

# Matematické metody v kartografii

---

Volba zobrazení. Kritéria pro  
hodnocení kartografických  
zobrazení. Souřadnicové systémy  
ve světě/Evropě/ČR.

# 1. Volba kartografického zobrazení

---

Parametry ovlivňující volbu kartografického zobrazení:

- ❑ Účel mapy.
- ❑ Uživatel mapy.
- ❑ Kartografické vlastnosti mapy (co nezkresluje).
- ❑ Měřítko mapy.
- ❑ Tvar geografické sítě.
- ❑ Velikost a tvar území.

## Topografické mapy:

Požadavek co nejmenšího zkreslení na okrajích, menší než grafická přesnost.

Grafická přesnost mapy  $g=0.1\text{mm}$ , přepočtena k měřítkovému číslu  $M$  v  $[\text{m/km}]$ .

$$G = gM,$$
$$(m - 1)1000 \leq G \Rightarrow m \leq 1 + \frac{G}{1000}.$$

Nejčastěji používána konformní zobrazení (kuželová, válcová, azimutální).

## Příklad:

$M=1000$ ,  $g=0.1\text{mm}$ .

Pak  $G=0.1\text{m}$  a  $m < 1 + 0.1/1000 = 1.0001$ . Maximálně 10 cm/km.

## Geografické mapy:

Nejčastěji ekvivalentní či vyrovnávací, konformita méně častá.

Požadavek přirozeného/věrného/souvislého zobrazení velké části zemského povrchu.

Složitější hodnocení kvality zobrazení.

# 2. Volba zobrazení pro topografické mapy

Zobrazení menších územních celků (zpravidla státy, nikoliv kontinenty).  
Důležitou roli hraje velikost, poloha a tvar území.

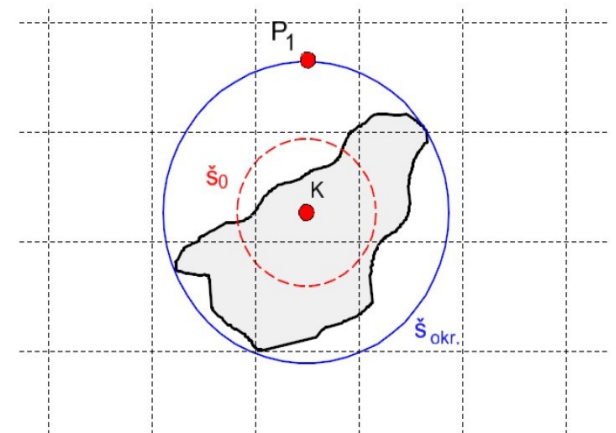
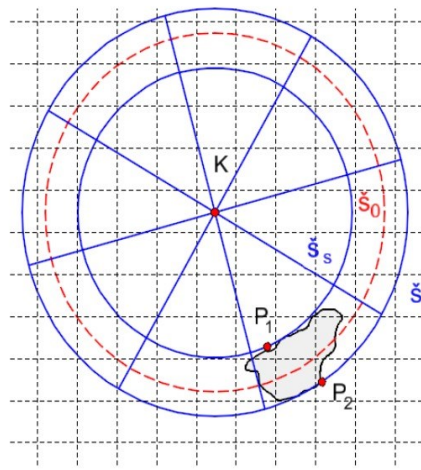
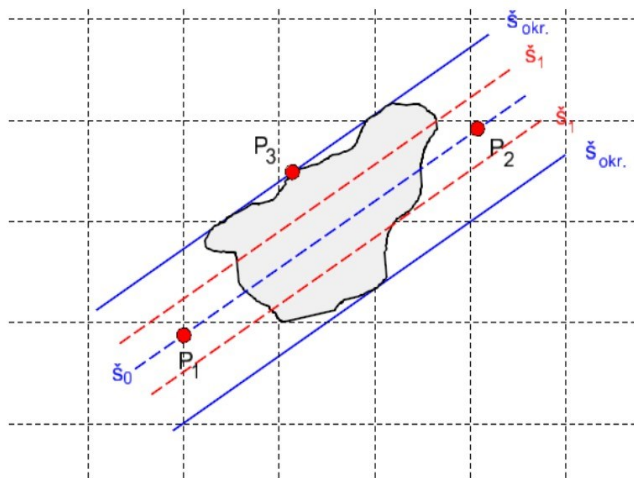
## Požadavky na zobrazení:

- Malé zkreslení: vliv menší než grafická přesnosti mapy ( $<0.1\text{mm}$ ).
- Pokud nelze splnit, polyedrické zobrazení: více souřadnicových systémů.
- Poloha kartografického pólu: zpravidla obecná, transversální nebo normální.

Válcová zobrazení: Území sevřené do co nejužšího pásu podél ortodromy.

Kuželové zobrazení: Území sevřené do co nejužšího pásu podél dotykové rovnoběžky.

Azimutální zobrazení: Území uvnitř kružnice s co nejmenším poloměrem.



# 3. Vliv tvaru území: kuželové/válcové/azimutální

Co je výhodnější: azimutální nebo kuželové?

Myšlenka: je území široké (azimutální) nebo protáhlé (válcové/kuželové)?

Kuželové pro protáhlé území vhodnější než válcové.

1) Optimální poloha válcového/kuželového zobrazení

Sevření území do nejužšího pásu, šířka 2š.

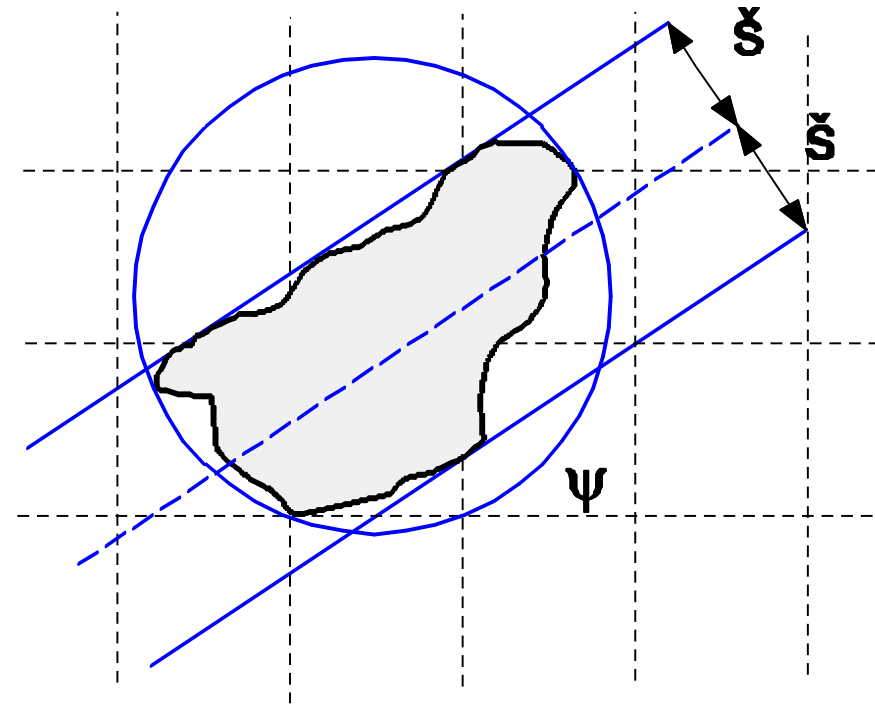
2) Optimální polohy azimutálního zobrazení

Opsaná kružnice s poloměrem  $\psi=90\text{-}\check{s}$ .

Kritérium „protáhlosti“ území

$$k = \frac{\psi}{\check{s}}$$

Zobrazení	Azimutální	Kuželové/válcové
Konformní	$k \leq 1.4$	$k > 1.4$
Ekvidistattní	$k \leq 1.7$	$k > 1.7$
Ekvivalentní	$k \leq 2.0$	$K > 2.0$



**Protáhlé vs. široké území:**

- ❑ Válcová: protáhlé ve směru ortodromy (rovníku)
- ❑ Kuželová: protáhlá ve směru vedlejší kružnice (zakřivená, tvar banánu).

# 4. Volba zobrazení pro geografické mapy

---

Zobrazení velkých územních celků: kontinenty, hemisféry, planisféra.

Důležitou roli hraje velikost, poloha území, účel mapy.

Složitější hodnocení vlastností zobrazení, zpravidla variační kritéria.

## Požadavky na zobrazení:

- ❑ Požadavky na délkové zkreslení nehrají tak velkou roli.
- ❑ Snaha o co nejpřirozenější obraz celého území.
- ❑ Častým požadavkem je ekvivalence: politické mapy.
- ❑ Alternativně požadavek na specifický tvar poledníků/rovnoběžek.
- ❑ Alternativně zachování tvarů: konformní zobrazení.
- ❑ Alternativně zachování délek: dopravní mapy.
- ❑ Málokdy požadavek na specifický tvar obrazu loxodromy/ortodromy.

Zpravidla více faktorů, nutno je vzájemně zkombinovat, avšak jen za cenu kompromisů.

Nejčastější varianta: použití vyrovnávacích zobrazení.

Malá území: plocha do 5 000 000 km<sup>2</sup>, zkreslení délky max 0.5%.

Střední území: plocha do 50 000 000 km<sup>2</sup>, zkreslení délky max 3%.

Velká území: plocha nad 50 000 000 km<sup>2</sup>, zkreslení délky >3%.

# 5. Volba kartografického zobrazení pro přehledné mapy

<b>Svět</b>	Konformní	Bez pólů: válcové konformní (Mercator). S póly: polykónické (Lagrangeovo).
	Ekvivalentní	Souvislé: Mollweid, Eckert, Hammer Nesouvislé: kompozitní zobrazení (Good)
	Ekvidistantní	Azimutální
	Vyrovnávací	Nepravá válcová či modifikovaná polykónická
<b>Hemisféry</b>	Konformní	Azimutální (stereografická projekce).
	Ekvivalentní	Azimutální: Lambert
	Ekvidistantní	Azimutální: Postelovo
	Vyrovnávací	Van der Grinten
<b>Kontinenty</b>	Převládající směr	Z-V: normální poloha S-J: transverzální poloha Jinak: obecná poloha
	Poloha	U rovníku: konformní (Mercator), ekvivalentní (kužel, Albersovo) Dál od rovníku: konformní (Lambertovo)
	Tvar	Čtverec, kruh: azimutální Protáhlé: kuželové/válcové
	Loxodroma úsečka	Mercatorovo
	Ortodroma úsečka	Gnómonická projekce

# 6. Kritéria pro hodnocení kartografických zobrazení

Řada různých kritérií, liší se komplexitou.

## 1) Extrémní kritéria

Maximální hodnoty kartografických zkreslení

$$f = m_{\max} = a.$$

Neposuzují zobrazení jako celek, pouze vybereme jednu max hodnotu, nejmenší vypovídací schopnost. Většinou pro malá území, kde nás nezajímá průběh zkreslení.

## 2) Min-max kritéria

Vylepšení ad 1), vyberou se dvě extrémní hodnoty, výsledkem poměr

$$f = \frac{m_{\min}}{m_{\max}} = \frac{b}{a}.$$

Menší vypovídací schopnost, neposuzují zobrazení jako celek, neukazují průběh zkreslení.

## 3) Tvar a průběh ekvideformát

Průběh ekvideformát v posuzovaném území, ukazuje průběh zkreslení  
Kritériem poměr

$$f = \frac{P_e}{P},$$

plochy  $P_e$  ekvideformáty  $e$  s max. hodnotou zkreslení a celkové plochy území  $P$ .  
Výhodou vysoká vypovídací schopnost.

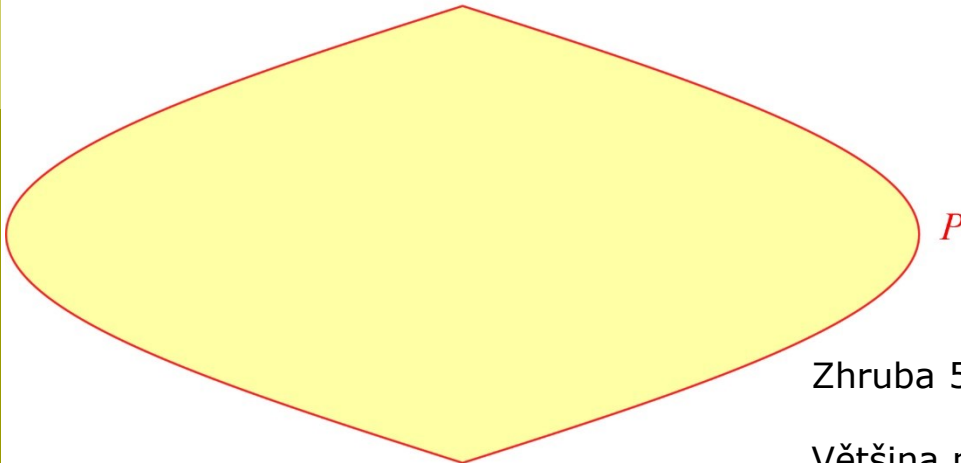
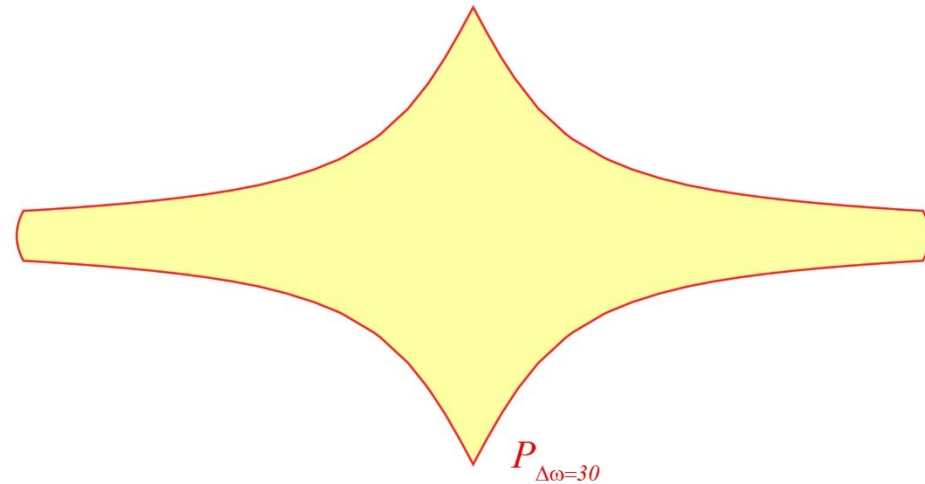
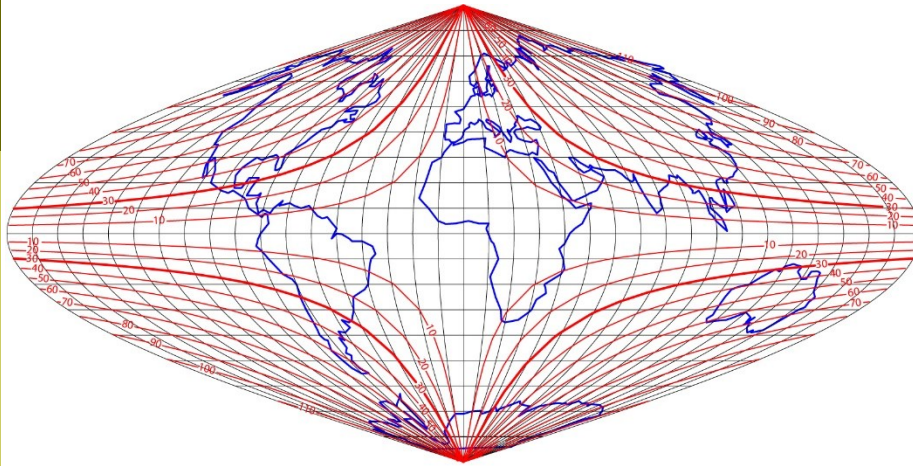
**Příklad:** Poměr plochy  $P_{\Delta\omega < 10^\circ}$  ku celkové ploše  $P$  planisféry.

## 4) Variační kritéria

Posuzují globálně vlastnosti celého zobrazení, komplexní hodnocení.

Integrace přes celou zobrazovací plochu, nejlépe charakterizují vlastnosti kartografického zobrazení.

# Výpočet $f$ : Mercator-Sansonovo zobrazení



$$f = \frac{P_{\Delta\omega=30}}{P} \approx 0.47.$$

Zhruba 50% území má menší zkreslení  $\Delta\omega$  než  $30^\circ$ .

Většina nepravých zobrazení dosahuje lepších výsledků.  
Mercator-Sansonovo zobrazení nevhodné.



# 7. Lokální variační kritéria

---

Výpočet z hodnot extrémních zkreslení v bodě  $P=[u,v]$ .

Zpravidla používány poloosy Tissotovy indikatrix  $a$ ,  $b$ .

Nejčastější variační kritéria:

## **Airyho I.**

Střední kvadratická hodnota zkreslení  $a$ ,  $b$ .

Uvažuje pouze vliv délkového zkreslení.

$$h^2(u, v) = \frac{1}{2}[(a-1)^2 + (b-1)^2]$$

## **Airyho II.**

Zohledňuje plošné i úhlové zkreslení.

Vysoká vypovídací hodnota.

$$h^2(u, v) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{a}{b} - 1 \right)^2 + (ab - 1)^2 \right]$$

## **Kavrajského**

Upravené Airyho kritérium.

Uvažuje pouze vliv délkového zkreslení.

Dává podobné výsledky jako Airyho.

$$h^2(u, v) = \frac{1}{2} [\ln^2 a + \ln^2 b]$$

## **Komplexní**

Uvažuje vliv délkového i úhlového zkreslení.

Vysoká vypovídací hodnota.

$$h^2(u, v) = \frac{1}{2} [ |a-1| + |b-1| ] + \frac{a}{b} - 1$$

Existují i další kritéria: Jordanovo, Klingachovo, Konusové.

# 8. Globální variační kritéria

Posuzují vlastnosti kartografického zobrazení globálně na intervalu.

Obecný tvar

$$H^2 = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} h^2 d\Omega = \frac{1}{(u_2 - u_1)(v_2 - v_1)} \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} h^2 dudv.$$

Představují střední hodnotu kritéria  $h^2(u,v)$  na intervalu  $\Omega=(u_1, u_2) \times (v_1, v_2)$ .

S výjimkou jednoduchých a některých nepravých umíme spočítat pouze numericky.

Počítáme diskrétně v uzlových bodech sítě.

Zvolený krok zpravidla  $\Delta u = \Delta v = 10^\circ$ .

## **Nevážená varianta:**

Aritmetický průměr všech hodnot  $h^2(u,v)$

$$H_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h^2(u_i, v_i).$$

Ovlivněna hodnotami  $h^2(u,v)$  v blízkosti pólů (tato oblast nebývá zpravidla středem zájmu).

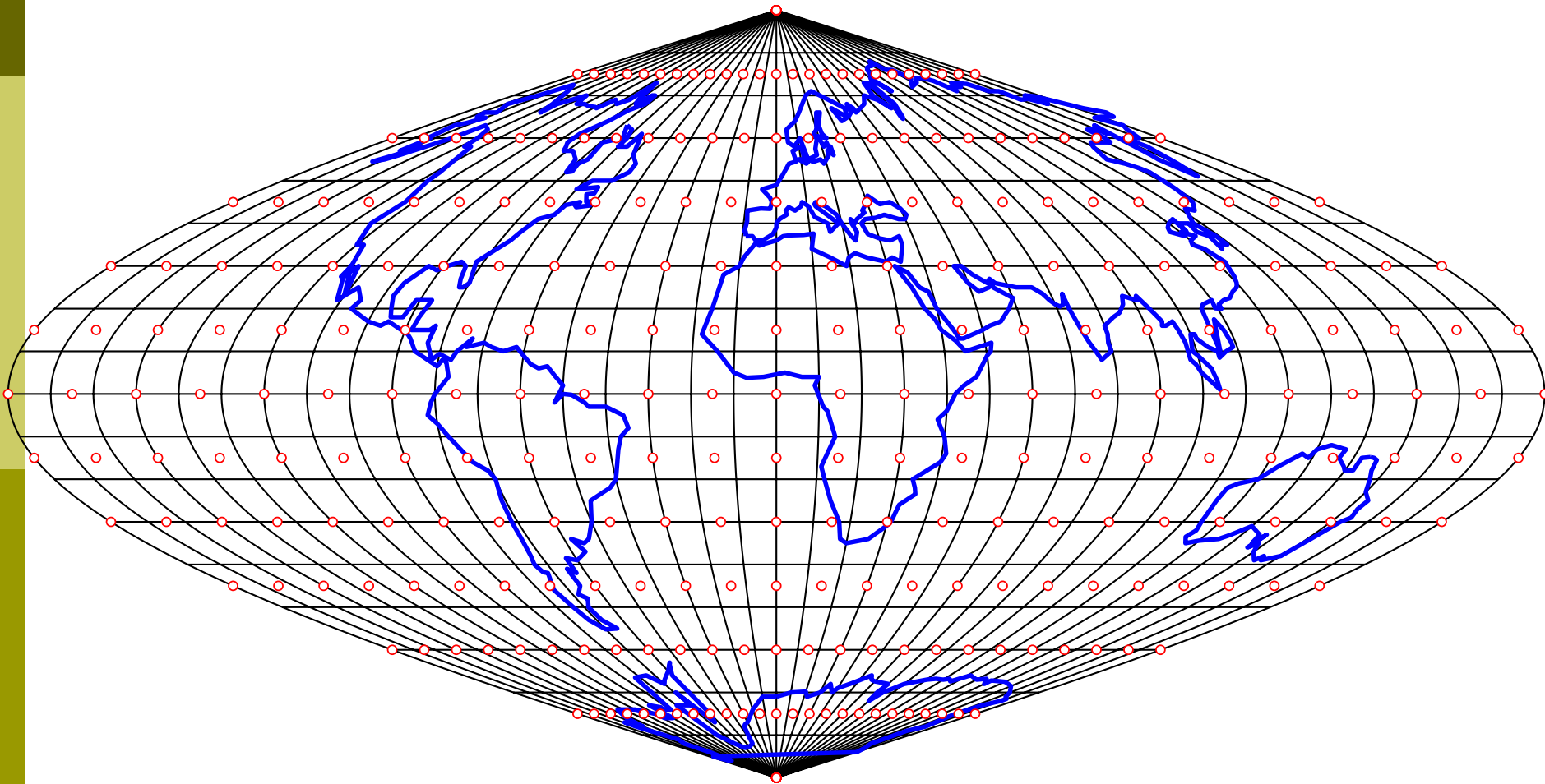
## **Vážená varianta:**

Menší vliv  $h^2(u,v)$  v pólových oblastech, vahou kosinus zeměpisné šířky

$$H_2^2 = \sum_{i=1}^n \frac{p_i h^2(u_i, v_i)}{p_i}, \quad p_i = \cos u_i.$$

# 9. Globální variační kritéria, uzlové body

---



# 10. Souřadnicové systémy a kartografická zobrazení v GIS

---

Převody mezi souřadnicovými systémy/zobrazeními často používány v GIS/kartografii. Různé způsoby definic souřadnicových systémů/zobrazení.

Obsahují definice:

- geodetických datumů,
- elipsoidů,
- kartografických zobrazení a jejich parametrů (konstanty),
- inverzních forem kartografických zobrazení,
- souřadnicových transformací,
- doplňujících parametrů zobrazení (zkreslení).
- měrných jednotek.

Nejčastěji používané formáty definic:

- Databáze EPSG.
- Knihovna USGS Proj

Různé systémy podporují různé definice.  
Problém s kompatibilitou.

V současné době podporováno cca 150 kartografických zobrazení.  
Inverze známy cca u 4/5 z nich.

U některých zobrazení rovnice řešitelné pouze numericky.

Velké množství národních souřadnicových systémů (lokálně-specifické definice).

Nutnost implementace složitých matematických řešení.

Řešeno velkými vývojovými týmy.

# 11. Databáze EPSG

---

EPSG = European Petroleum Survey Group, existovala 1986-2005.

Nyní udržována a aktualizována IOGP (International Association of Oil and Gas Producers).

Mezinárodní registr souřadnicových systémů v GIS.

Velmi významná, pravidelně aktualizovaná databáze (4 x ročně), celosvětové pokrytí.

Každé kartografické zobrazení/souřadnicový systém má unikátní EPSG kód 1024-32767.

Definice publikovány ve formátu WKT CRS (standardizace OGC).

x	Kód (EPSG)	Název referenčního souřadnicového systému (CRS)
1	EPSG:2065	S-JTSK (Ferro)
2	EPSG:3035	Evropská projekce LAEA
3	EPSG:4326	WGS 84 / geographic
4	EPSG:28403	S-42 (Pulkovo 1942 / Gauss-Krüger zone 3)
5	EPSG:32634	WGS 84 / UTM zone 34N (Northern Hemisphere)
6	EPSG:32633	WGS 84 / UTM zone 33N (Northern Hemisphere)
7	EPSG:102067	S-JTSK_Krovak_East_North

Další významné definice:

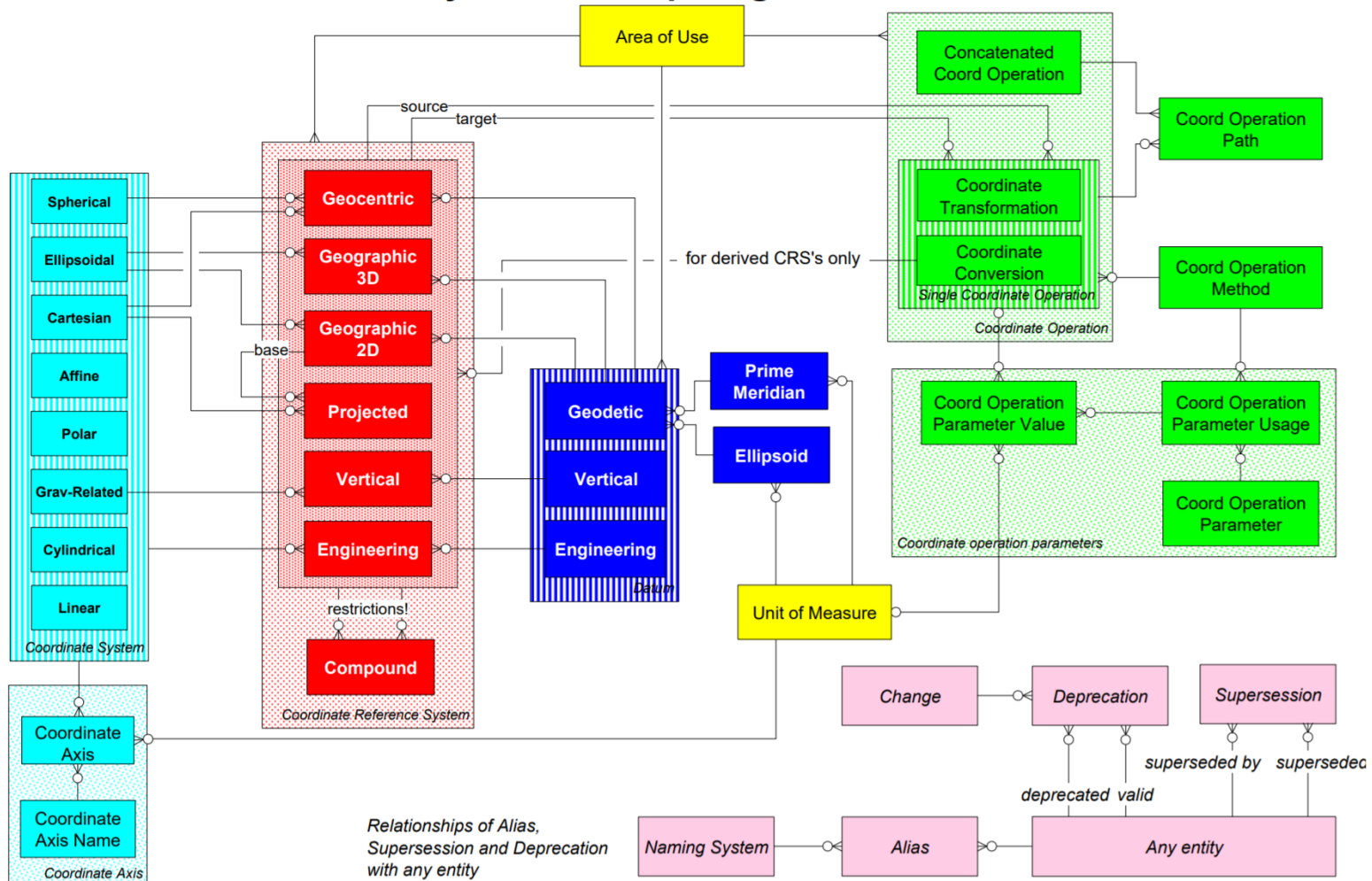
- EPSG:3857 - [Web Mercator projection](#) (Google Maps and OpenStreetMaps).
- EPSG:7789 - [International Terrestrial Reference Frame](#) (ITRF2014).

# 12. Struktura EPSG



Entity-Relationship diagram EPSG v 6

Version 2.0 - Oct 2004



# 13. WKT CRS, Křovákovo zobrazení

```
PROJCS["S-JTSK (Ferro) / Krovak",  
  GEOGCS["S-JTSK (Ferro)",  
    DATUM["System_Jednotne_Trigonometricke_Site_Katastralni_Ferro",  
      SPHEROID["Bessel 1841",6377397.155,299.1528128,  
        AUTHORITY["EPSG","7004"]],  
      TOWGS84[589,76,480,0,0,0,0],  
      AUTHORITY["EPSG","6818"]],  
    PRIMEM["Ferro",-17.666666666666667,  
      AUTHORITY["EPSG","8909"]],  
    UNIT["degree",0.0174532925199433,  
      AUTHORITY["EPSG","9122"]],  
    AUTHORITY["EPSG","4818"]],  
  PROJECTION["Krovak"],  
  PARAMETER["latitude_of_center",49.5],  
  PARAMETER["longitude_of_center",42.5],  
  PARAMETER["azimuth",30.28813972222222],  
  PARAMETER["pseudo_standard_parallel_1",78.5],  
  PARAMETER["scale_factor",0.9999],  
  PARAMETER["false_easting",0],  
  PARAMETER["false_northing",0],  
  UNIT["metre",1,  
    AUTHORITY["EPSG","9001"]],  
  AXIS["X",SOUTH],  
  AXIS["Y",WEST],  
  AUTHORITY["EPSG","2065"]]
```

# 14. Knihovna Proj

---

Knihovna pro vzájemné konverze mezi kartografickými zobrazeními,  
Původní název Proj.4, od verze 5 (2019) pouze Proj, v současné době verze 8.0.  
Podporuje cca 120 kartografických zobrazení (více než EPSG).  
Vývoj zaštitěn OSGeo konsorciem, pravidelné aktualizace.

Velmi často použito v open/source GIS: QGIS, GDAL.  
API pro mnoho programovacích jazyků: Python, Ruby.

Výhodou kratší definice, nevyužívá EPSG kódy.  
Výpočet dalších parametrů zobrazení: zkreslení, specializované transformace, ...

```
proj +proj=tmerc +lat_0=0 +lon_0=15 +R=6381071.5934 -V <input.txt > output.txt
```

Rozsáhlé možnosti nastavení parametrů, vstup z příkazové řádky/API.

## Syntaxe:

+parameter=value      Definice zobrazení, referenční plochy, konstant, ...  
-option                Pořadí souřadnic, výsledky výpočtu, výpočet zkreslení, ...  
< přesměrování, vstup ze souboru.  
> přesměrování, výstup do souboru.

K dispozici zdrojové kódy, nutno přeložit.  
Alternativně součást balíku OSGeo.



# 15. Významné souřadnicové systémy

---

## Globální systémy:

- **WGS84 (EPSG:4326)**  
Systém zeměpisných souřadnic.  
Použití: měření GPS, zobrazení UTM (státy NATO) + UPS.
- **UTM (EPSG:32633)**  
Celosvětově nejpoužívanější zobrazení, aplikace v 3°/6° pásech.  
V ČR vojenské mapy (pásky 33-34).
- **UPS (EPSG:32661)**  
Používáno spolu s UTM pro polární oblasti (kulový vrchlík), státy NATO.
- **Web Mercator (EPSG:3857):**  
Používán v digitálních mapách: Google Maps, Bing.  
Elipsoid zanedbán, nahrazen sférou, postačuje pro mapy středních měřítek.  
Nezobrazí póly, velká plošná zkreslení.

## EU:

- **ETRS89 (EPSG:4258)**  
Definován na elipsoidu GRS 80, vztažen k eurasijské desce (jeho počátek se mírně pohybuje).  
Kontinuální měření posunů prováděno GPS.  
Využíván v řadě národních systémů.
- **LAEA (EPSG:3035)**  
Doporučeno směrnicí INSPIRE pro mapové výstupy v malých měřítkách, vztaženo k ETRS89.
- **LCC (EPSG:3034)**  
Doporučeno směrnicí INSPIRE pro mapové výstupy ve velkých měřítkách, vztaženo k ETRS89.

# 16. Souřadnicové systémy v ČR

---

Civilní/vojenské souřadnicové systémy v ČR.

## **Nařízením vlády 406/2006, závazné:**

- ❑ 3D systémy: WGS84 (EPSG:4326), ETRS89 (EPSG:4258),
- ❑ 2D systémy: S-JTSK (EPSG:2065),
- ❑ 1D systém: BpV.

## **Směrnice INSPIRE (od roku 2007, doporučené):**

- ❑ 3D systémy: X,Y,Z (GRS80),  $\varphi$ ,  $\lambda$ , h (GRS80)
- ❑ 2D systémy: ETRS89-LAEA, ETRS89-LCC, ETRS89-UTM.

S-JTSK existuje v několika variantách:

- ❑ EPSG:2065, nultý poledník Ferro.
- ❑ EPSG:5513, nultý poledník Greenwich.
- ❑ EPSG: 5221, nultý poledník Ferro, orientace os:  $X = -Y\_JTSK$ ,  $Y = -X\_JTSK$
- ❑ EPSG: 5514 nultý poledník Greenwich, orientace os:  $X = -Y\_JTSK$ ,  $Y = -XS\_JTSK$

Vojenské souřadnicové systémy: 3D (WGS84), 2D (UTM, UPS, LCC, MERC), 1D (BpV).

# 17. ETRS 89

---

European Terrestrial Reference System.

Primární systém zeměpisných souřadnic pro Evropu, vznikl s rozvojem GPS.  
Snaha o přechod od národních (lokálních) systému k celoevropskému (globálnímu).

Fixován na Euroasijskou desku (pohybuje se s ní), vztažen k elipsoidu GRS.  
Souřadnicové osy se posunují a natáčejí s touto deskou.

Definován souborem geocentrických souřadnic vybraných bodů + změny polohy v čase.  
Počátek v těžišti Země, vliv precese, nutace, drift kontinentů.

Průběžně aktualizován (s dvouletým zpožděním), hovoříme o tzv. **realizacích**.

ETRS prakticky realizován:

- ▣ ETRF (European Terrestrial Reference Frame): 89, 90, 2000, 2014 (poslední).
- ▣ příslušnými konstantami a algoritmy.

S-JTSK: počátek definován pevně, nemění se (astronomická orientace).

ETRS: počátek spjat s Euroasijskou deskou, pohybuje se.

Jak zpracovat měření GPS měřené k ETRS do S-JTSK?

Pro převod mezi S-JTSK a ETRS vytvořen mezistupeň: S-JTSK/05.

# 18. S-JTSK/05

---

Používán od 2. ledna 2011.

Mezistupeň při zpracování dat měřených v systému ETRF do S-JTSK.

Představuje **modifikované** Křovákovo zobrazení.

Pro transformaci výšek využíván model kvazigeoidu CR-2005.

Myšlenky:

- Mezi souřadnicemi ETRF a S-JTSK/05 platí exaktní vztah.
- Mezi souřadnicemi S-JTSK/05 a SJTSK posuny (proměnné)  $dx$ ,  $dy$

$$\begin{aligned} Y_{JTSK} &= Y_{JTSK/05} - 500000 - dy, \\ X_{JTSK} &= X_{JTSK/05} - 500000 - dx, \end{aligned}$$

určené ze sítě trigonometrických bodů se známou polohou v obou systémech.

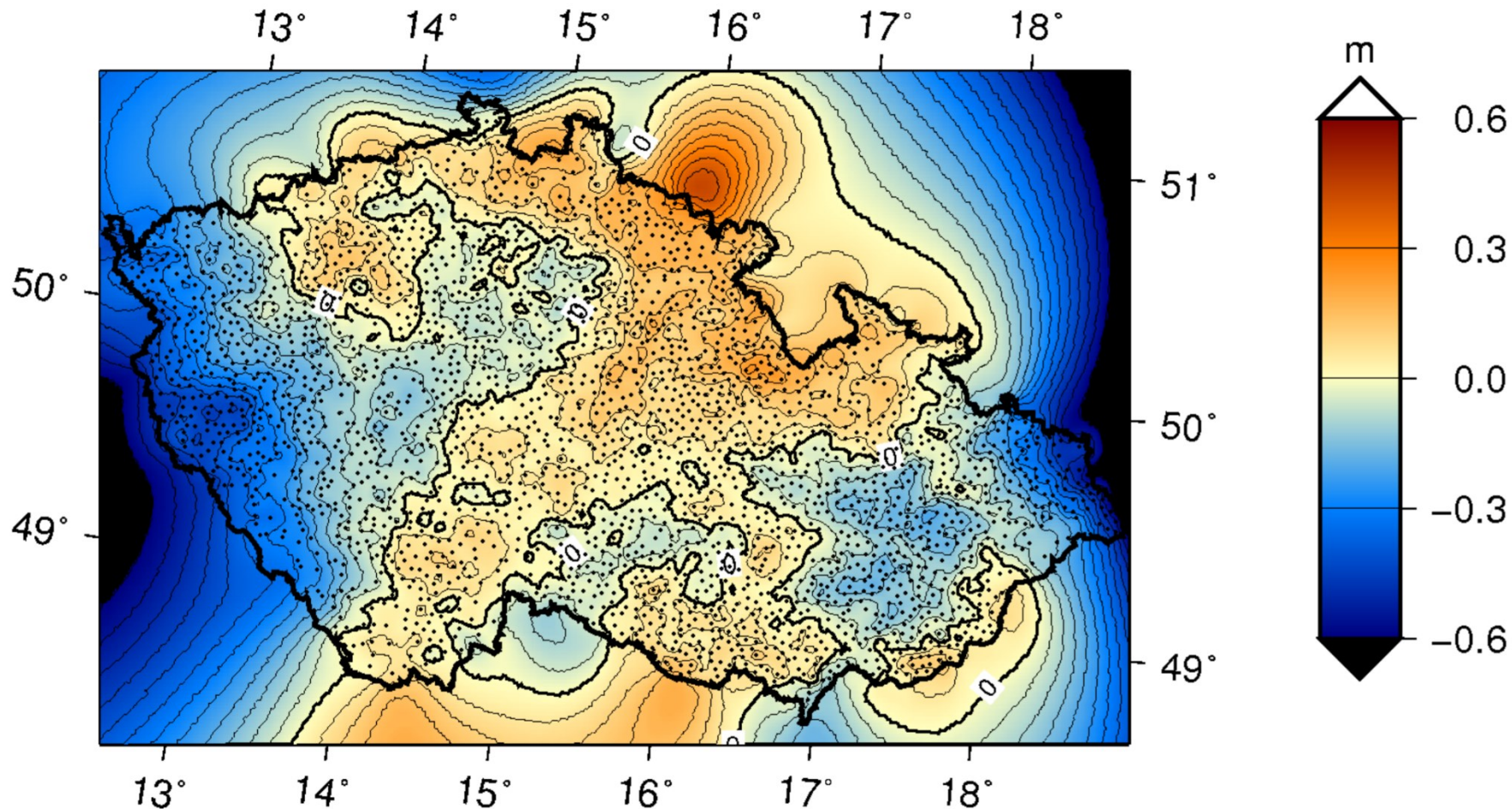
Posuny nejsou konstantní, ale proměnné.

Interpolovány do sítě s krokem 2km.

Střední kvadratická hodnota polohové odchylky mezi S-JTSK a S-JTSK/05 je 13.3 cm.

Pro práce s přesností menší než 0.5m lze rozdíly mezi oběma systémy zanedbat.

# 19. Odchylky mezi S-JTSK a S-JTSK/05



# 20. S-JTSK/05, princip převodu

## S - JTSK/05

