

Matematické metody v kartografii

Polykónická zobrazení.
Polyedrická a neklasifikovaná
zobrazení.

(12)

1. Polykónická zobrazení

Polykónická = mnohokuželová.

Vznikla na přelomu 19-20 století.

Patří mezi ně i některá starší zobrazení, tzv. globulární (kruhová).

Označována jako modifikovaná polykónická.

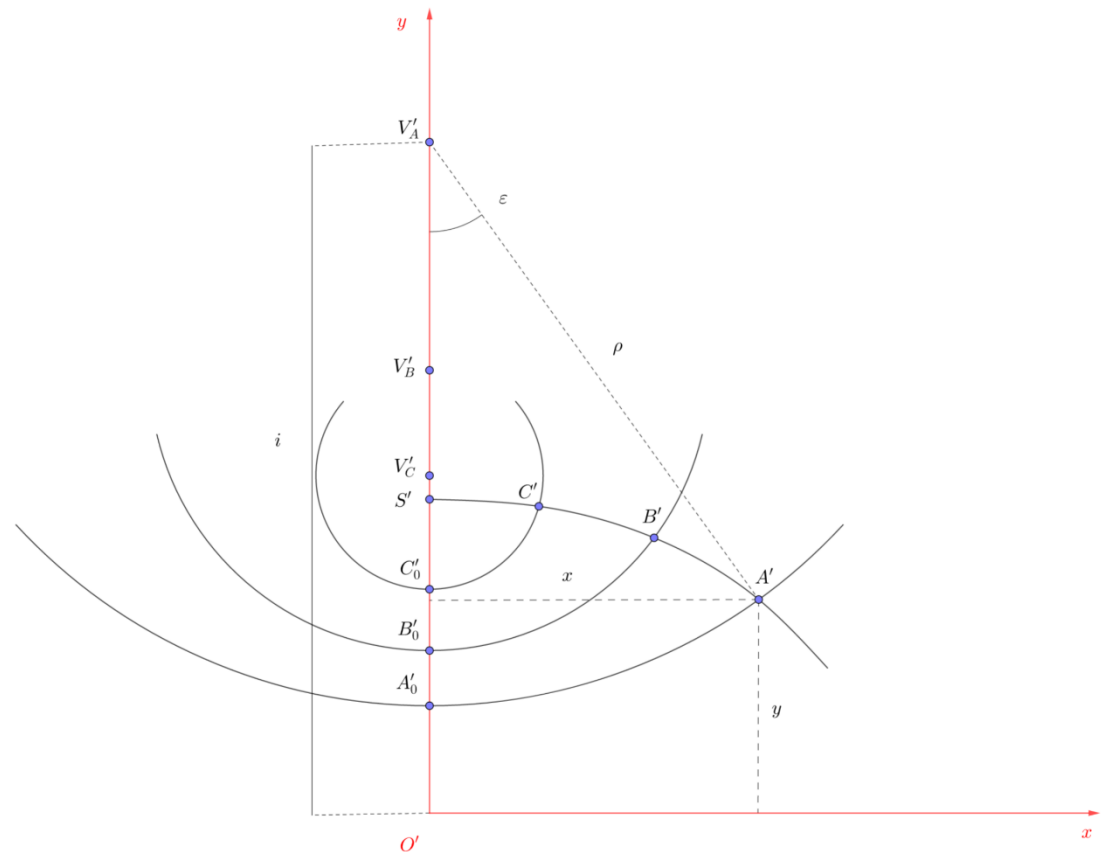
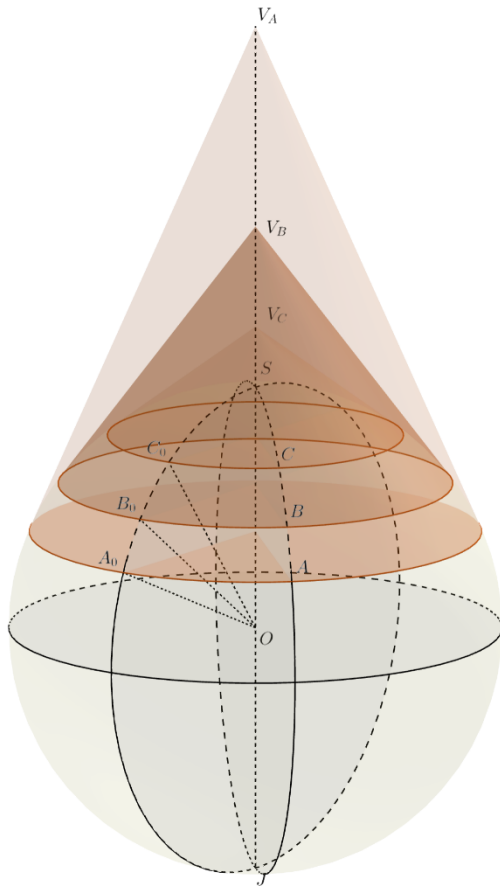
Společné vlastnosti:

- ❑ Zobecnění kuželových zobrazení, zobrazují na nekonečný počet tečných kuželů.
- ❑ Každá rovnoběžka používá vlastní tečný kužel.
- ❑ Obrazy rovnoběžek: kružnice, jejich středy leží na obrazu základního poledníku.
- ❑ Na rozdíl od nepravých kuželových nejsou soustředné.
- ❑ Obrazy poledníků: obecné křivky.
- ❑ Pól: zobrazí se jako bod
- ❑ Často ekvivalentní, mohou být konformní.

2. Princip polykónického zobrazení

Souřadnicový systém:

Osa x obrazem základního poledníku, počátek ve vzdálenosti i ,
Klasická orientace nebo x k S a y k V.



3. Zobrazovací rovnice

Nový parametr i : vzdálenost středu obrazu rovnoběžkové kružnice od počátku.

Hodnoty ρ a i jsou funkcí pouze u .

Hodnota ε funkcí u a v .

Lze chápat jako variantu nepravého zobrazení.

Zobrazovací rovnice, polární tvar:

Funkce $h(u)$ je konstantní pro všechny body na jedné rovnoběžce.

$$\rho = f(u)$$

$$i = g(u)$$

$$\varepsilon = h(u)v$$

Zobrazovací rovnice, pravoúhlý tvar

Podobnost s kuželovými zobrazeními.

Hodnota ρ_0 nahrazena i , není však konstantou.

$$x = i - \rho \cos \varepsilon$$

$$y = \rho \sin \varepsilon$$

4. Kartografická měřítka a zkreslení

Měřítka délek v poledníku:

$$m_p^2 = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}{R^2}$$

Měřítka délek v rovnoběžce:

$$m_r^2 = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2}{R^2 \cos^2 u}$$

Měřítka ploch:

$$P = m_p m_r \sin \omega'$$

Maximální úhlové zkreslení:

$$\sin \frac{\Delta \omega}{2} = \frac{|b - a|}{b + a}$$

Parciální derivace

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} = \frac{\partial i}{\partial u} - \frac{\partial \rho}{\partial u} \cos \varepsilon + \rho \sin \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial u},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} = \frac{\partial \rho}{\partial u} \sin \varepsilon + \rho \cos \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial u},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} = \rho \sin \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial v},$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} = \rho \cos \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial v}.$$

5. Polykónické ekvidistantní zobrazení

tzv. Hasslerovo zobrazení.

Autorem Rudolf Hassler, 1. ředitel USGS.

Vlastnosti:

- Ekvidistantní v rovnoběžkách.
- Nezkreslený základní poledník a rovník.
- Pól se zobrazí jako bod.
- Zobrazení připomíná rozříznuté jablko
- Okrajové části: velké zkreslení, nevhodné pro zobrazení celé Země.
- Použito v USA pro hydrologické mapy.

Zobrazovací rovnice:

$$\rho = R \cotg u$$

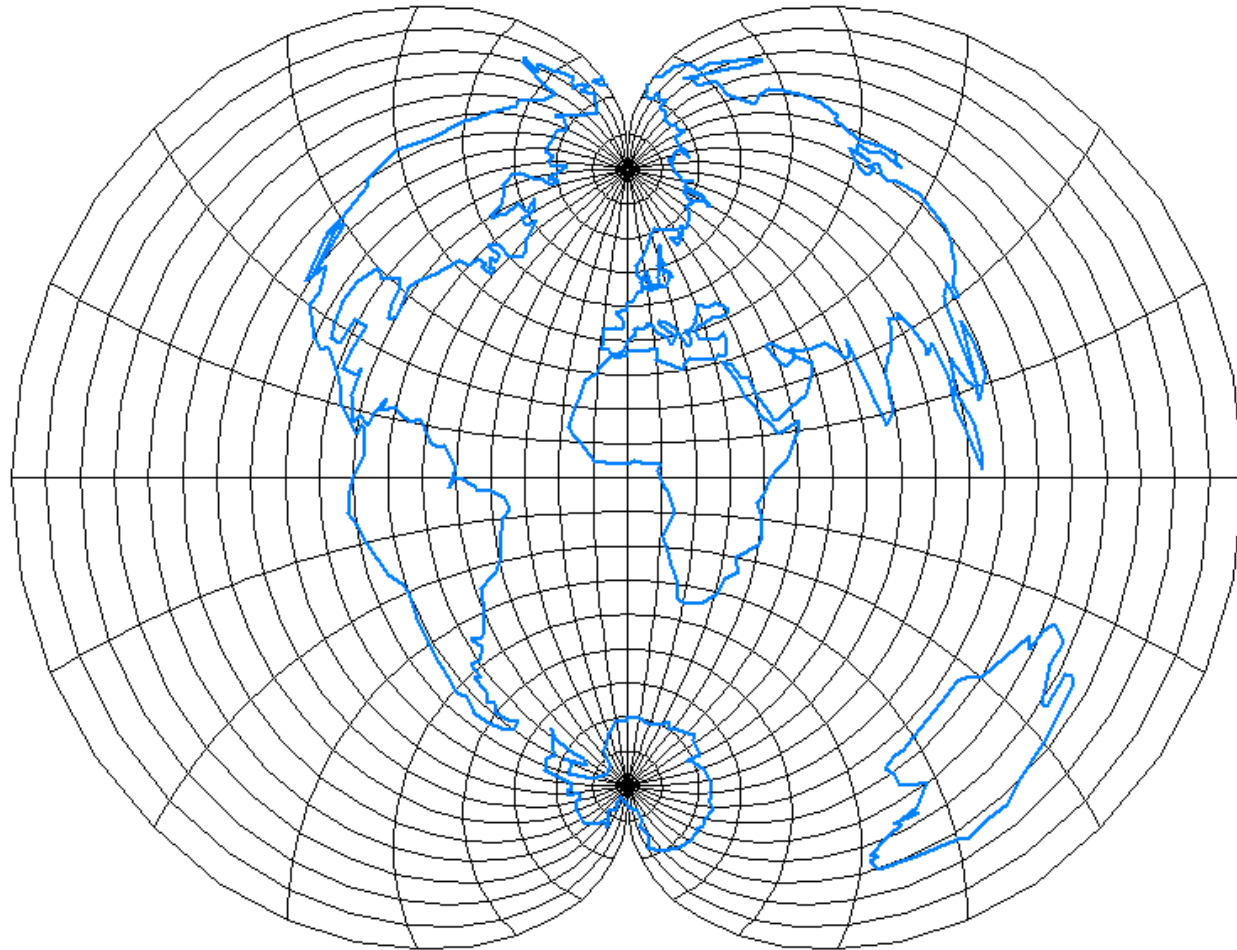
$$i = \rho + Ru$$

$$\varepsilon = v \sin u$$

$$x = R \cotg u (1 - \cos(v \sin u)) + Ru$$

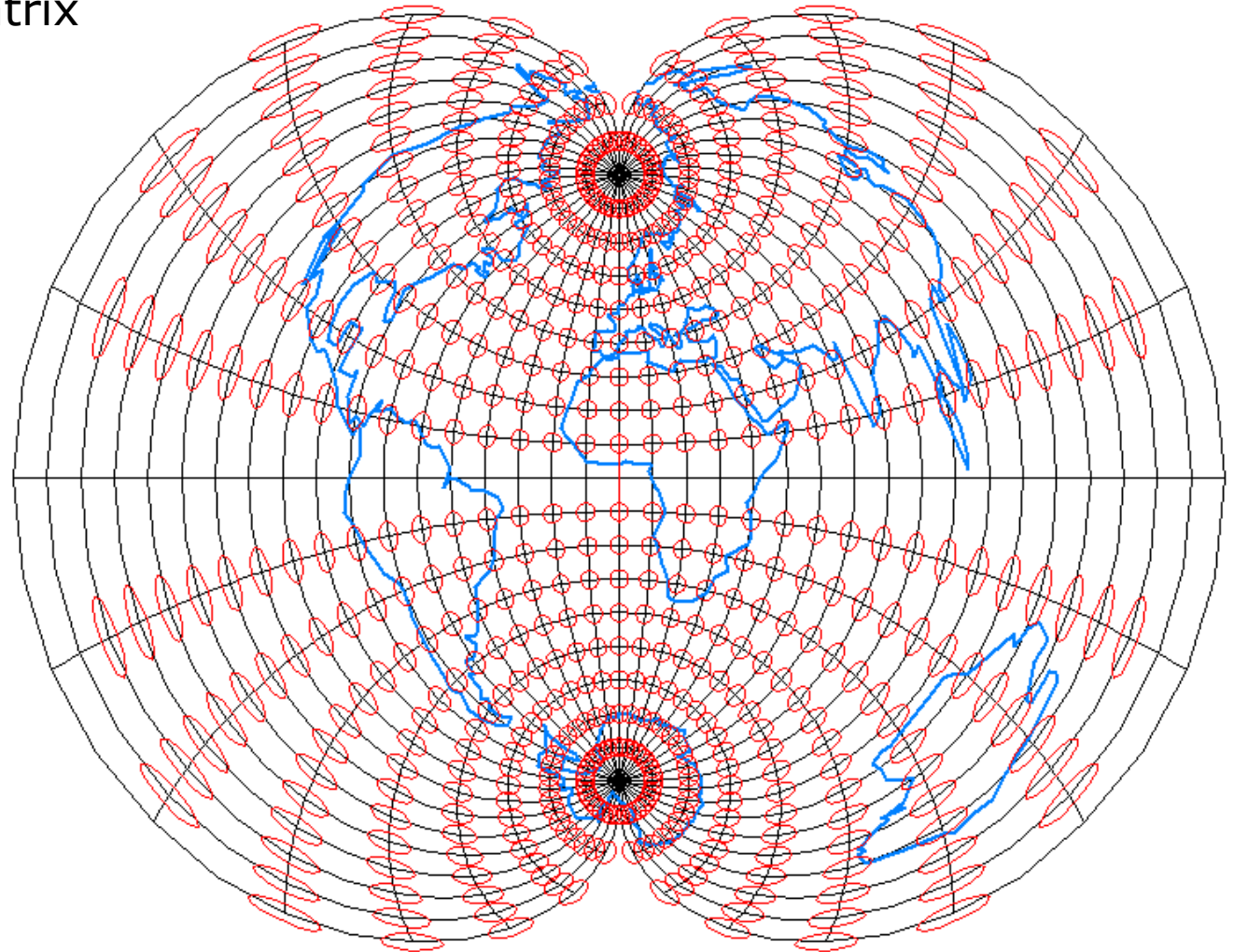
$$y = R \cotg u \sin(v \sin u)$$

6. Hasslerovo zobrazení



7. Hasslerovo zobrazení

Tissotovy indikatrix



8. Kruhová zobrazení

Označována jako modifikovaná polykónická.
Nazývána jako globulární (obraz hemisféry připomíná globus).

Společné vlastnosti:

- ❑ Síť poledníků/rovnoběžek tvořena pouze kruhovými oblouky.
- ❑ Středy rovnoběžkových oblouků v pólech.
- ❑ Vycházejí z polykónických zobrazení.
- ❑ Často vznikají konstrukční cestou.
- ❑ Nevýhodou: velká zkreslení v polární oblastech
- ❑ V praxi se nepoužívají.
- ❑ Mohou být i konformní.

Obraz pólu:

- ❑ Bod.

Zástupci:

- ❑ Van der Grintenovo zobrazení (I-V).
- ❑ Lagrangre-Lambertovo zobrazení.
- ❑ Apianovo zobrazení.
- ❑ Nicolosiho zobrazení.
- ❑ Fournierovo zobrazení.

9. Van der Grintenovo zobrazení I.

Vlastnosti:

- ❑ Vzniká geometrickou cestou.
- ❑ Zeměpisná síť tvořena kruhovými oblouky.
- ❑ Obvodová kružnice: $r = \pi R$.
- ❑ Nezkreslený rovník.
- ❑ Rovnoběžky mají na základním poledníku konstantní rozestupy.

Zobrazuje:

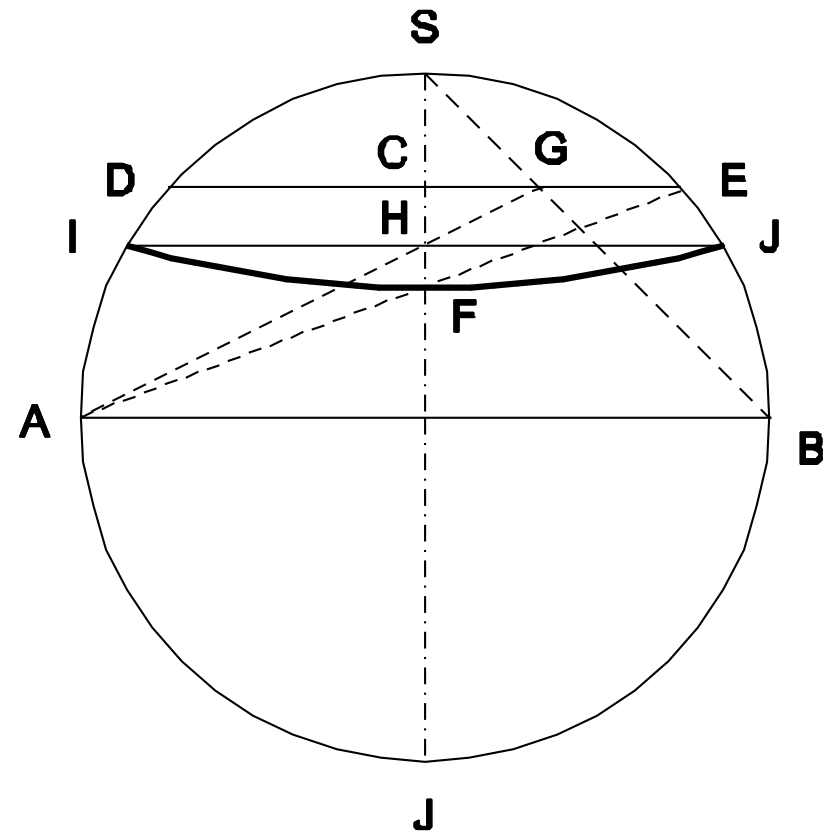
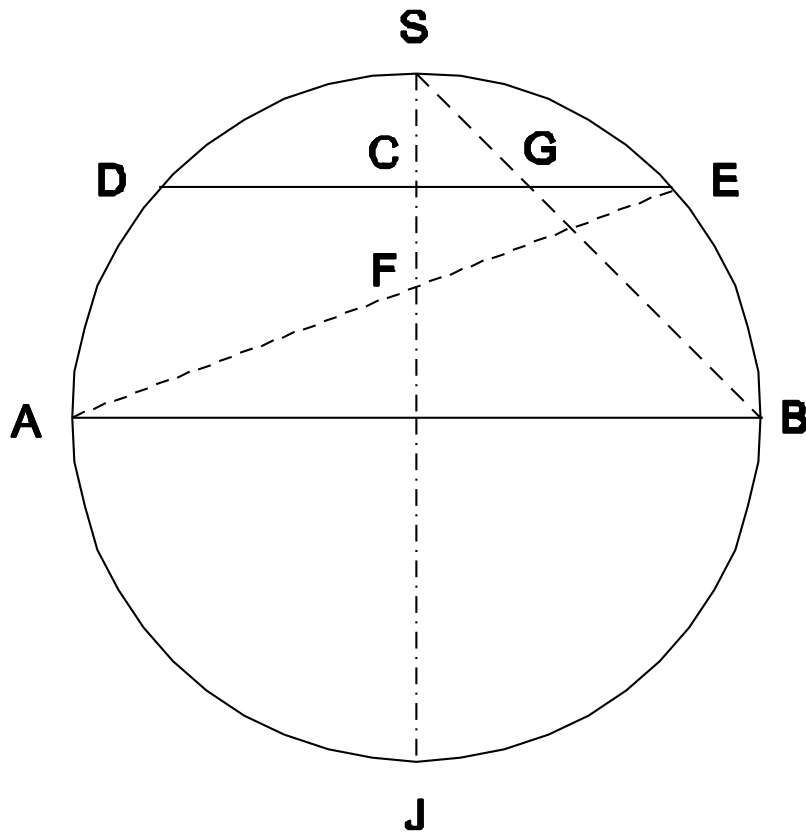
Celý svět do kružnice.

70% světa do kružnice (bez zkreslených oblastí), zbytek jablíčko.

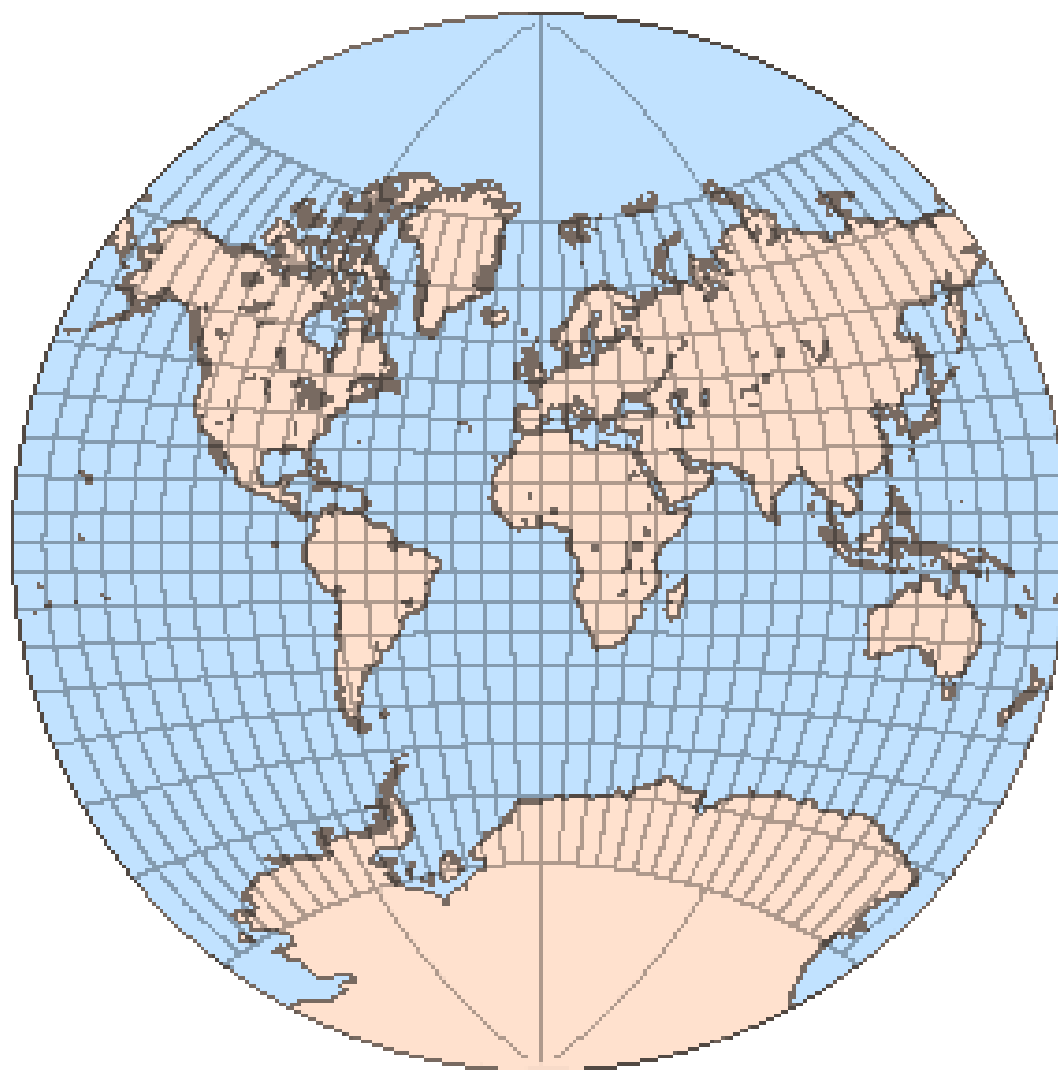
Postup konstrukce

- 1) Volba rovnoběžky u .
- 2) Konstrukce rovníku (A-B).
- 3) Rozdělení základního poledníku na stejně dlouhé úseky (C).
- 4) Konstrukce rovnoběžky (D-E).
- 5) Spojení E-A, průsečík S-J a E-A bod F rovnoběžky.
- 6) Spojení S-B, průsečík S-B a S-E bod G.
- 7) Spojení A-G, průsečík A-G a S-J bod.
- 8) Rovnoběžka s DE jdoucí H protne obvodovou kružnici, body I, J.

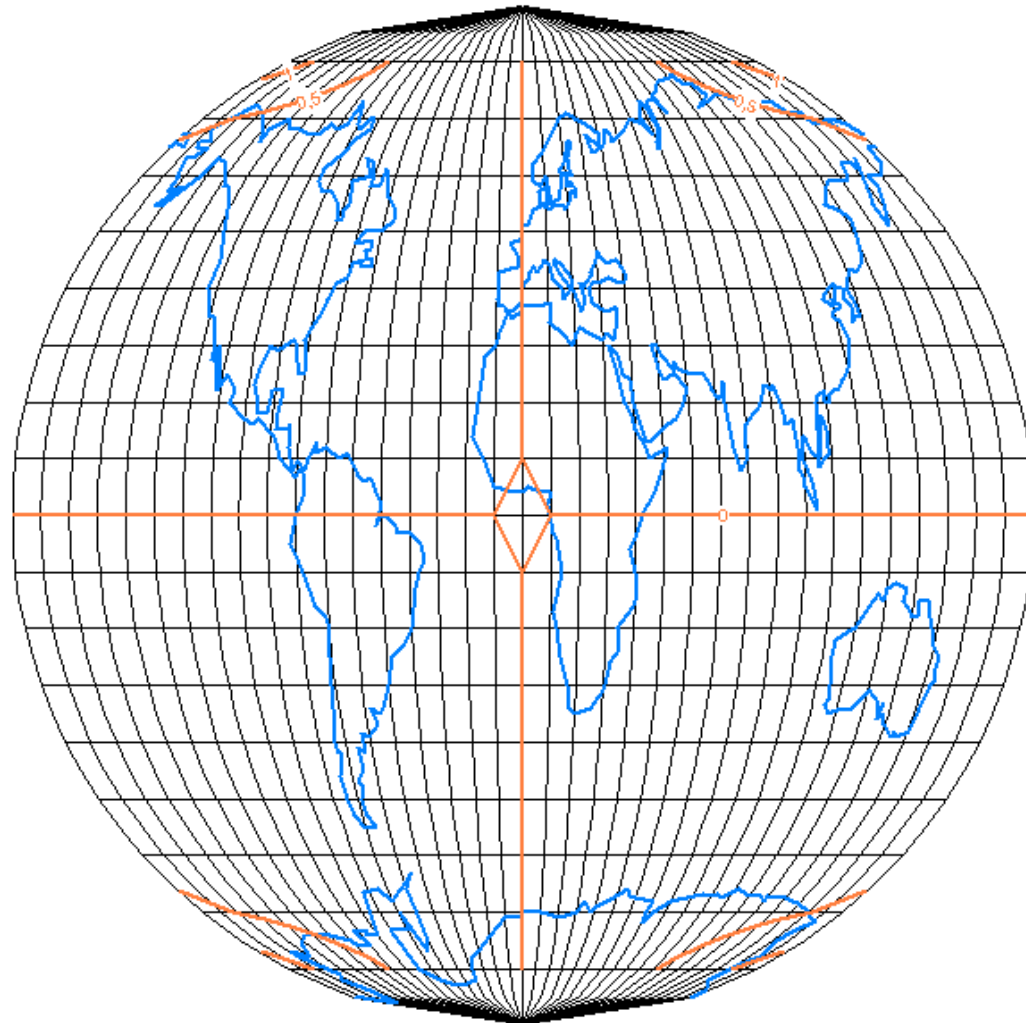
10. Grintenovo zobrazení, konstrukce



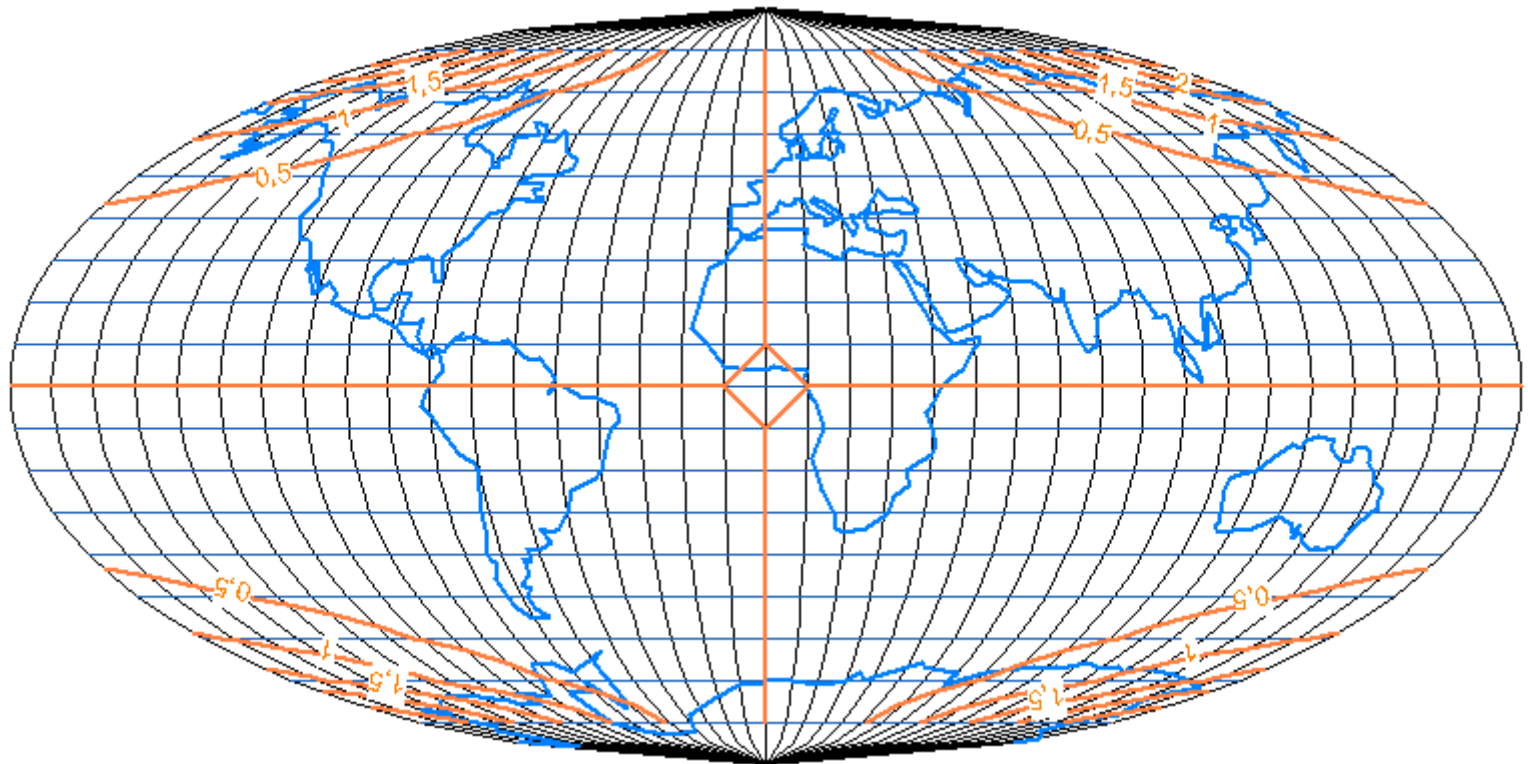
11. Grintenovo zobrazení I.



12. Apianovo kruhové zobrazení



13. Apianovo zobrazení (eliptické)



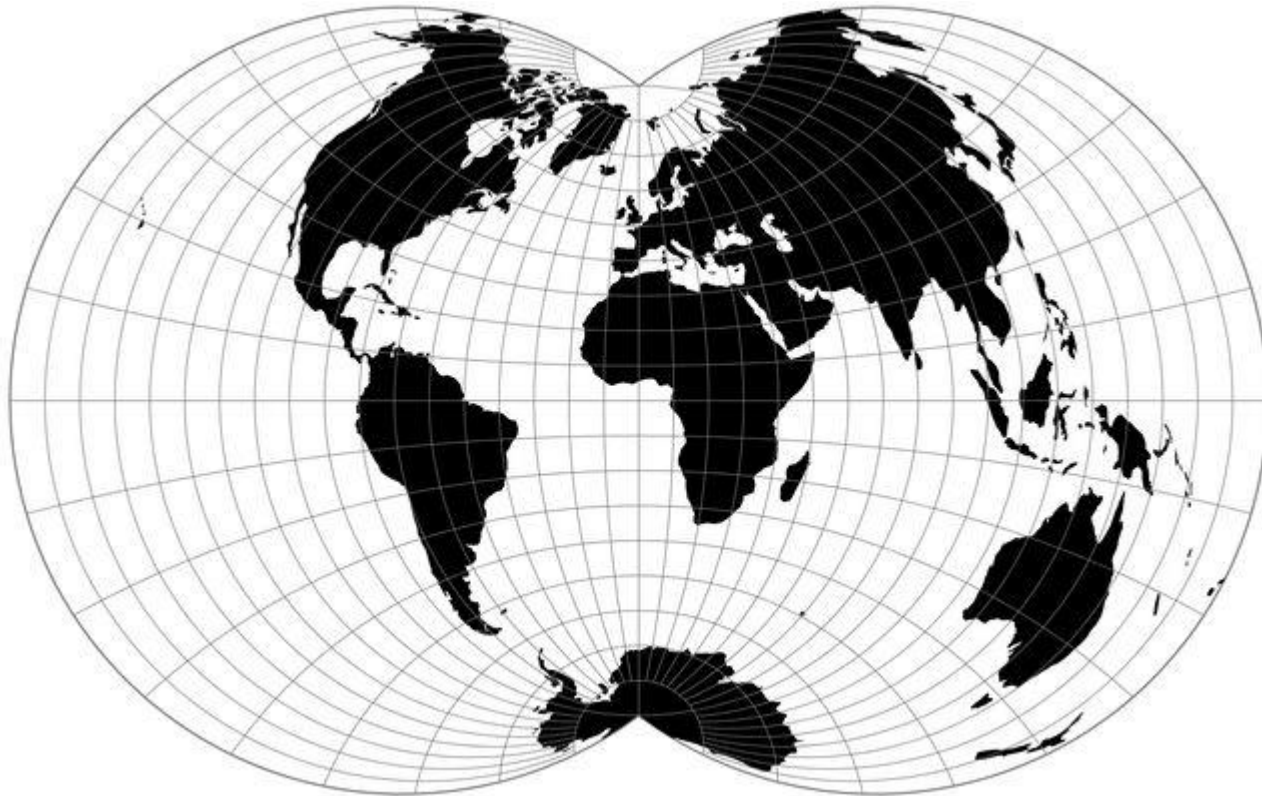
14. Lambert-Lagrangeovo zobrazení

- ❑ Vzniká geometrickou cestou, tj. konstrukcí.
- ❑ Konformní.
- ❑ Obvodová kružnice: $r=4R$
- ❑ Používáno pro mapy světa.
- ❑ Velká zkreslení v polárních oblastech.
- ❑ Používáno v carském Rusku na zač. 20. století.
- ❑ Dlouhou dobu jediné konformní zobrazení znázorňující celý svět.



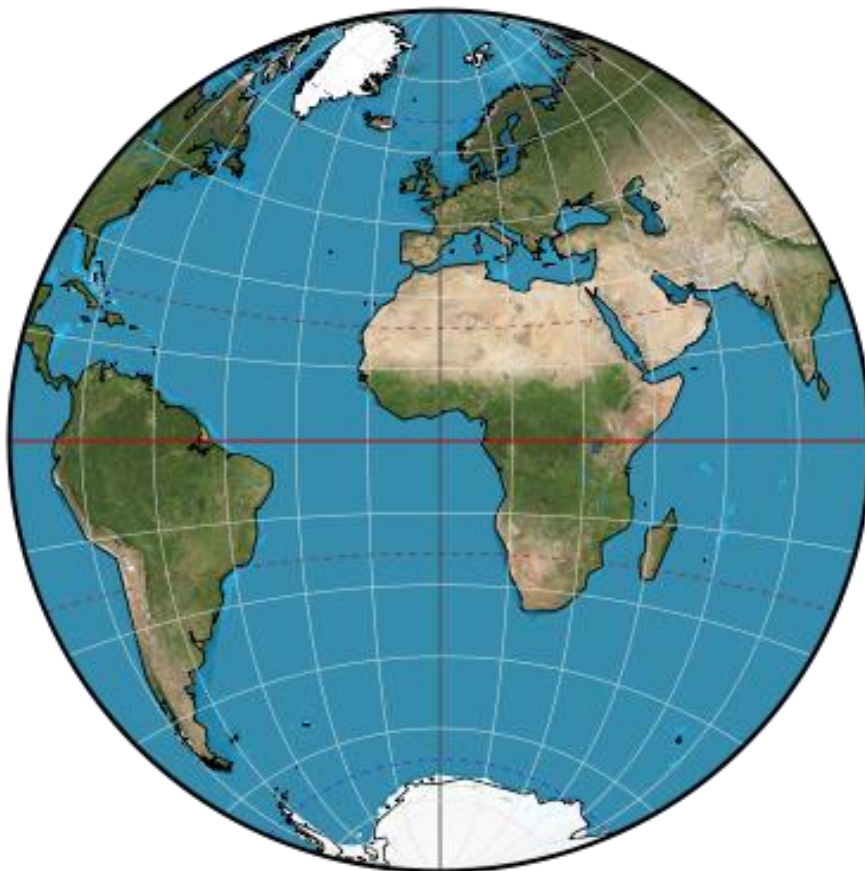
15. Nicolosiho zobrazení

- Autorem perský matematik a geograf Al Biruni (1000 n.l.).
- Znovu objeveno 1660, italský kněz G. Nicolosi.
- Vše zkresluje.



16. Fournierovo zobrazení

Autorem francouzský jezuita G. Fournier (1643).
Obraz geografické sítě podobný Nicolosiho zobrazení.
Zkresluje vše.



15. Polyedrická zobrazení

Zobrazení na mnohostěh.

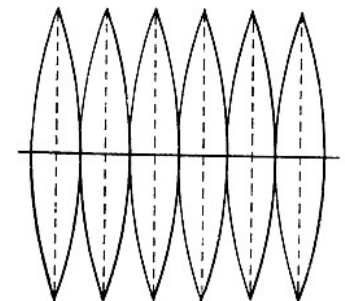
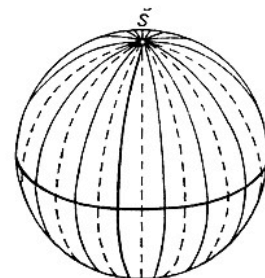
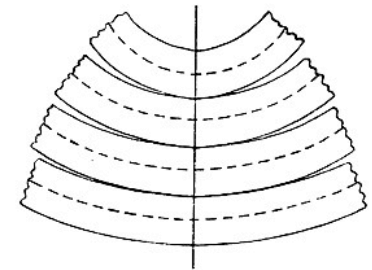
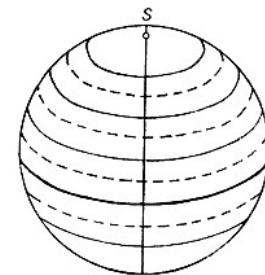
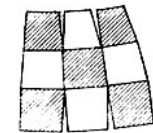
Použití u velkých území, kde nelze dodržet požadavky na minimální zkreslení.

Společné vlastnosti:

- Vznikají kombinací 1 nebo více zobrazení.
- Používají se pro zobrazení velkých území „po částech“.
- Snaha o zmenšení vlivu zkreslení.
- Každá část zobrazena samostatně, vlastní souřadnicový systém.
- Výhoda: snížení vlivu zkreslení.
- Nevýhoda: takto zobrazené části nelze spojit v jeden celek: vznik spár či překrytů.

Dělení polyedrických zobrazení:

- Zobrazení koule na krychli nebo mnohostěh.
- Kompozitní zobrazení.
- Zobrazení poledníkových pásů (G/K, C/S, UTM).
- Zobrazení rovnoběžkových pásů.
- Zobrazení sférických lichoběžníků (3. voj. map.).



16. Polyedrická zobrazení sférických lichoběžníků

Topografické mapy Rakouska-Uherska

3. vojenské mapování.

Měřítko map: 1:75 000 (speciální mapa).

Mapový list: obraz sférického lichoběžníku o rozměrech 15'x30'

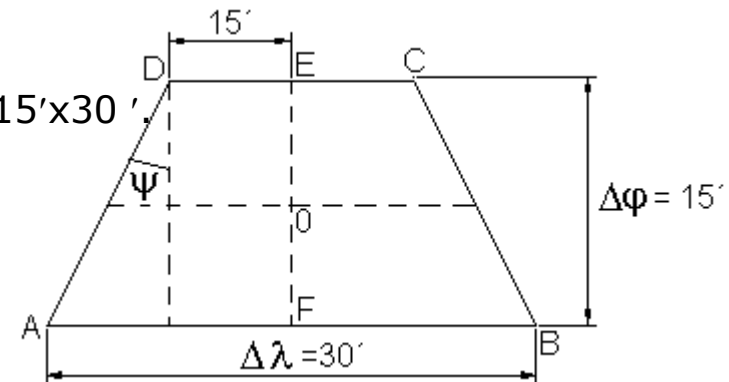
Nezkreslený střední poledník, představován úsečkou.

Nezkreslené okrajové rovnoběžky.

Úhel ψ značně velký: 11'30''.

Rozdíl v délkách úhlopříček A-E a DF: 50 m

Použité zobrazení: podobné Mercator-Sansonovu.



Nevýhoda:

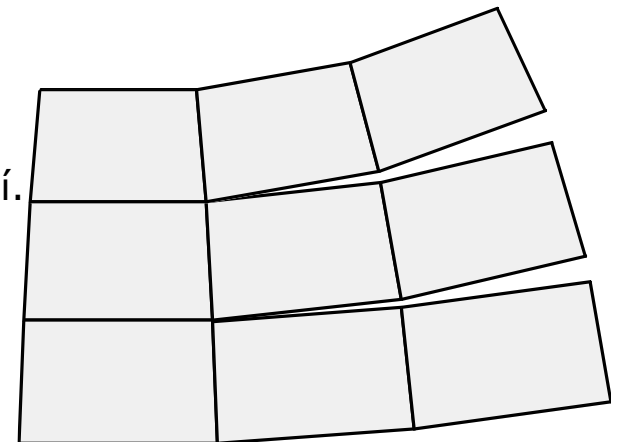
Skládání mapových listů: mezery cca 0.7 mm.

Nelze vytvořit souvislý obraz území.

Z kartografického hlediska horší než 2. vojenské mapování.

Obtížné georeferencování ML: elastická transformace.

Postihuje i odvozené mapy, měřítko 1:25 000.



17. Polyedrická zobrazení sférických lichoběžníků

Mezinárodní mapa světa 1:1000000

Mapový list: obraz sférického lichoběžníku o rozměrech $6^\circ \times 4^\circ$.

Celkem 60 pásů.

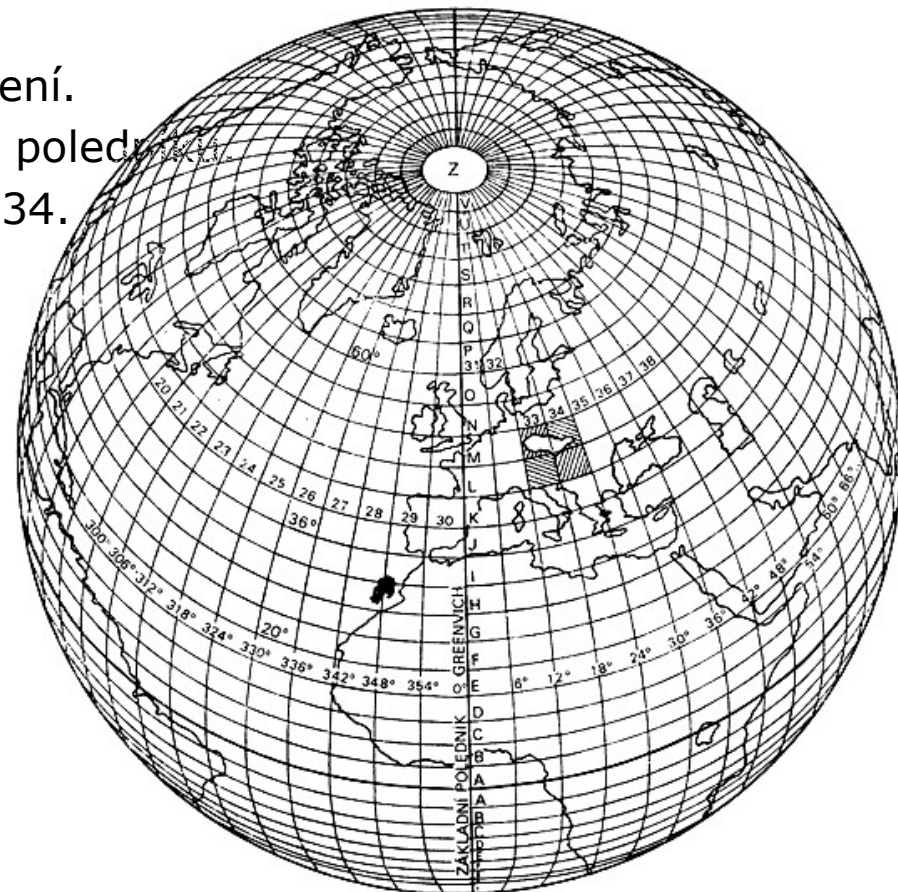
Práce začaly v roce 1909, nedokončena

Použito modifikované polykónické zobrazení.

2 nezkreslené poledníky $\pm 2^\circ$ od středního poled.

Československo se nacházelo v: M/N-33/34.

Na styku mapových listů docházelo ke vzniku spár.



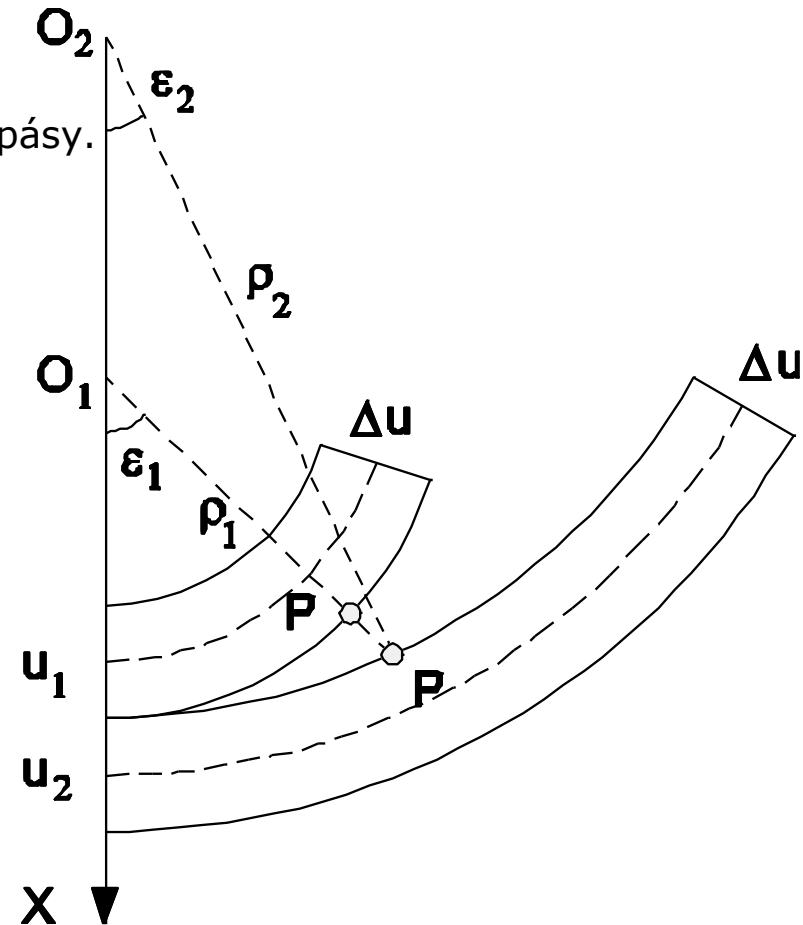
18. Polyedrická zobrazení rovnoběžkových pásů.

Kuželové konformní zobrazení: ČSR

Alternativní návrh Ing. Josefa Křováka pro ČSR.
Rozdělení území Československa na 2 rovnoběžkové pásy.
Používalo 2 tečné kužely.
Mezi kuželami vznikaly mezery, spáry.
Nerealizovalo se.

Letecké navigační mapy 1:50000

Jednotné pro státy NATO.
Pouze pro vojenské účely.
Používají Lambertovo kuželové konformní zobrazení.
Definováno pro Hayfordův elipsoid.
Šířka pásů: 4° .
Max. hodnota zkreslení 30cm/km.



19. Neklasifikovaná zobrazení

Velká skupina nových zobrazení (2. nejpočetnější), většina vznikla až ve 20. století.

Neexistuje jednotná teorie pro jejich odvození.

Nemají geometrickou interpretaci.

Zobrazovací rovnice funkcí u i v

$$\begin{aligned}x &= f(u, v), \\y &= g(u, v).\end{aligned}$$

Poledníky i rovnoběžky obecné křivky vyšších stupňů.

Většina z nich je konformních, popř. vyrovnávací.

Mnoho zástupců, v praxi se však používají pouze některé z nich.

Většinou složité zobrazovací rovnice.

Největší význam mají konformní zobrazení znázorňující celý svět (pouze některá).

Používány v atlasové kartografii, mapy planisfér / hemisfér.

Příznivé charakteristiky zkreslení, avšak nepřírozený obraz světa.

Některá navržena pro minimalizaci zkreslení.

Některá definovány nad tělesem komplexních čísel, složité zobrazovací rovnice.

Nejznámější zástupci:

Littrowovo, Eisenlohrovo, Peircovo, Augustovo, Guyou, Adamsovo, Armadillo.

20. Littrowovo zobrazení

Autor rakouský astronom Joseph J. von Littrow (1833).

Ředitel vídeňské astronomické observatoře (narozen v Horšovském Týně, 1781).

Studoval na UK, právnická a teologická fakulta.

Konformní zobrazení, zobrazí pouze část zemského povrchu.

Obraz poledníků: konfokální hyperboly.

Obraz rovnoběžek: konfokální elipsy.

V praktické kartografii nemá význam.

$$x = R \operatorname{tg} u \cos v.$$

$$y = R \frac{\sin v}{\cos u}.$$



Počáteční/koncový azimuty ortodromy nezkresleny.

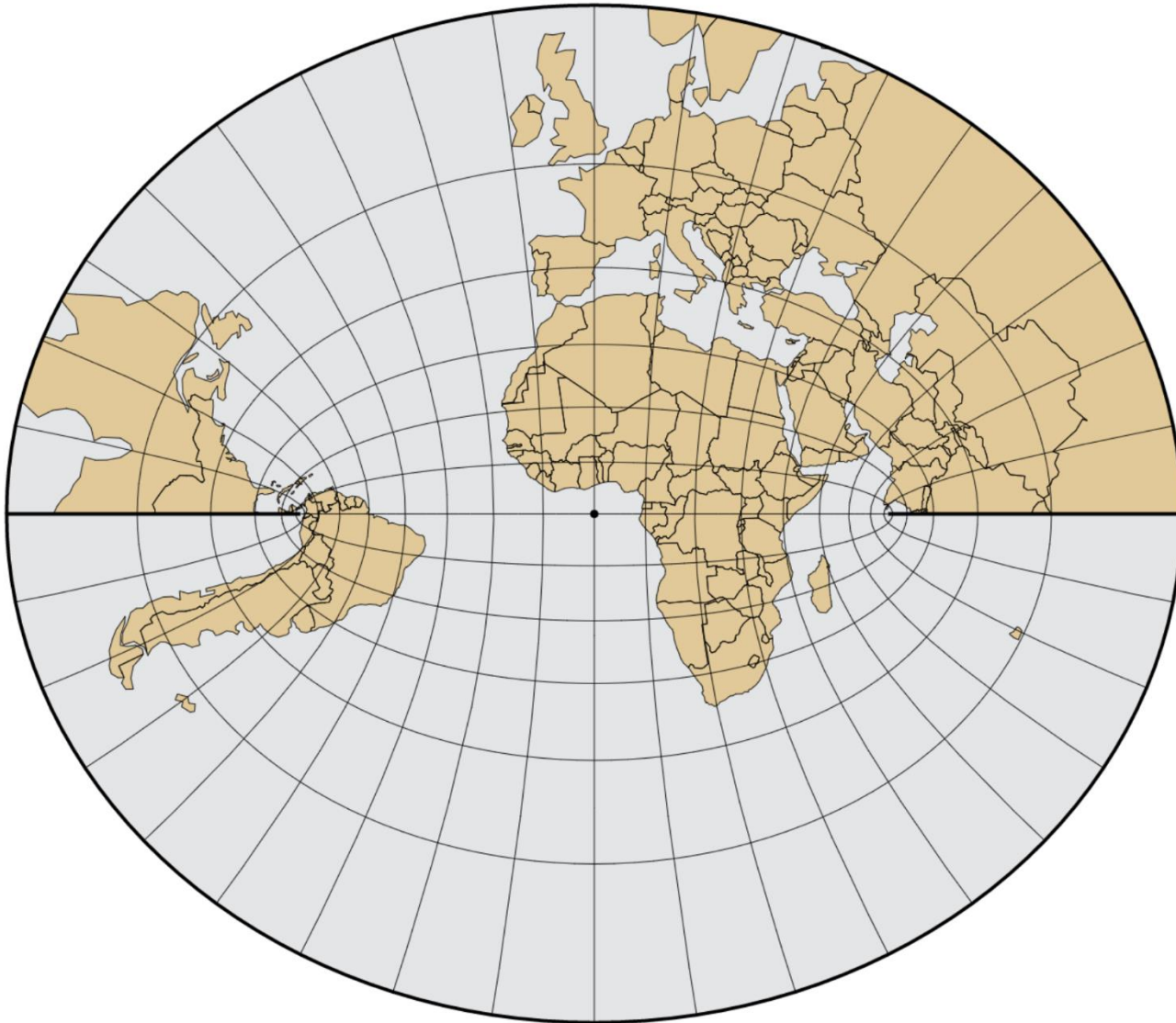
Ortodroma není úsečka, ale obecná křivka.

Taková zobrazení nazýváme **retroazimutální**.

Další zástupci:

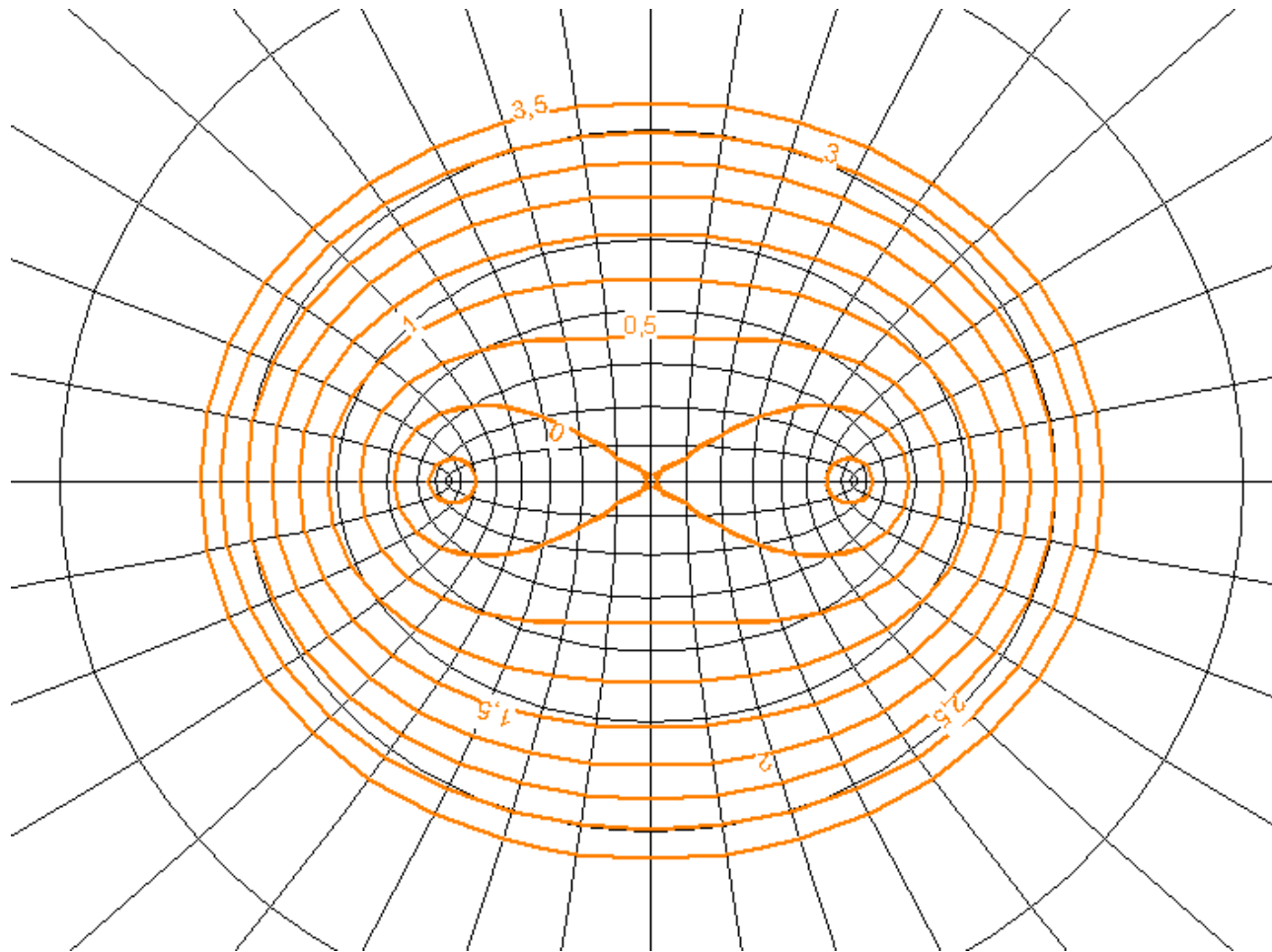
- Craigovo retroazimutání.
- Hammerovo retroazimutální.

21. Littrowovo zobrazení, geogr. síť

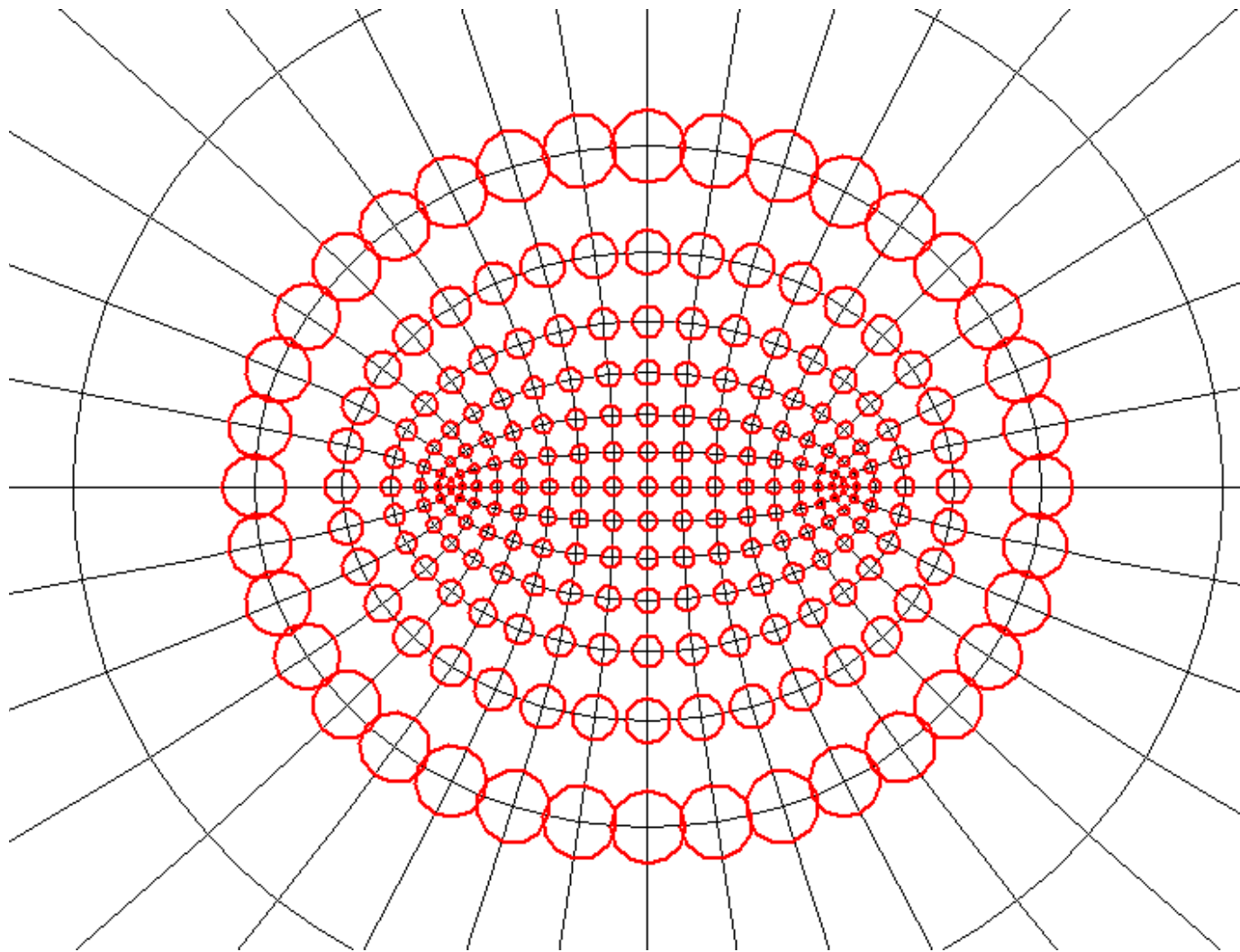


22. Littrowovo zobrazení, ekvideformáty

Ekvideformáty $m_p - 1$, krok 0.5.



23. Littrowovo zobrazení, Tissotovy elipsy



24. Craigovo retroazimutální zobrazení

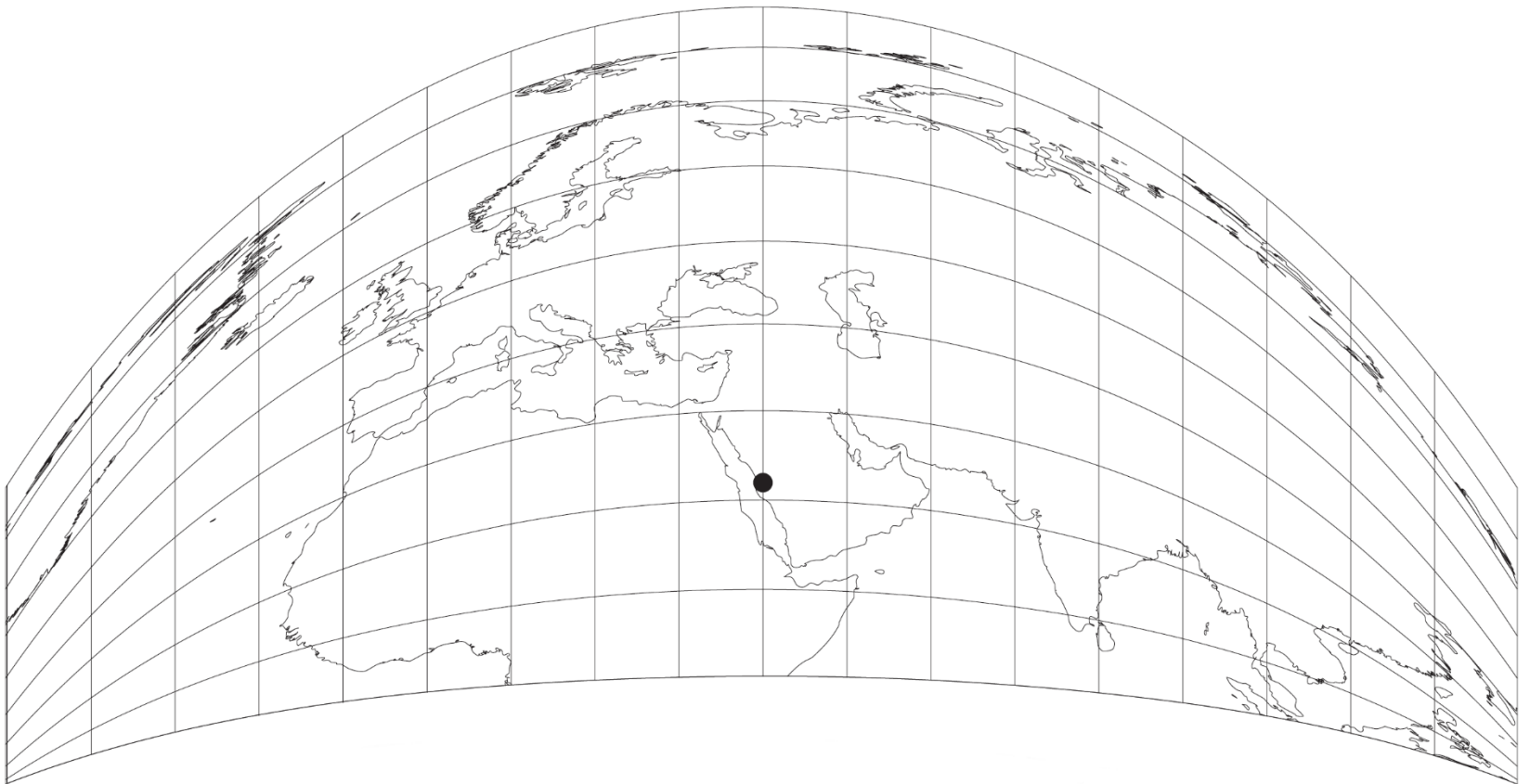
Autorem skotský matematik J. I. Craig (1909).

Nezobrazí planisféru.

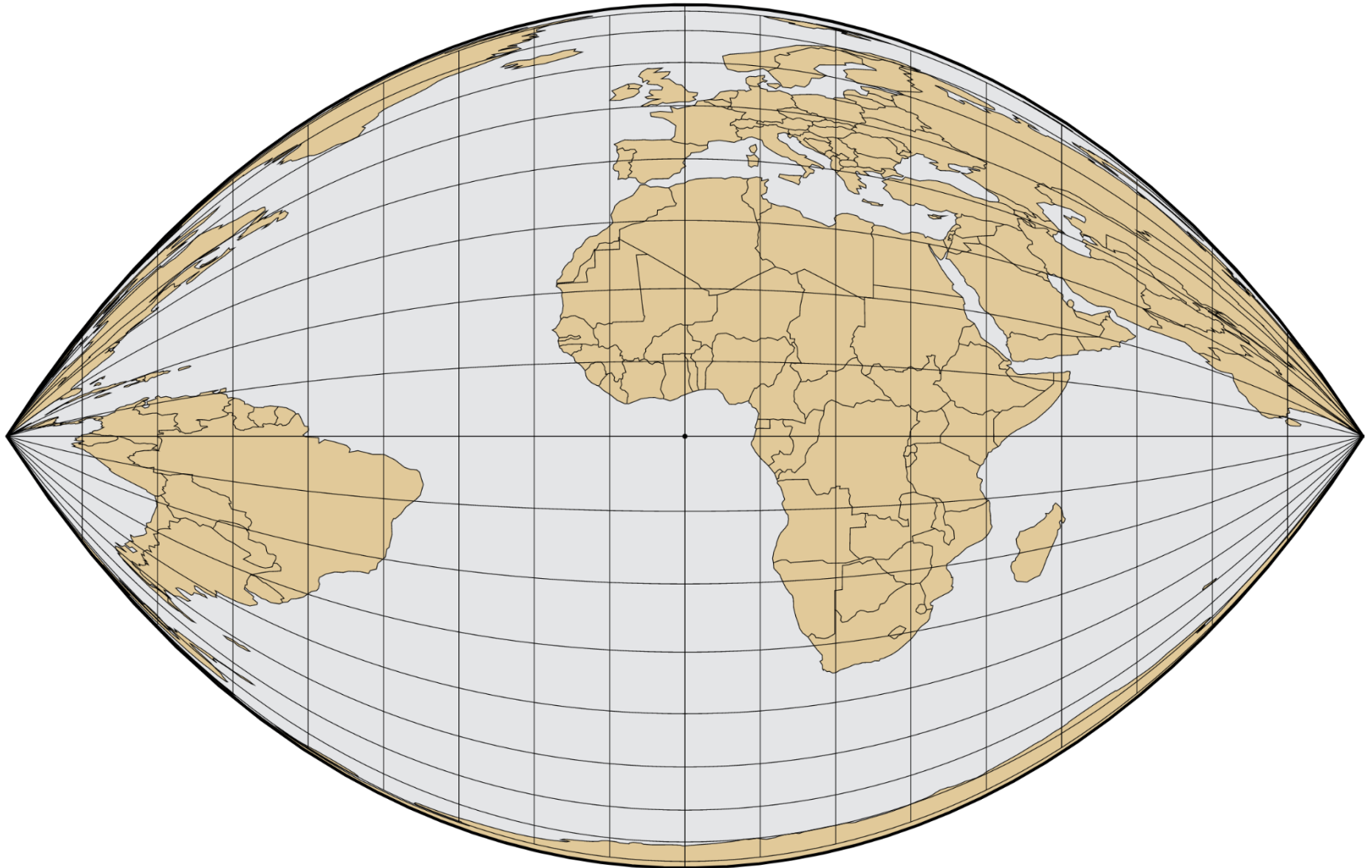
Poledníky úsečky, rovnoběžky obecné křivky.

Nezkresluje azimuty z libovolného místa do konkrétního bodu.

Známo jako Mecca projection: z libovolného místa zachovává směr k Mekce.



25. Craigovo retroazimutální zobrazení, zeměpisná síť



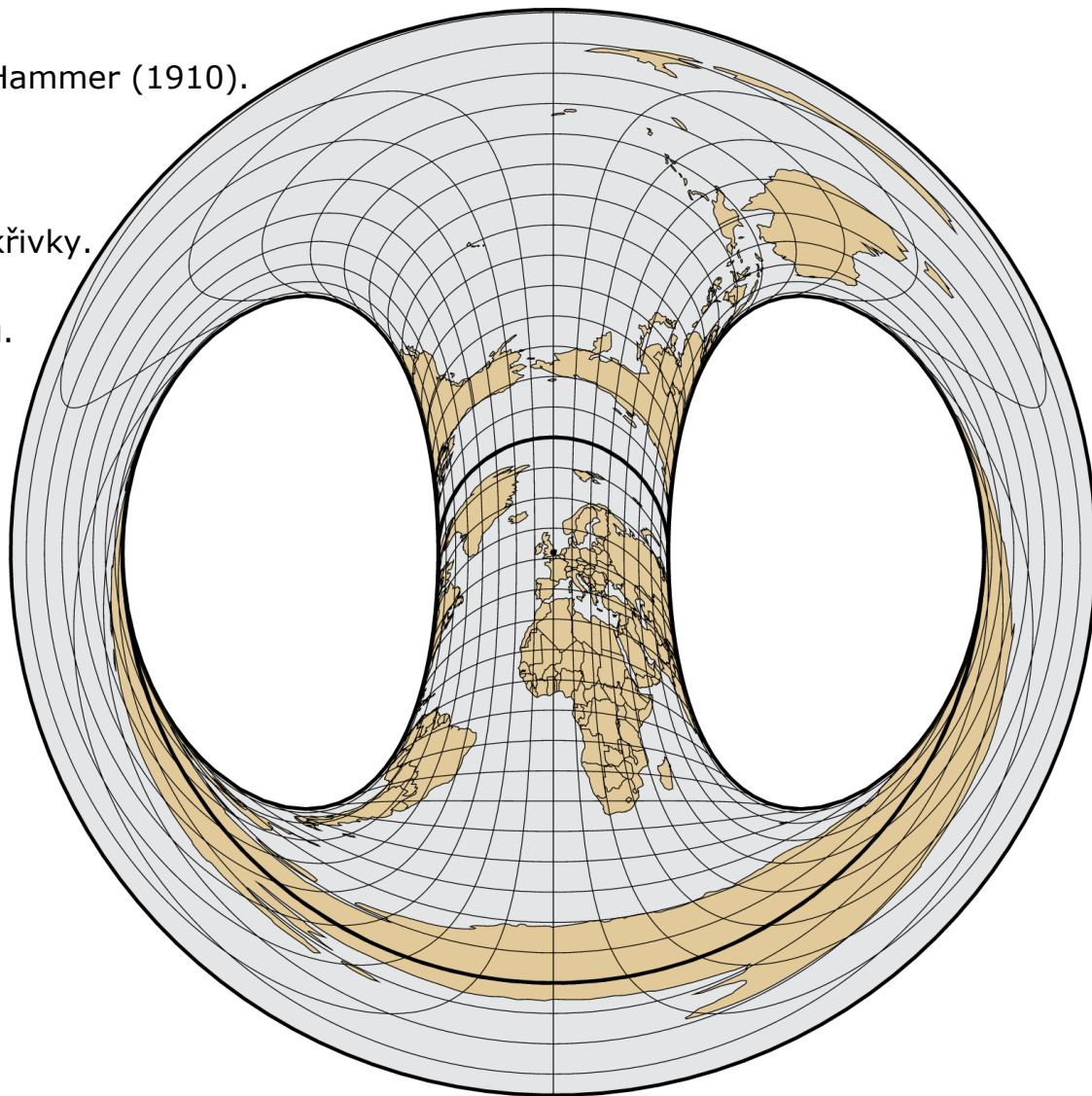
26. Hammerovo retroazimutální zobrazení

Autorem německý geodet E. H. H. von Hammer (1910).
Zkresluje vše.

Nezobrazí planisféru.
Obrazy poledníků i rovnoběžek obecné křivky.

Použití: zjištění azimutu spojnice 2 bodů.

Patří do kategorie cartographic art.
V praxi se nepoužívá.



27. Peirceovo zobrazení

Autorem americký matematik a filozof Ch. S. Peirce (1879).

Konformní, znázorní celý svět.

Poledníky/rovnoběžky obecné křivky.

Severní pól zobrazen jako bod, jižní pól jako 4 body.

Zobrazovací rovnice řešením

$$z = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-z^4}} dz.$$

Obraz sféry $|z| = 1$ transformován na čtverec.

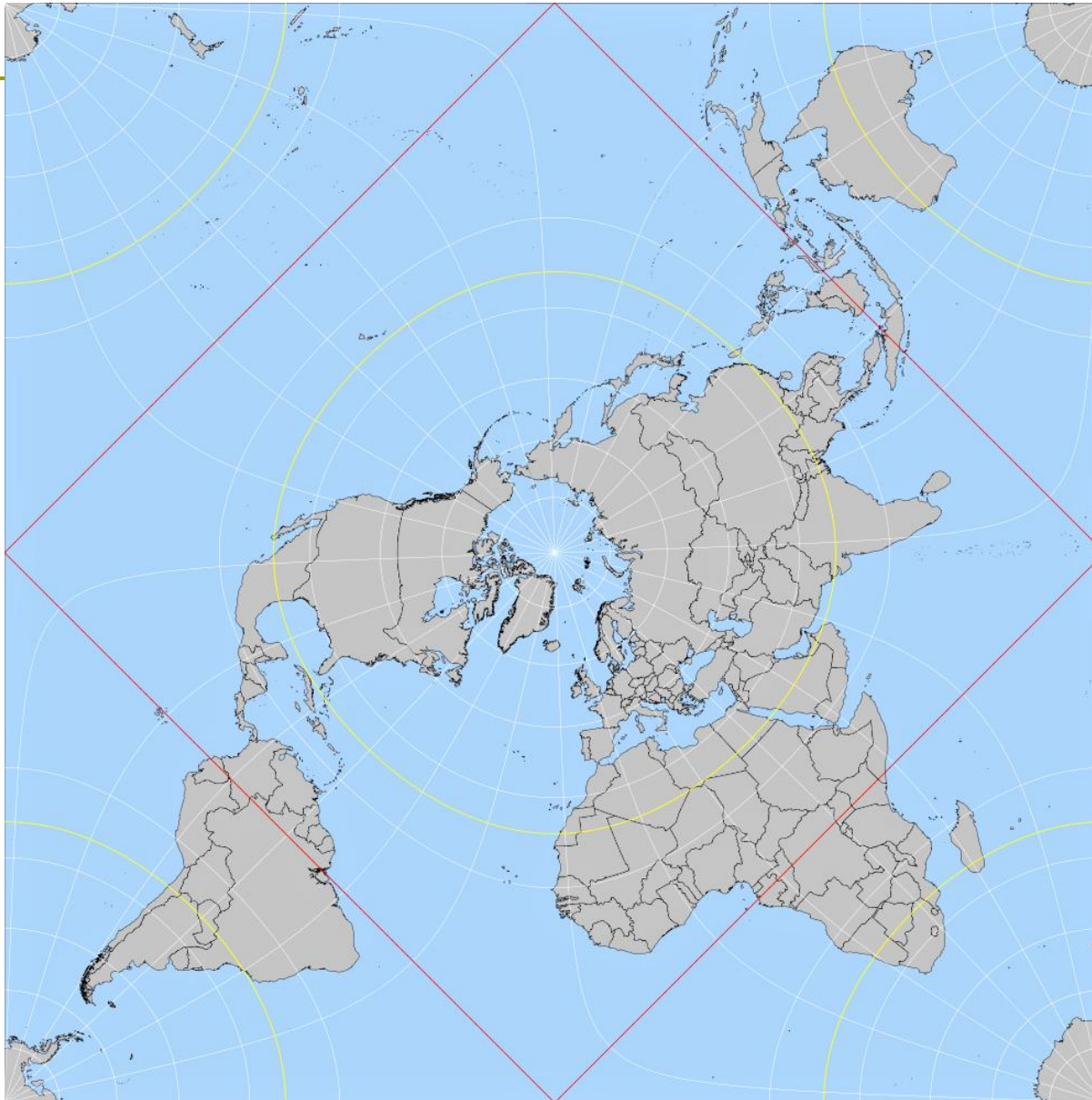
První použití eliptických funkcí pro kartografická zobrazení.

Používání zpravidla v normální formě.

Transverzální varianta: Guyou projection.

Nepřirozený tvar planisféry, nepoužívá se.

28. Peirecovo zobrazení, zeměpisná síť



29. Guyou zobrazení

Transverzální varianta Perircova zobrazení.

Konformní, znázornění celého světa, poledníky/rovnoběžky obecné křivky.

Hemisféra zobrazena jako čtverec, planisféra obdélník s poměrem stran 2:1.

Používáno v atlasové kartografii.



30. Adamsova zobrazení

Autorem významný americký matematik O. S. Adams (1925).

Celkem III Adamsova zobrazení + teorie zobecněných polykonických zobrazení.

Znázornění světa v hemisféře (I), planisféře (II,III).

Obrazem Země je vždy čtverec.

Všechna zobrazení konformní.

Složitě matematické pozadí, vede k Dixonovým eliptickým funkcím

Řešení rovnice

$$cm^3 + sm^3 = 1,$$

kde

$$z = \int_0^{sm(z)} \frac{d\sigma}{(1 - \sigma^3)^{2/3}} = \int_{cm(z)}^{1) } \frac{d\sigma}{(1 - \sigma^3)^{2/3}}.$$

Obrazy poledníků/rovnoběžek obecné křivky.

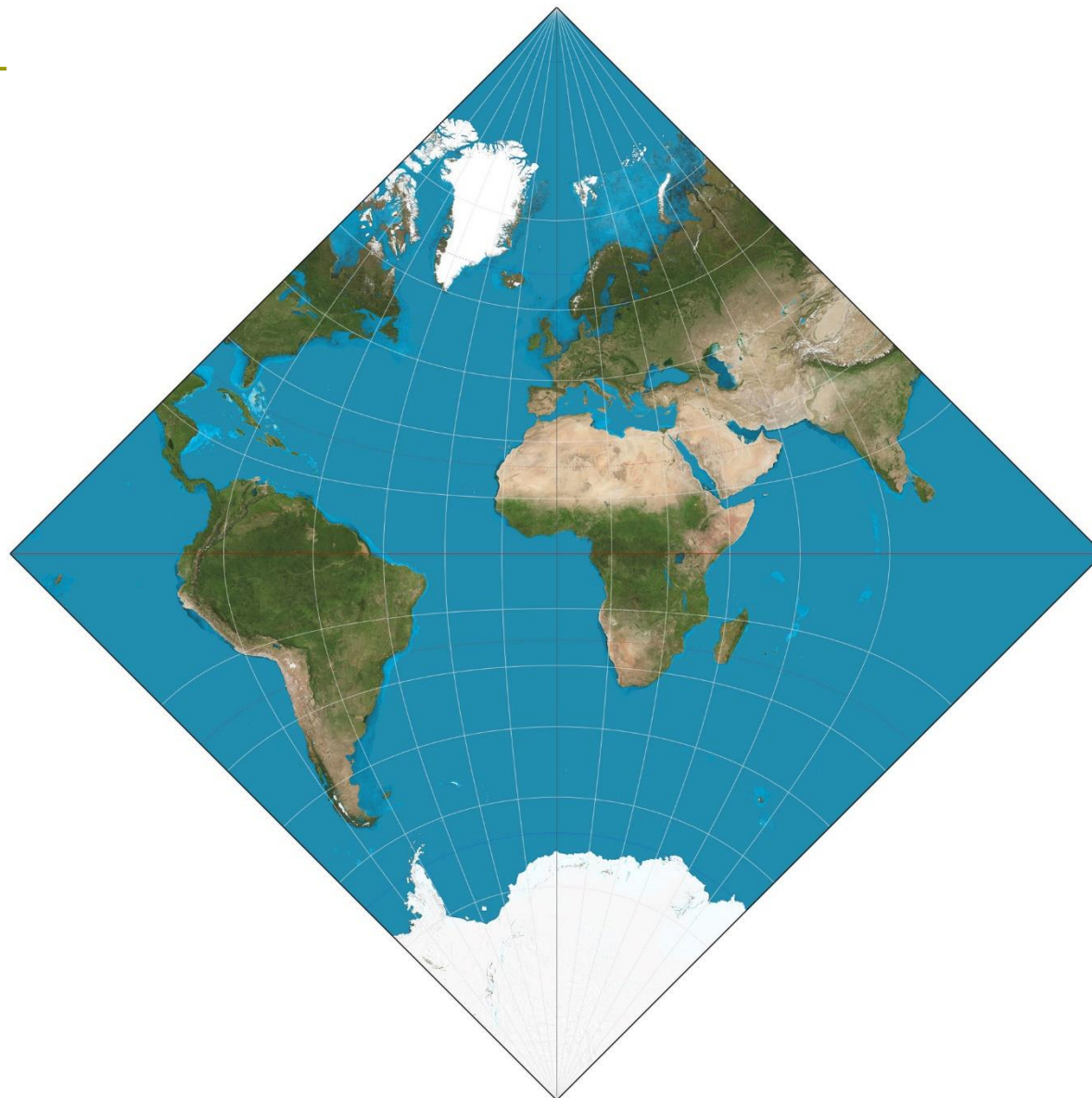
Pól zobrazen jako bod/více bodů.

Zobrazení I: transverzální varianta je Peirceovo zobrazení.

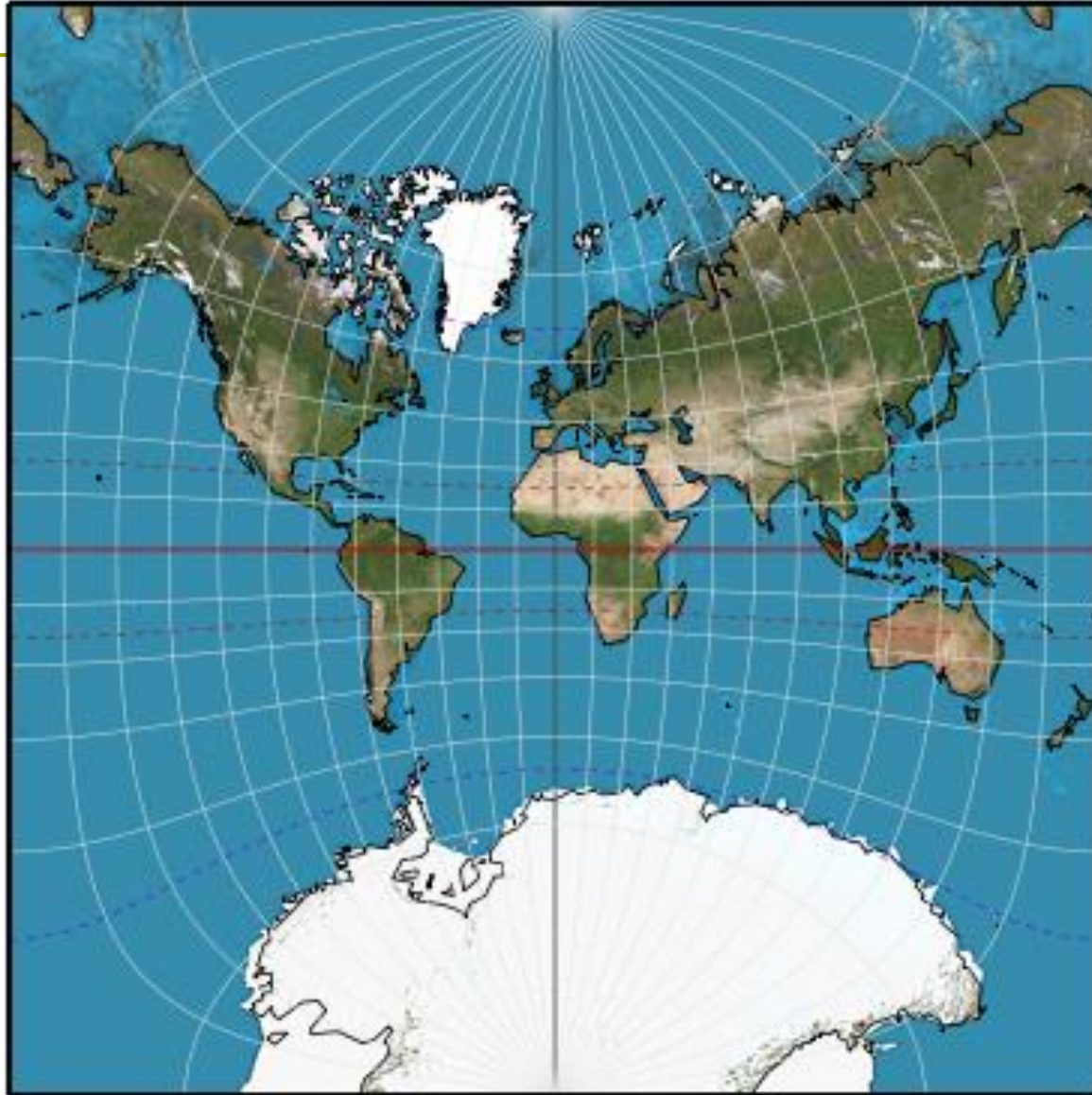
Nevýhodou složité zobrazovací rovnice.

Použití v atlasové kartografii.

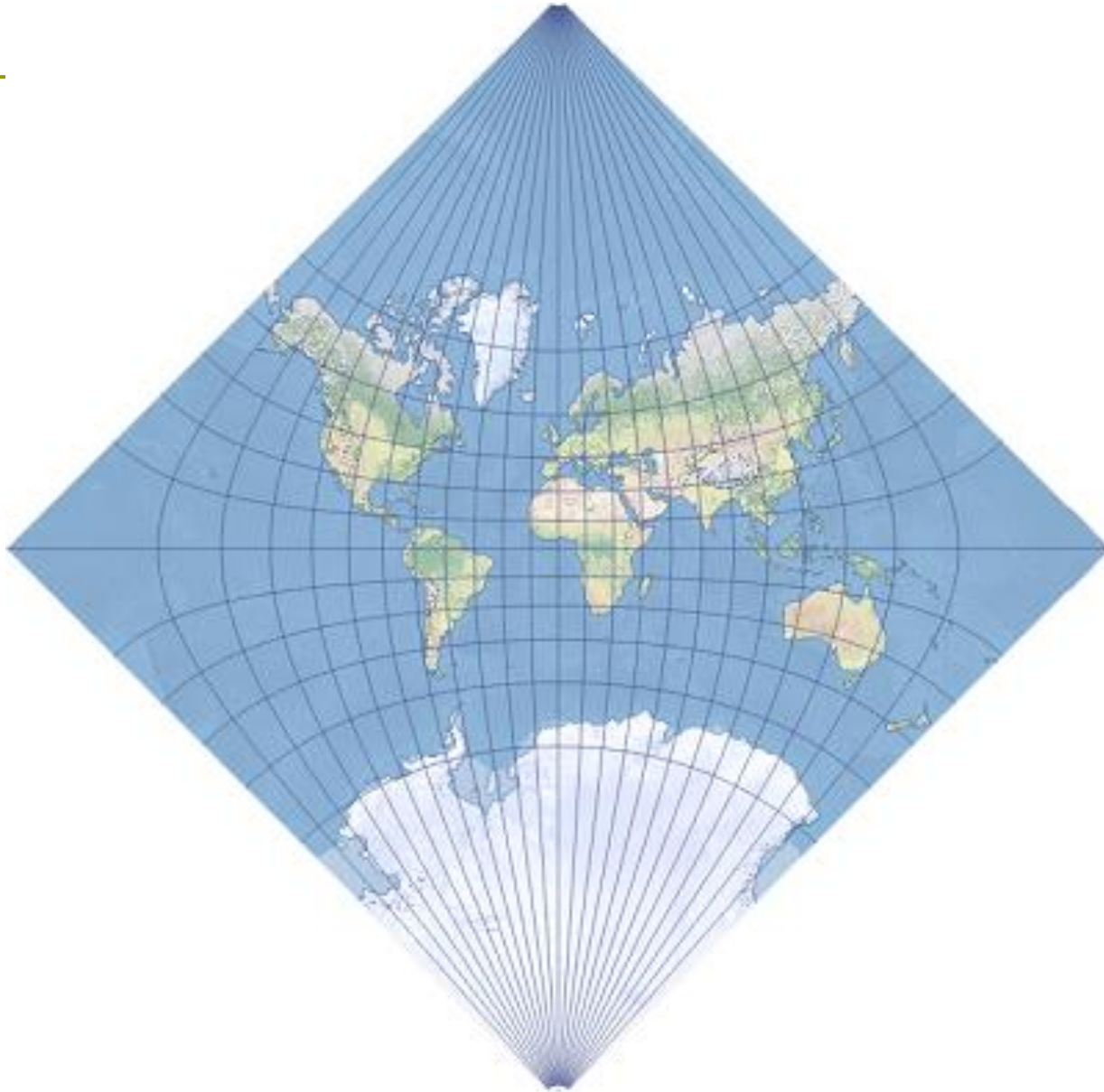
31. Adamsovo zobrazení I., zeměpisná síť



32. Adamsovo zobrazení II., zeměpisná síť



33. Adamsovo zobrazení III., zeměpisná síť



34. Augustovo zobrazení

Autorem německý matematik F. W. O. August (1874).

Připomíná tvarem síť polykónické zobrazení.

Někdy označováno jako modifikované polykónické.

Podobné zobrazení Eisenlohrovu, má jednodušší zobrazovací rovnice.

$$\begin{aligned}x &= 4R(3 + a^2 - 3b^2), \\y &= 4R(3 + 3a^2 - b^2),\end{aligned}$$

kde

$$a = \frac{\sin \frac{v}{2} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}}}{c}, b = \frac{\operatorname{tg} \frac{u}{2}}{c}, c = 1 + \cos \frac{v}{2} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}}.$$

Konformní, znázorní celý svět.

Poledníky jsou epicykloidy, rovnoběžky obecné křivky.

Obrysový poledník: konstantní délkové zkreslení.

Příznivé charakteristiky zkreslení.

Občas používáno v atlasové kartografii pro znázornění planisféry/hemisféry.

35. Augustovo zobrazení, zeměpisná síť

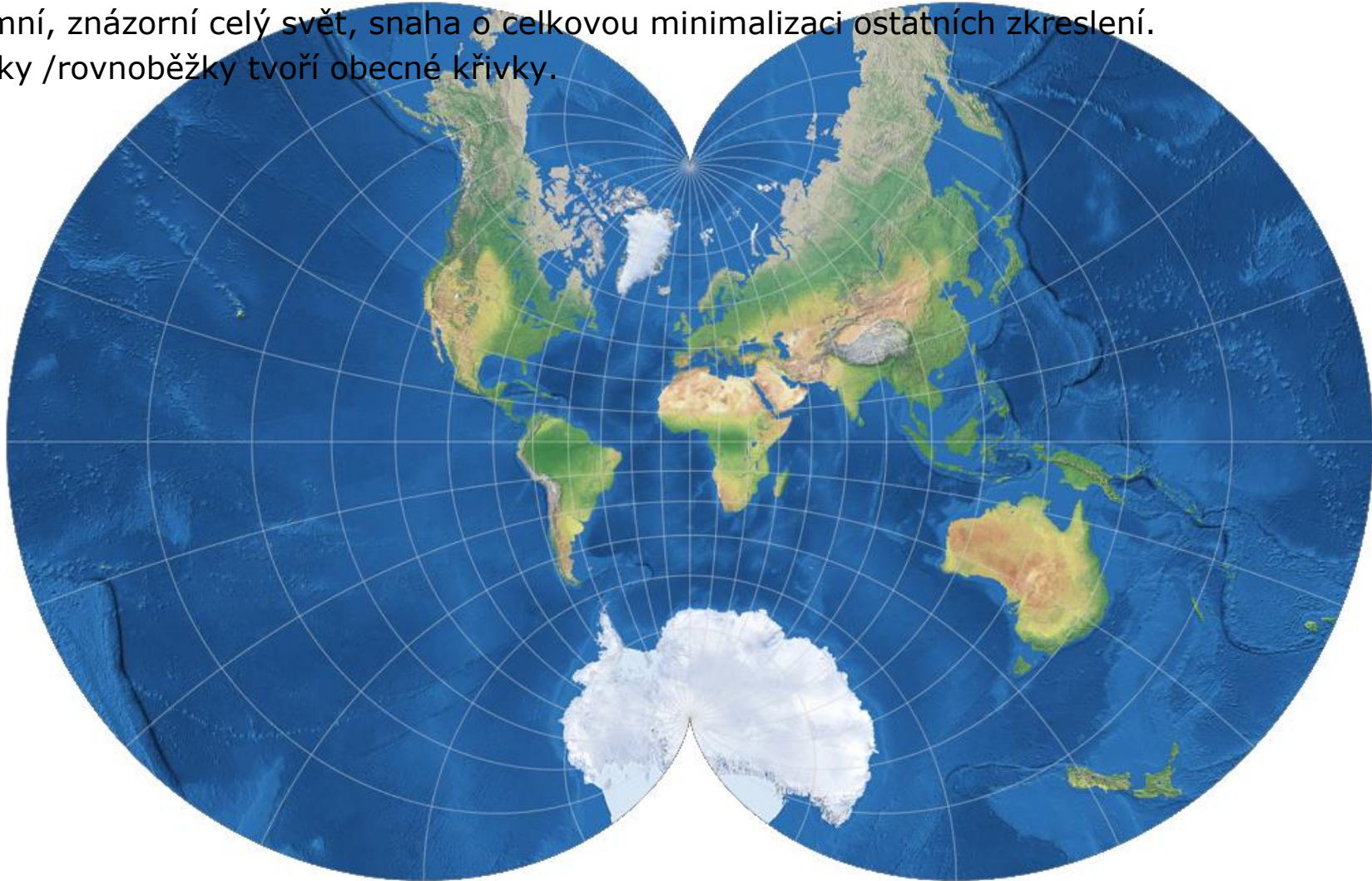


36. Eisenlohrovo zobrazení

Autorem německý matematik F. Eisenlohr (1870).

Konformní, znázorní celý svět, snaha o celkovou minimalizaci ostatních zkreslení.

Poledníky /rovnoběžky tvoří obecné křivky.



37. Lee zobrazení

Autorem novozélandský kartograf L. P. Lee.

Zobrazení světa do elipsy/rovnostanného trojúhelníku.

Obě konformní.

Poledníky i rovnoběžky jsou obecné křivky.

Lee I. (eliptické, 1965):

Obrazem planisféry elipsa.

Značná zkreslení v okolí poledníku $\nu = \pm 180^\circ$.

Zpravidla používána v intervalu ν mezi ohnisky.

Lee II (trojúhelníkové, 1965)

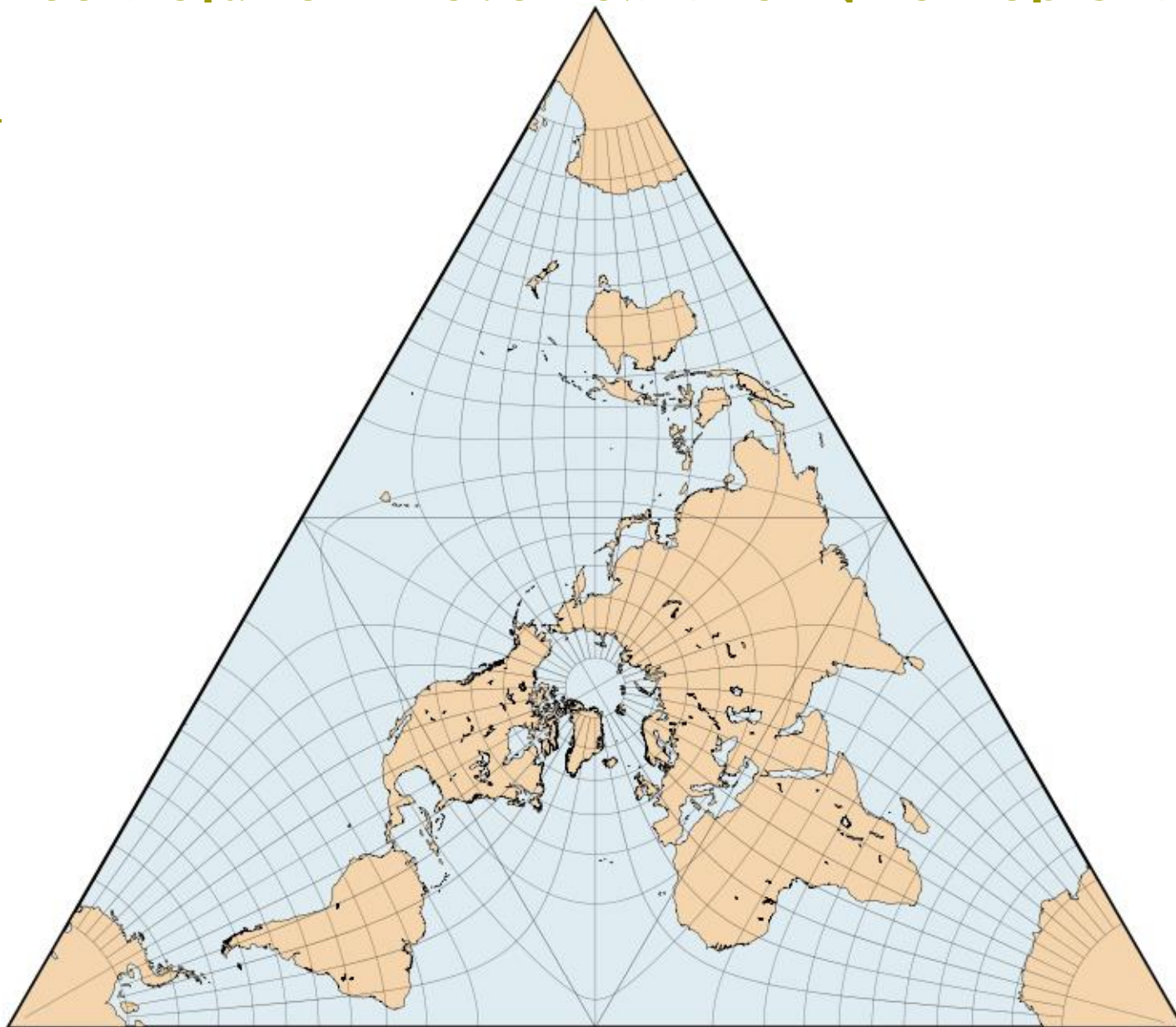
Obrazem planisféry rovnostanný trojúhelník.

Severní pól bod, jižní pól 3 body.

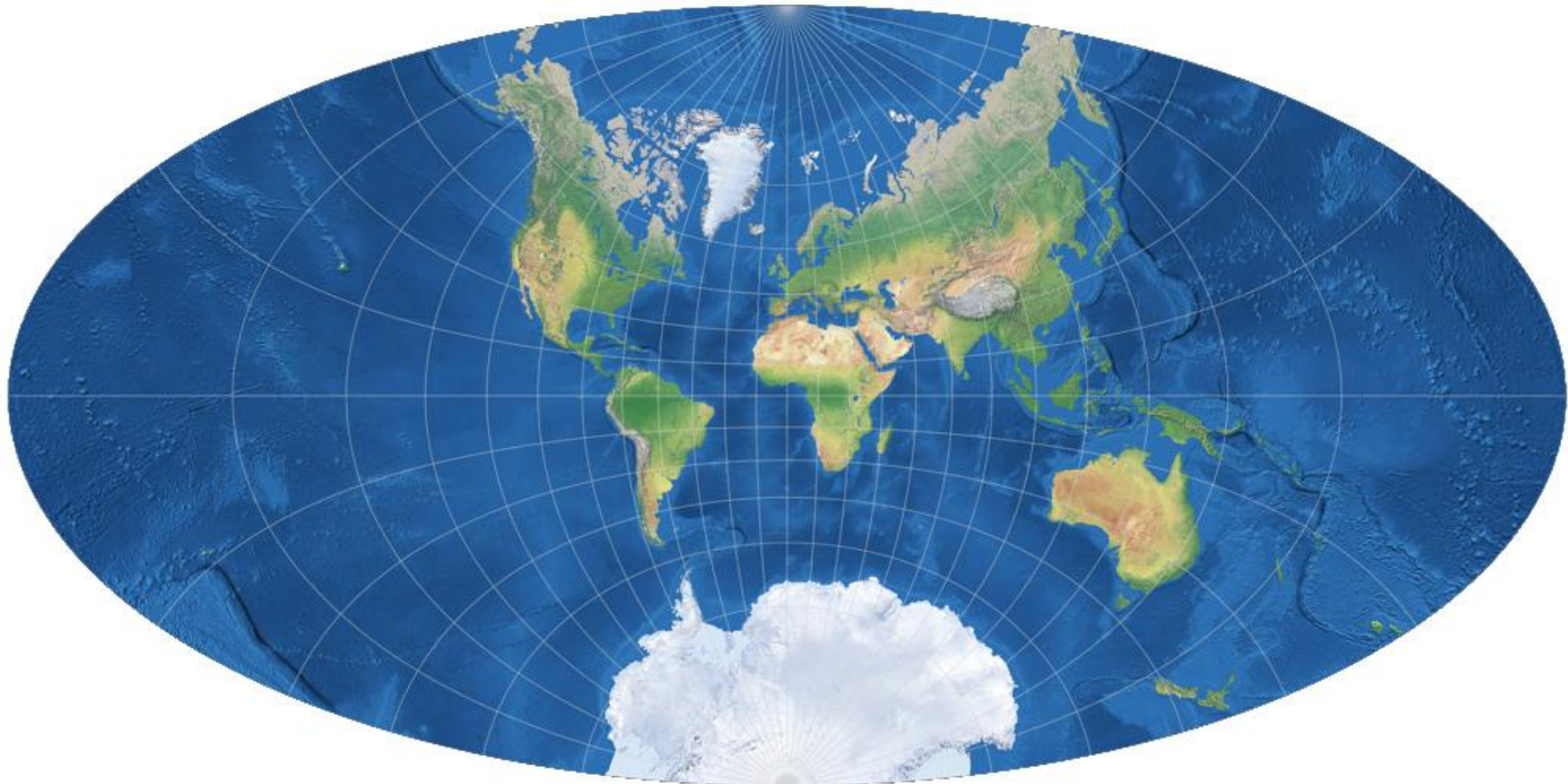
Lze složit ve čtyřstěn, výsledkem polyedrický glóbus.

Nepřirozené znázornění planisféry, v praxi se nepoužívá.

38. Lee trojúhelníkové zobrazení, zeměpisná síť



39. Lee eliptické zobrazení, zeměpisná síť



40. Xarax zobrazení

Kompozitní zobrazení (2004), vychází z Lee trojúhelníkového zobrazení.
Zobrazení Země do poloviny 6-ti úhelníku, konformní.



41. Armadillo zobrazení

Autorem maďarský kartograf E. Raist (1974).

Vyrovňovací zobrazení, zkresluje vše.

Zobrazení světa na povrch toroidu, připomíná pásovce.

Používáno v atlasové kartografii, Země v planisféře (téměř).



42. Authagraph projection

Autorem japonský architekt H. Naruawa (1999), ekvivalentní.
Planisféra rozdělena na 96 sférických trojúhelníků, zobrazeny na rovině.
Z nich složen mapový obraz (teselace).
Vhodné pro mapy oceánů.

