových indikatrix gnómonické projekce.



Geografická síť + Tissotovy indikatrix. Normální poloha, 1NR, $u \in \langle 20^\circ, 90^\circ \rangle$.

23. Stereografická projekce

Vlastnosti:

- Známa ve starém Řecku (Hipparchos z Nikeje, 2. st. p. n. l)
- Střed promítání leží v antipólu.
- Znázorňuje větší část zemského povrchu než gnómonická projekce.
- Poloměr obrazu rovníku je $2R$.
- Je konformní.
- Velmi často používaná projekce, znázorňování pólových oblastí.
- Státy NATO: UPS (Universal Polar Stereographic Projection).

Zobrazovací rovnice:

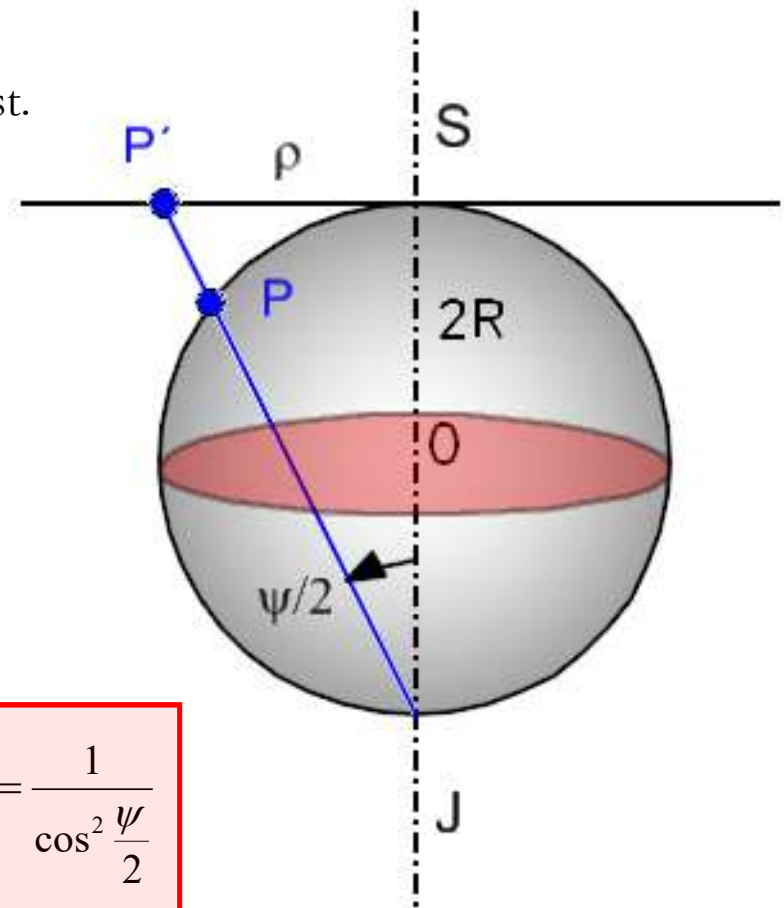
$$\rho = 2R \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}$$

$$\varepsilon = \nu$$

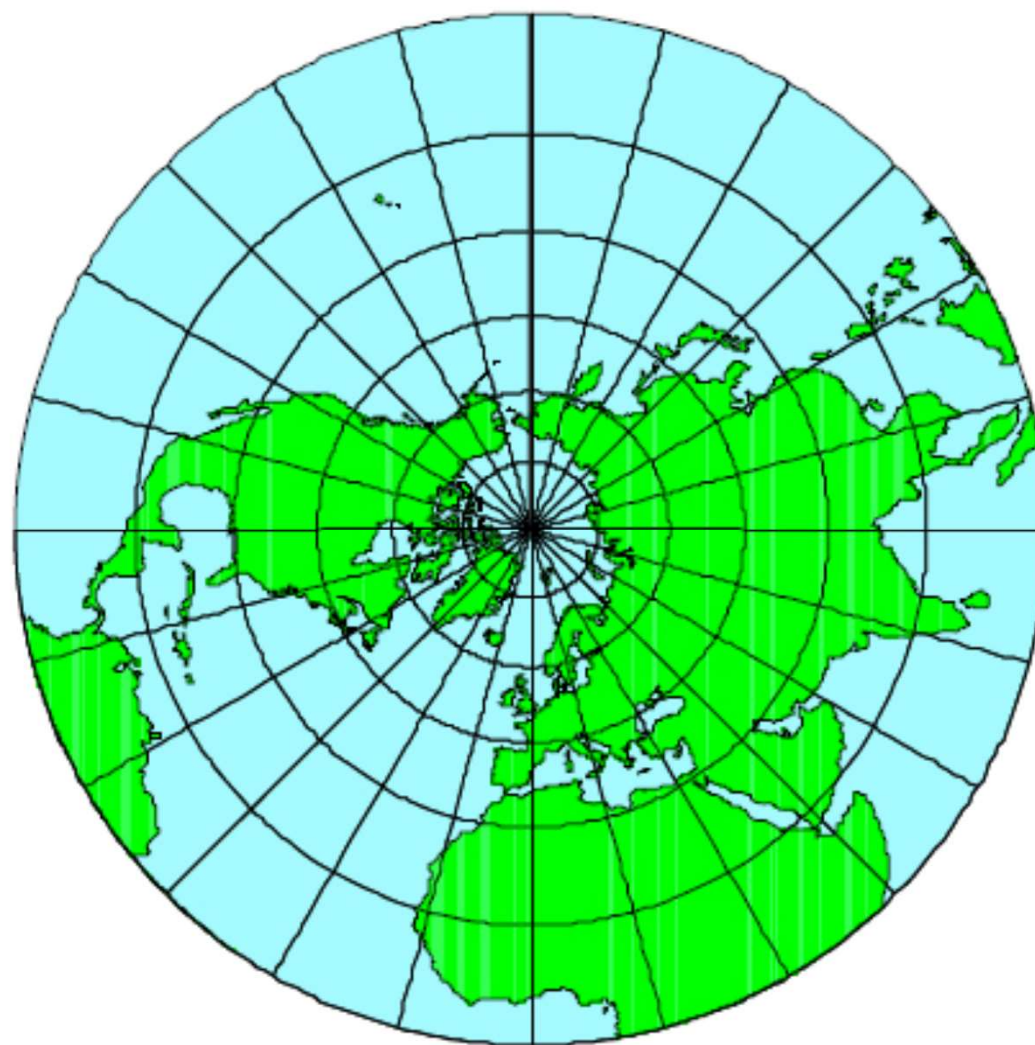
Zkreslení:

$$m_p = m_r = \frac{1}{\cos^2 \frac{\psi}{2}}$$

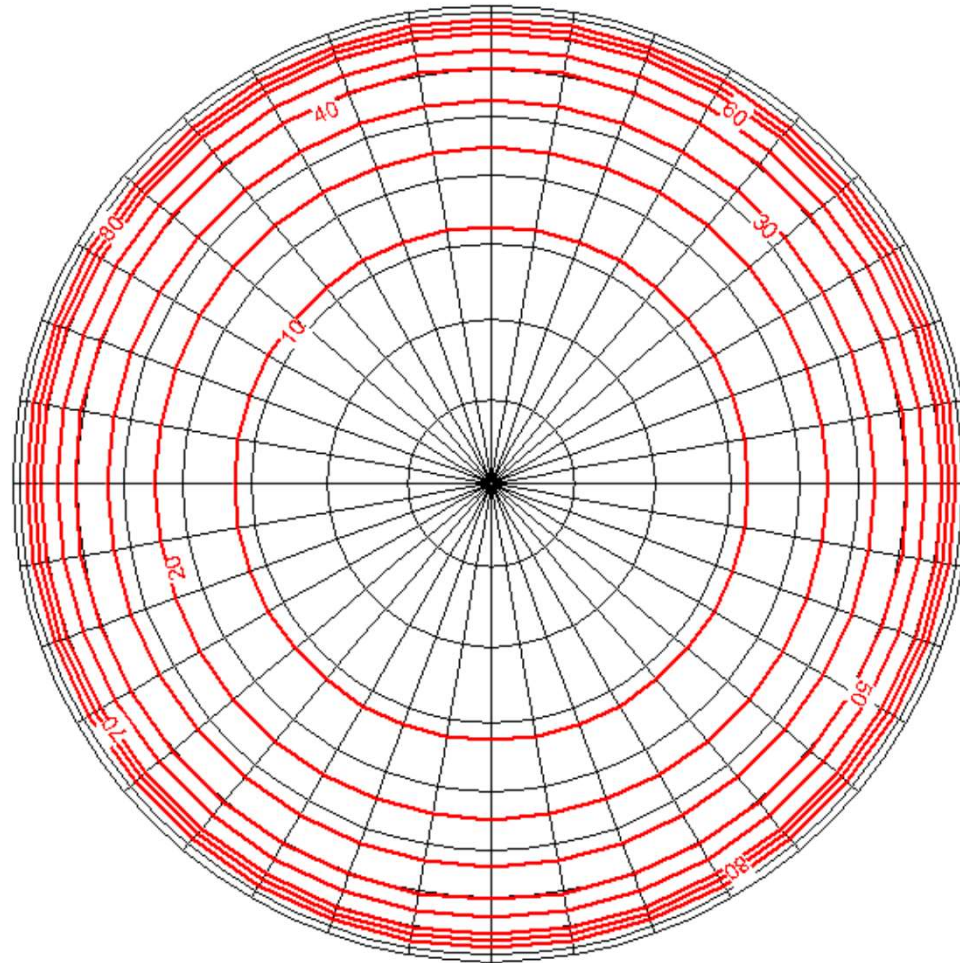
$$P = \frac{1}{\cos^4 \frac{\psi}{2}}$$



24. Stereografická projekce, normální poloha



25. Ukázka ekvideformát $\Delta\omega$ gnómonické projekce.

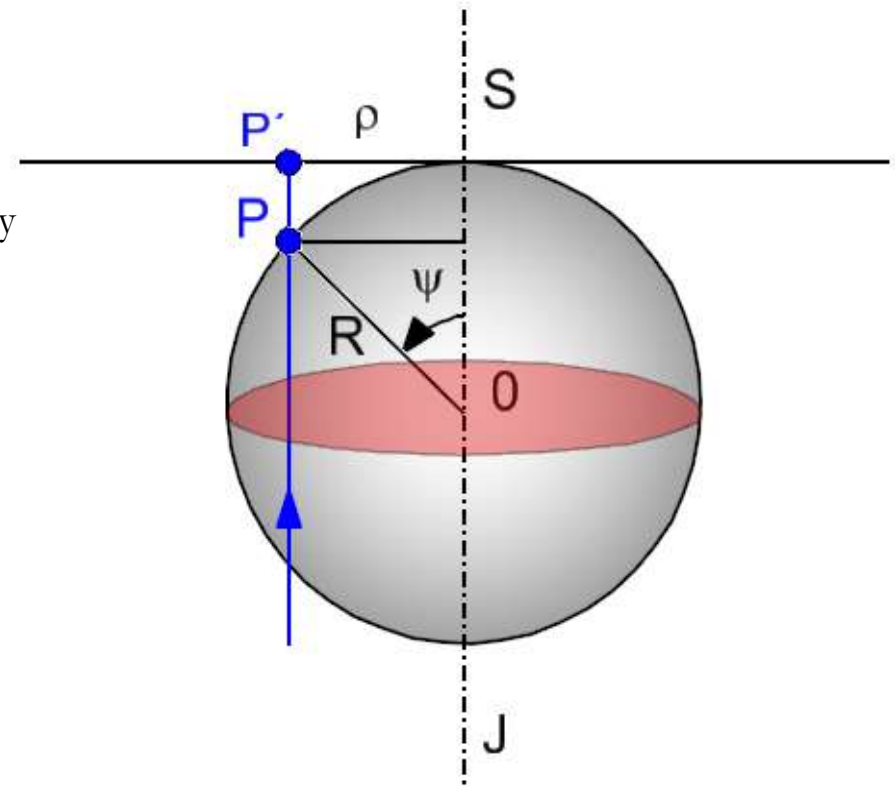


Geografická síť + ekvideformáty. Normální poloha, $u \in \langle 20^\circ, 90^\circ \rangle$..Ekvideformáty $\Delta\omega$, krok 10° , interval $\langle 0^\circ, 80^\circ \rangle$.

26. Ortografická projekce

Vlastnosti:

- ❑ Známa ve starém Řecku (Apollonius, 3. st. p.n.l).
- ❑ Střed promítání leží v nekonečnu.
- ❑ Je ekvidistantní v rovnoběžkách.
- ❑ Transverzální poloha: rovnoběžky úsečky, poledníky elipsy.
- ❑ Obecná poloha: poledníky i rovnoběžky elipsy.
- ❑ Poměrně často se používá.
- ❑ Představuje pohled na Zemi z vesmíru.
- ❑ Neznázorní Zemi jako celek, nejvýše hemisféru.



Zobrazovací rovnice:

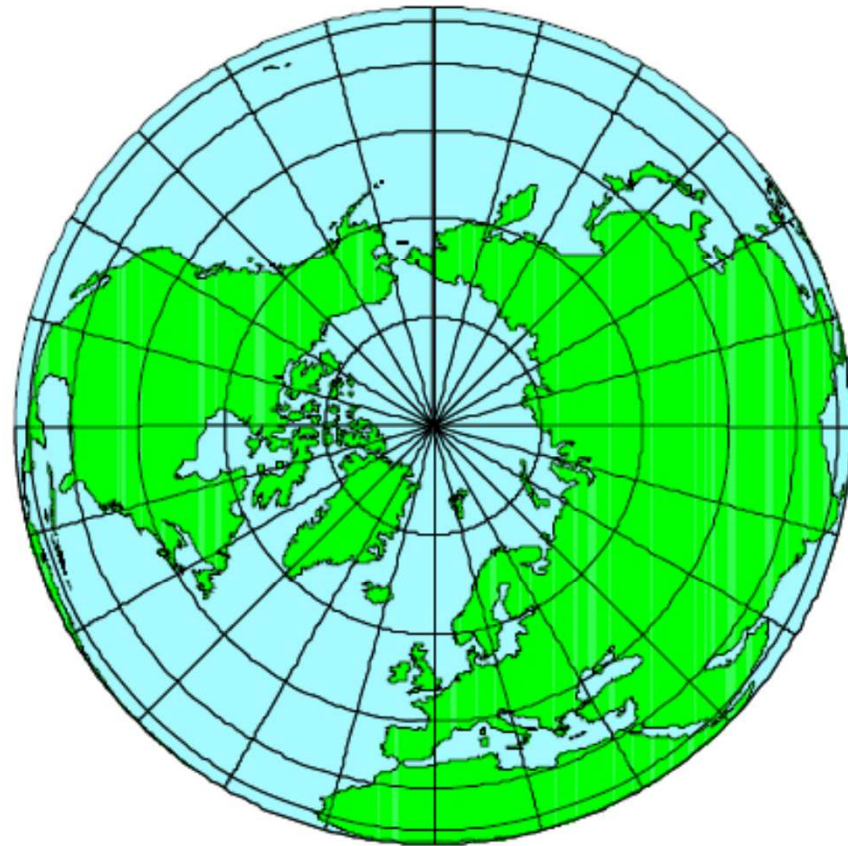
$$\rho = R \sin \psi$$

$$\varepsilon = \nu$$

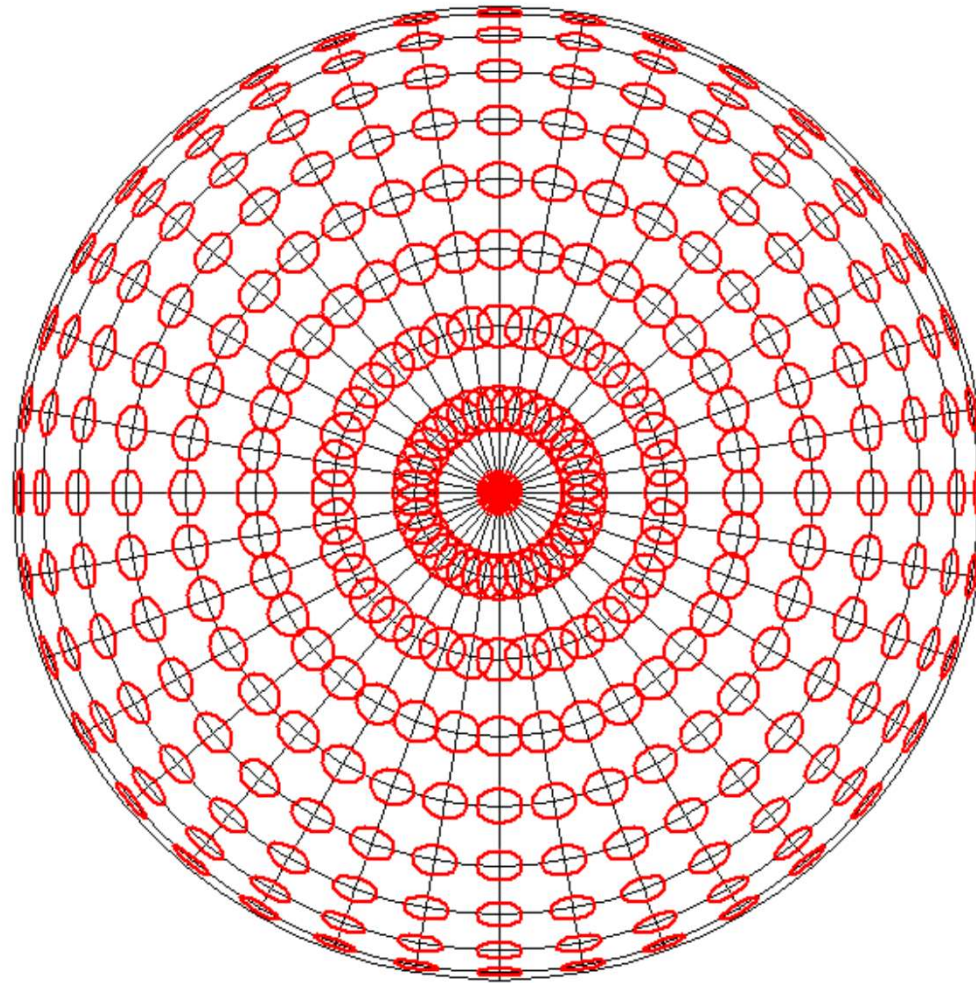
Kartografická zkreslení:

$$m_p = \cos \psi \quad m_r = 1 \quad P = \cos \psi \quad \sin \frac{\Delta \omega}{2} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\psi}{2} \right)$$

27. Ortografická projekce, normální a transverzální poloha



28. Ukázka Tissotových indikatrix ortografické projekce.



Geografická síť + Tissotovy indikatrix. Normální poloha, 1NR, $u \in \langle 20^\circ, 90^\circ \rangle$.

29. Externí projekce

Vlastnosti:

- ❑ Střed promítání leží mimo zemský povrch.
- ❑ Zobrazení zkresluje vše
- ❑ Použití: satelitní snímky (předpověď počasí)

Existuje několik variant externí projekce:

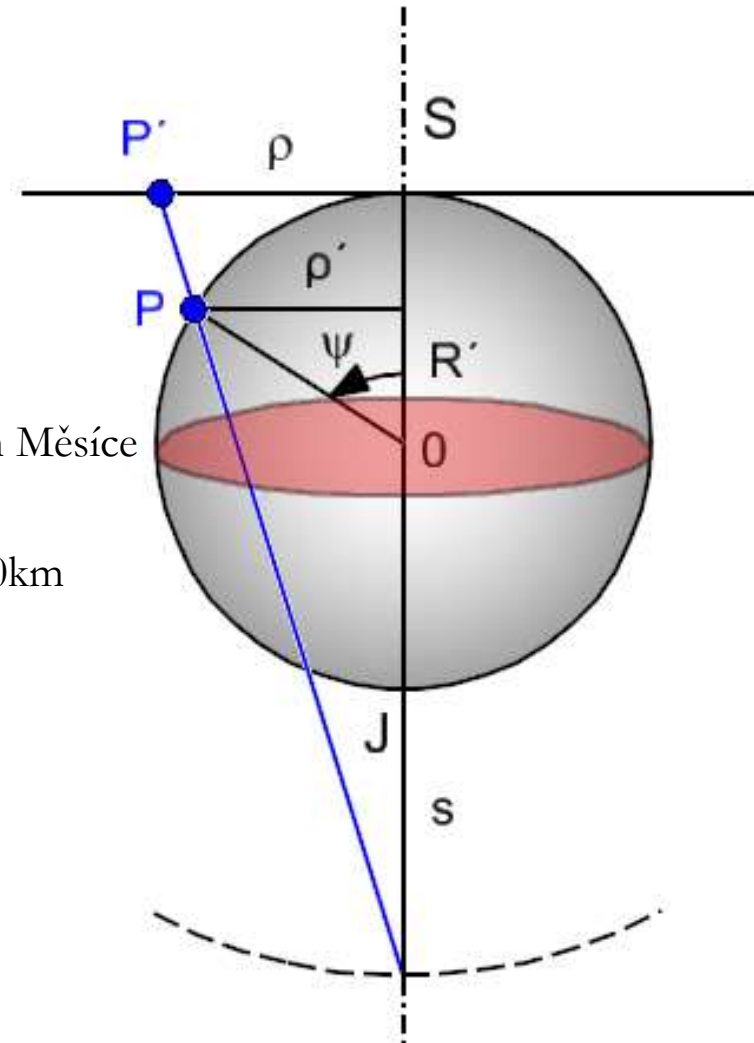
- ❑ Lunární projekce: střed promítání totožný se středem Měsíce
- ❑ Satelitní projekce:
 - Střed promítání leží ve vzdálenosti cca 30000km od Země=>odpovídá geostacionární dráze
 - Používána v transverzální poloze

Zobrazovací rovnice:

$$\frac{\rho}{2R+s} = \frac{\rho'}{R+R'+s}$$

$$\rho = \frac{(2R+s)\rho'}{R+R'+s} = \frac{(2R+s)s \sin \psi}{R+s \cos \psi + s}$$

$$\varepsilon = \nu$$



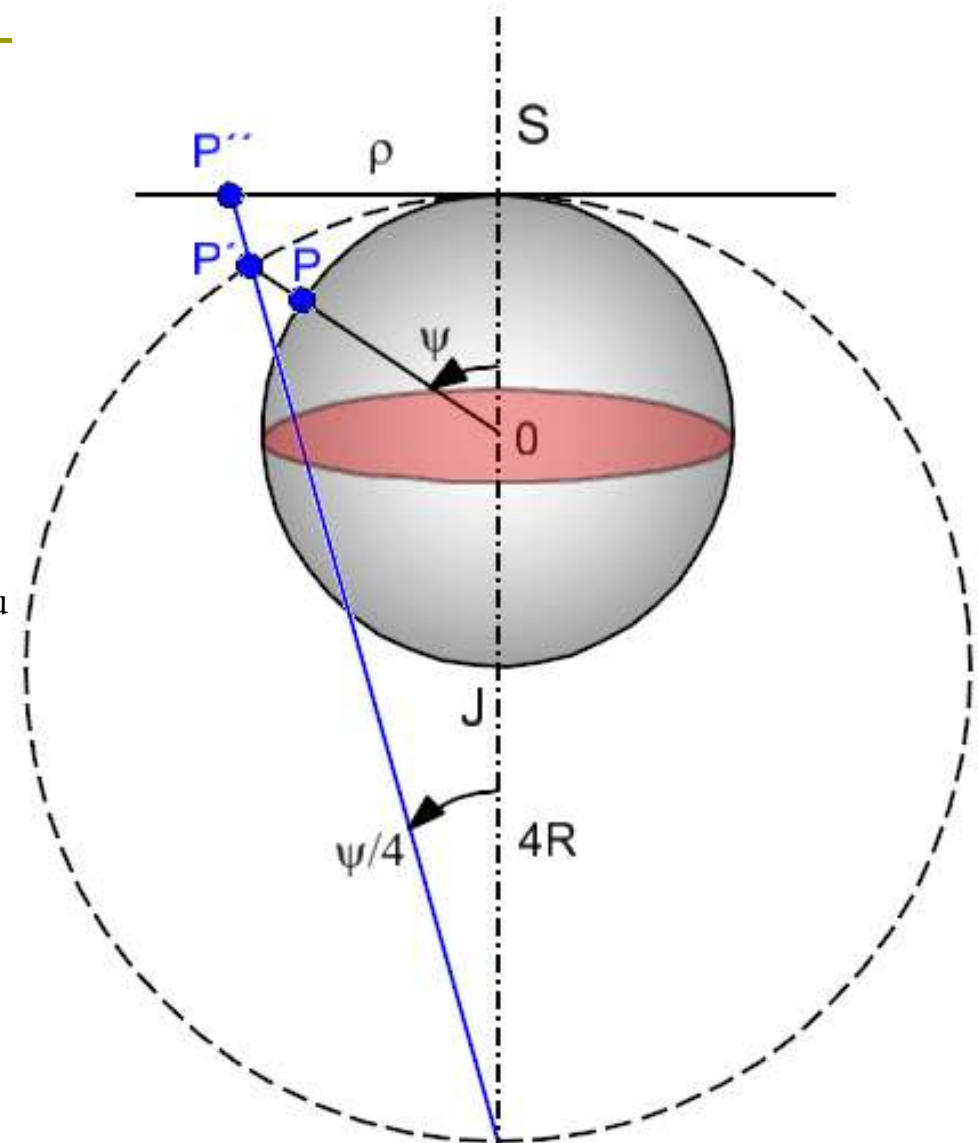
30. Dvojitá projekce

Vlastnosti:

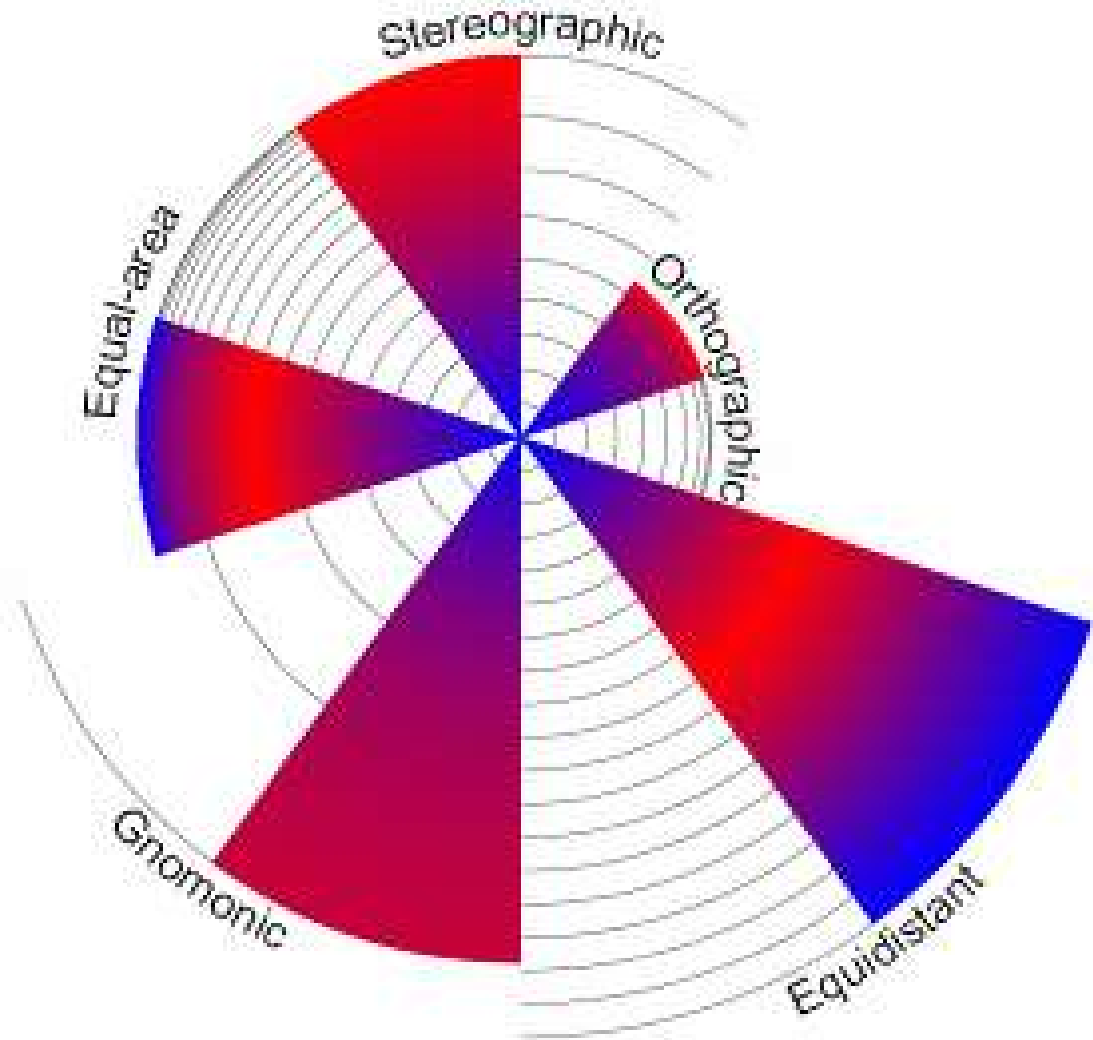
- tzv. Solovjevova projekce.
- V podstatě představuje dvojitou stereografickou projekci.
- Pomocná kružnice s poloměrem $2R$ se středem v antipólu.
- Střed promítání leží v antipólu pomocné kružnice.
- Bod nejprve stereograficky na pomocnou kružnici, poté stereograficky zobrazen do roviny.
- Zobrazení zkresluje vše, ale mnohem méně.
- Patří mezi kompenzační zobrazení.

$$\rho = 4R \operatorname{tg} \frac{\psi}{4}$$

$$\varepsilon = \nu$$



31. Srovnání azimutálních zobrazení



32. Zobrazení UPS

=Universal Polar Stereographic Projection

Vlastnosti:

- ❑ Zobrazení používané státy NATO pro znázorňování oblastí v okolí severního a jižního pólu.
- ❑ Severní polokoule: $\langle 84^\circ, 90^\circ \text{s.š.} \rangle$, jižní polokoule $\langle -80^\circ, -90^\circ \rangle \Rightarrow$ na jižní polouli zobrazuje větší území.
- ❑ Definováno v normální poloze.
- ❑ Použit elipsoid WGS-84.
- ❑ Délkové zkreslení na pólu: -6m/km , $1\text{NR } u_0 = 81^\circ 6' 52''$.
- ❑ Nezkreslená rovnoběžka na severní polokouli vně zobrazovaného území.
- ❑ Kombinováno se zobrazením UTM.

