Matematické metody v kartografii

Členění kartografických zobrazení.

Zobrazení z elipsoidu na kouli

(5.)

1. Členění kartografických zobrazení:

Existuje velké množství karografických zobrazení.

Lze je členit podle různých kritérií.

Nejčastěji používaná kritéria:

- Podle kartografických zkreslení
- Podle tvaru obrazu geografické sítě

2. Členění podle kartografických zkreslení

- **Konformní (úhlojevné) zobrazení:**

Nezkreslují úhly, velké zkreslení ploch.

- **Ekvidistantní (délkojevné) zobrazení:**

Nezkreslují délky v určitém směru. Neexistuje zobrazení, které by nezkreslovalo délky ve všech směrech.

- **Ekvivalentní (plochojevné) zobrazení:**

Nezkreslují plochy, velké zkreslení úhlů.

- **Vyrovnávací (kompenzační) zobrazení:**

Zkreslují vše, snaha o minimalizaci jednotlivých zkreslení.

3. Členění podle tvaru obrazu geografické sítě

Kritérium popisuje způsob vzniku obrazu geografické sítě.

Rozdělení do 6 kategorií:

1) Zobrazení z elipsoidu na kulovou plochu
2) Jednoduchá zobrazení
3) Nepravá zobrazení
4) Polykónická zobrazení
5) Polyedrická zobrazení
6) Neklasifikovaná zobrazení

Kartografická projekce:

Zobrazení vzniklé geometrickou cestou, promítáním na rovinu či plášť válce.

Zařazeny do skupiny jednoduchých zobrazení.

4. Jednoduchá a nepravá zobrazení

Jednoduchá zobrazení

=zobrazují na plochu rozvinutelnou do roviny

Dělení na:

- Kuželová zobrazení
- Válcová zobrazení
- Azimutální zobrazení

$$\boxed{\begin{aligned} x &= f(u) \\ y &= g(v) \end{aligned}}$$

Nepravá zobrazení

Snaha o eliminaci některých nevhodných vlastností jednoduchých zobrazení (rychlý růst zkreslení).

Dělení na

- Nepravá kuželová zobrazení (pseudokuželová)
- Nepravá válcová zobrazení (pseudoválcová)
- Nepravá azimutální zobrazení (pseudoazimutální)

$$\boxed{\begin{aligned} x &= f(u,v) \\ y &= g(u) \end{aligned}}$$

5. Mnoho kuželová, polyedrická, neklasfikovaná zobrazení.

Mnohokuželová zobrazení (polykónická)

Zobrazování probíhá na nekonečný počet kuželů.
Kužely jsou tečné, na každý z nich se zobrazí jedna dotyková rovnoběžka.

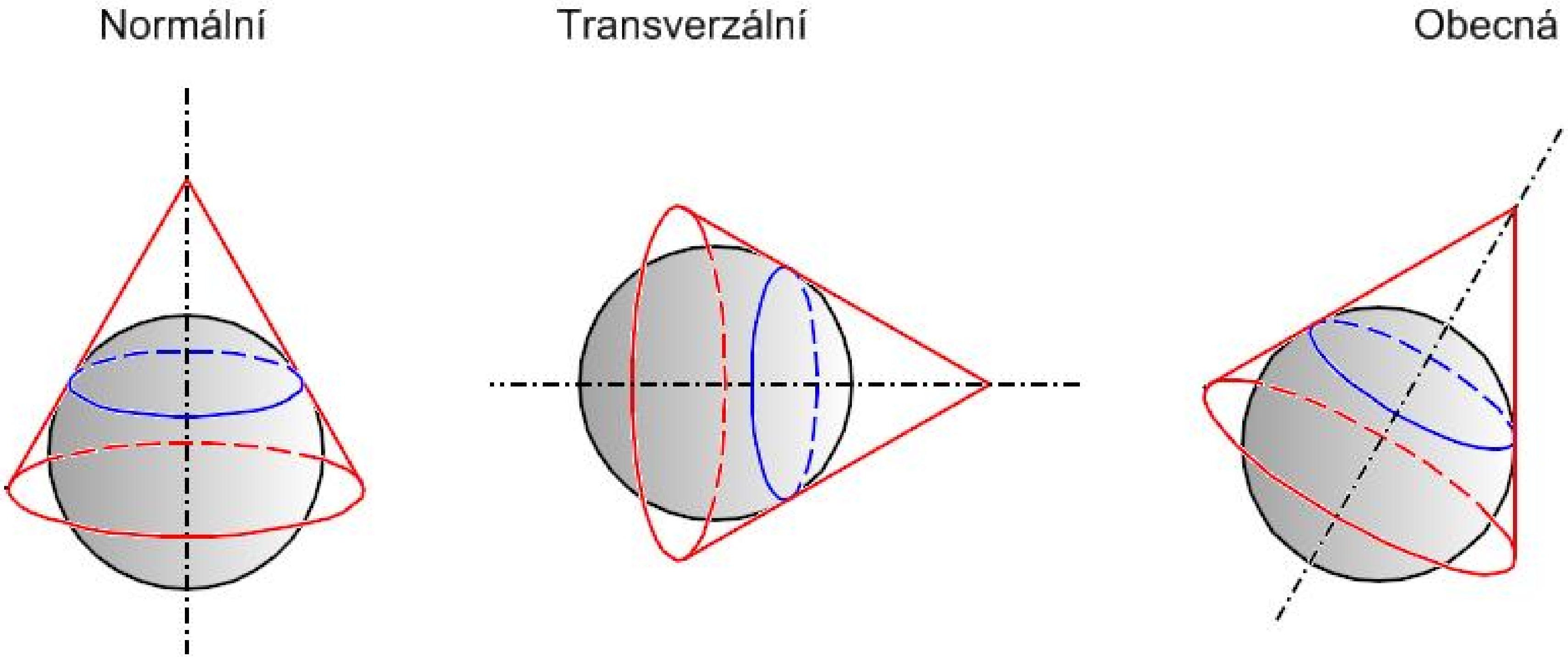
Polyedrická zobrazení (mnohostěnná)

Nejedná se o nový způsob zobrazení.
Rozdělení zobrazovaného území na části, každá část zobrazována samostatně (i za použití různých kartografických zobrazení.

Neklasifikovaná zobrazení

Ostatní zobrazení, která není možno zařadit do některé z předchozích skupin.

6. Jednoduchá kuželová zobrazení

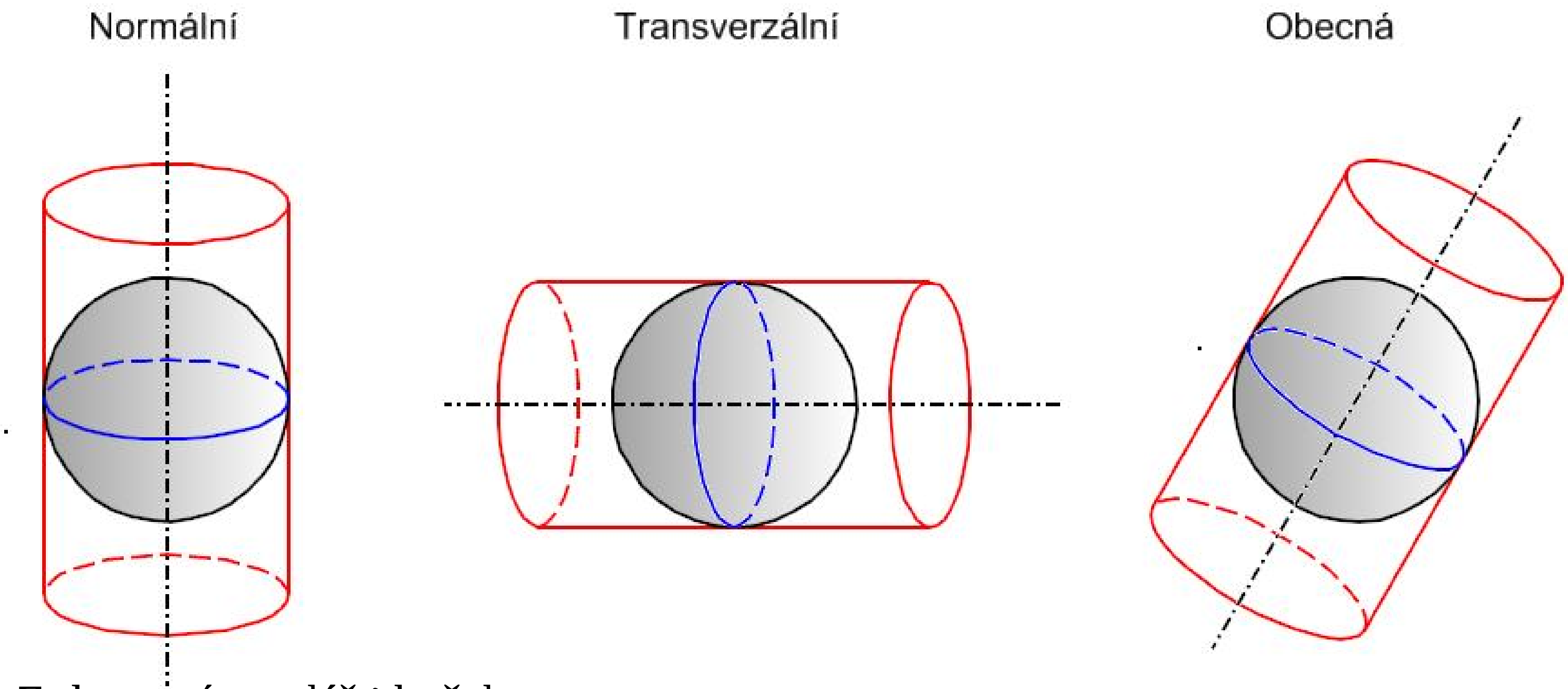


Kužel: tečný nebo sečný.

- Tečný kužel=1 nezkreslená (dotyková) rovnoběžka.
- Sečný kužel=2 nezkreslené rovnoběžky, nesymetrické.

Nejmenší hodnoty zkreslení: kolem nezkreslené rovnoběžky/rovnoběžek.

7. Jednoduchá válcová zobrazení



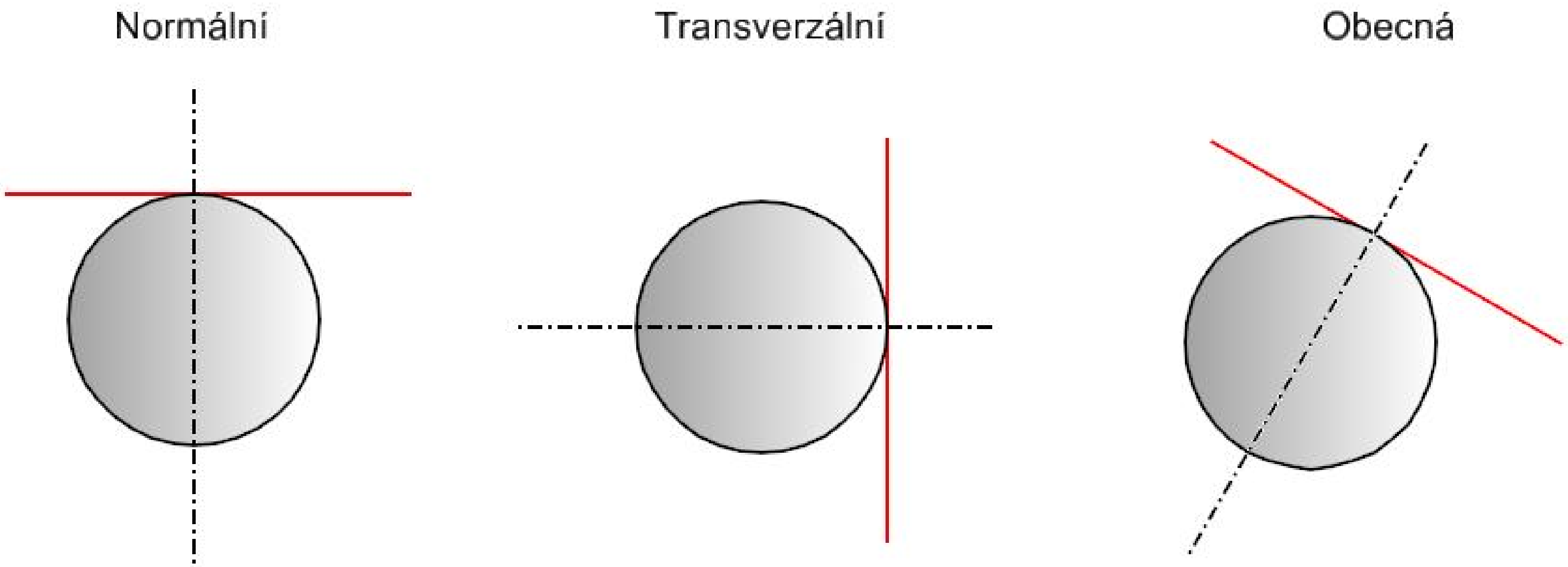
Zobrazení na plášť kužele.

Válec: tečný nebo sečný.

- Tečný válec=1 nezkreslená (dotyková) rovnoběžka.
- Sečný válec=2 nezkreslené rovnoběžky, symetrické.

Nejmenší hodnoty zkreslení: kolem nezkreslené rovnoběžky/rovnoběžek.

8. Jednoduchá azimutální zobrazení



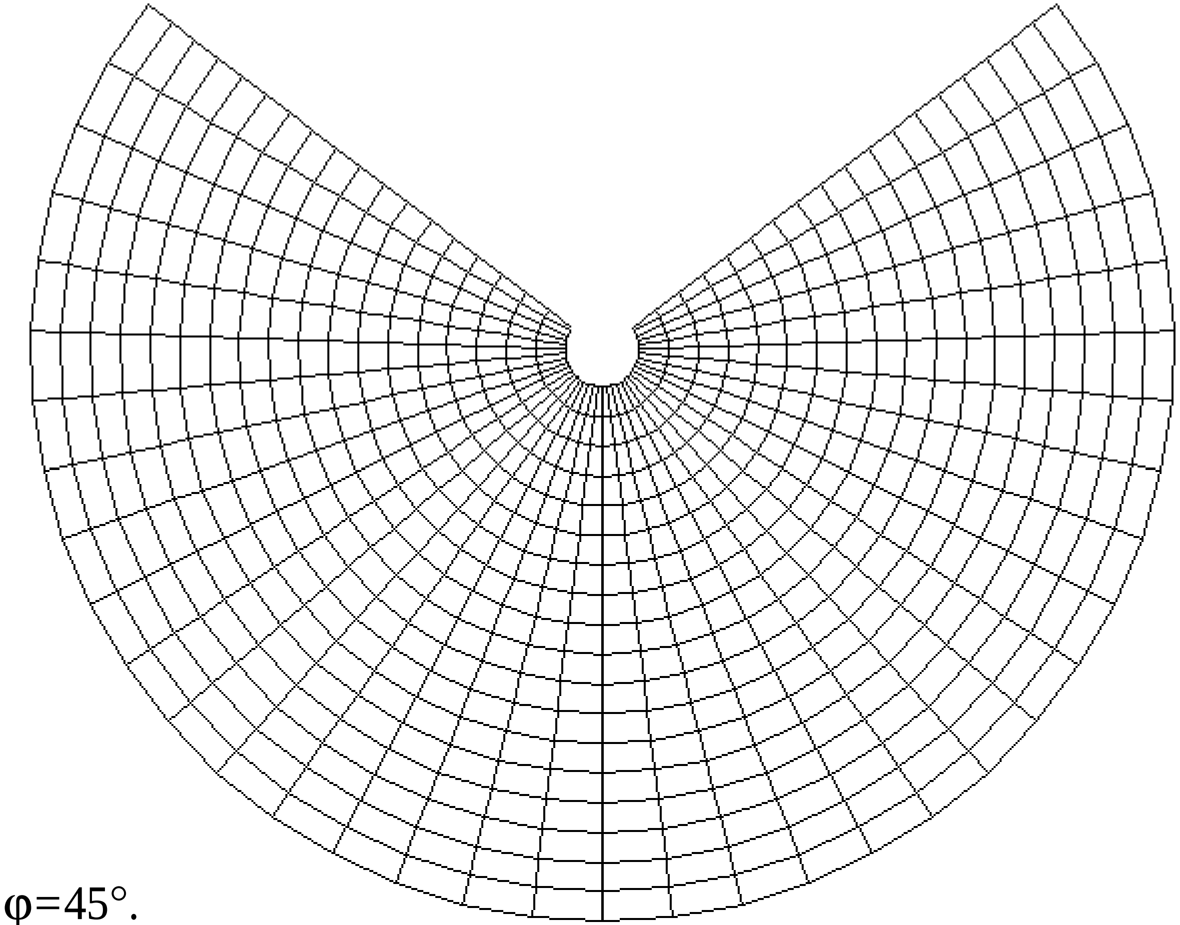
Normální poloha ***Transverzální poloha*** ***Obecná poloha***

Zobrazení na tečnou rovinu.

Nejmenší zkreslení: v dotykovém bodě.

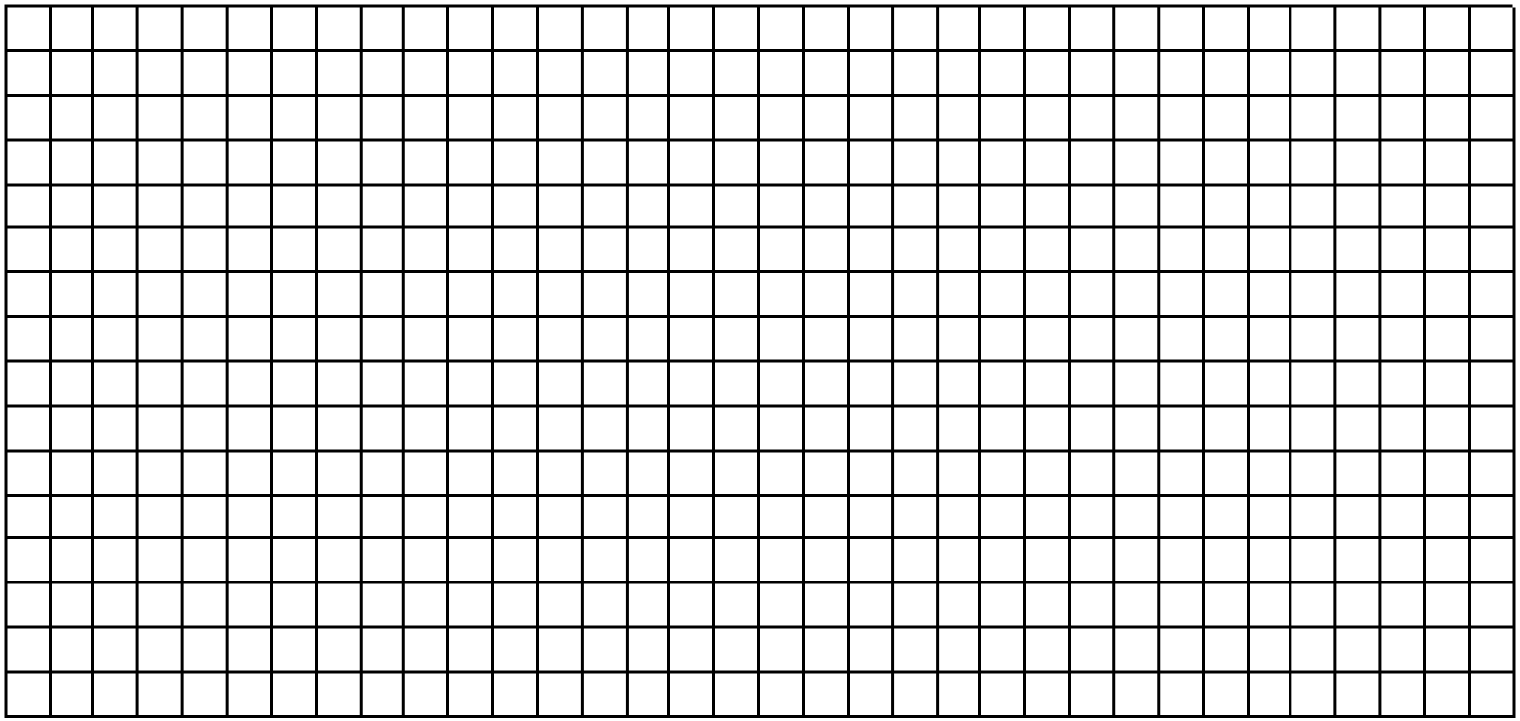
Použití pro mapy polárních oblastí.

9. Ukázka kuželového ekvidistantního zobrazení



Geografická síť:
Normální poloha.
1 nezkrelená rovnoběžka φ=45°.
Tečný kužel.

10. Ukázka válcového ekvidistantního zobrazení

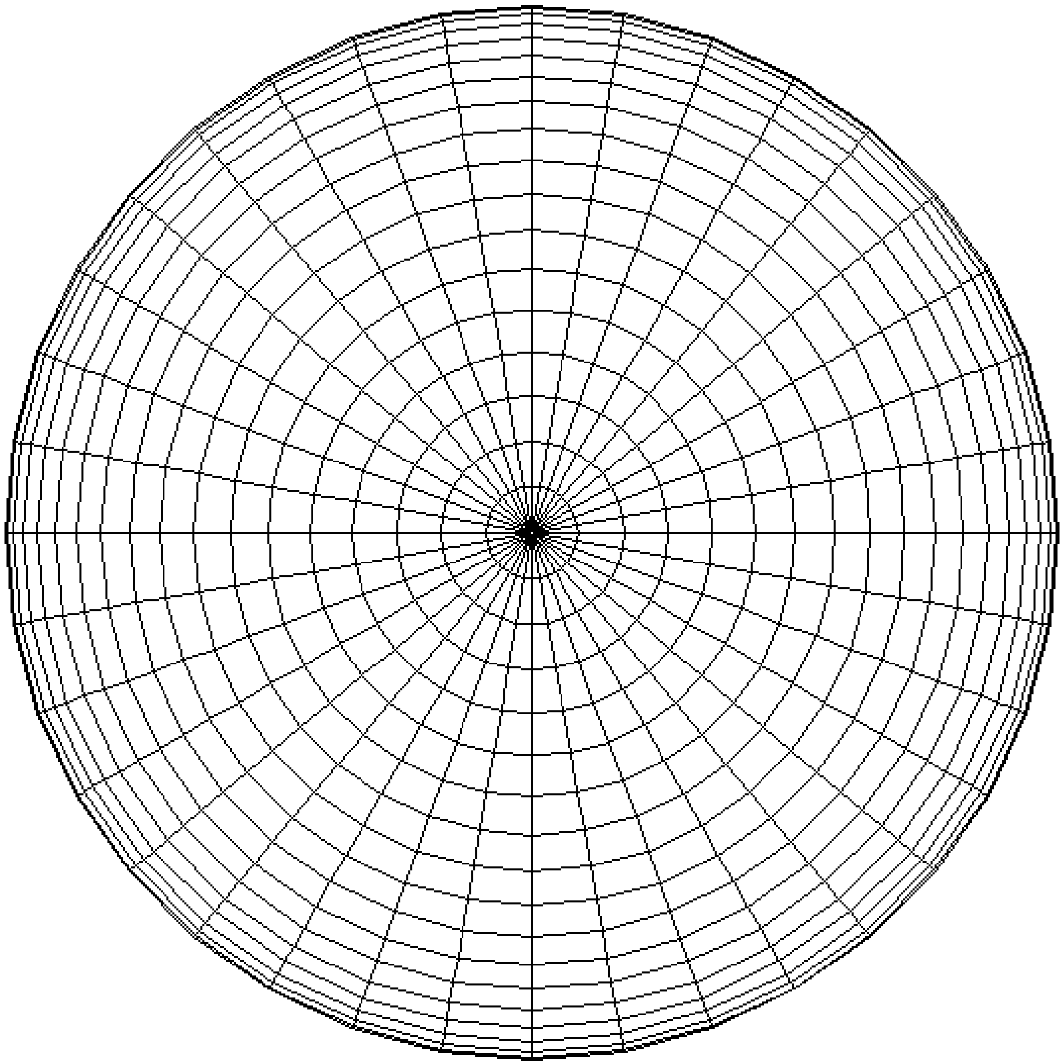


Geografická síť:

Normální poloha.1 nezkrelená rovnoběžka $\varphi=0°$.

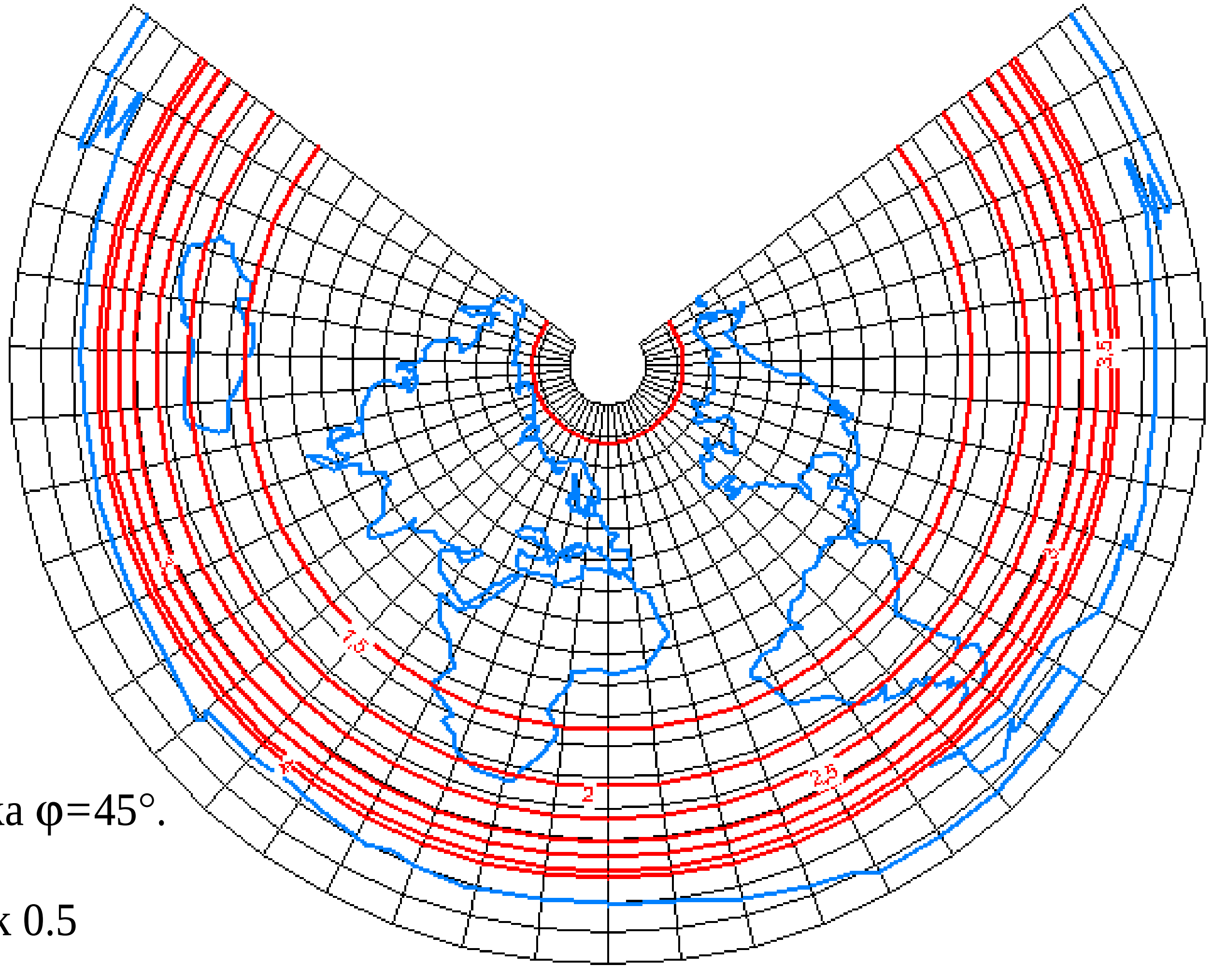
Tečný válec.

11. Ukázka azimutálního ekvidivalentního zobrazení



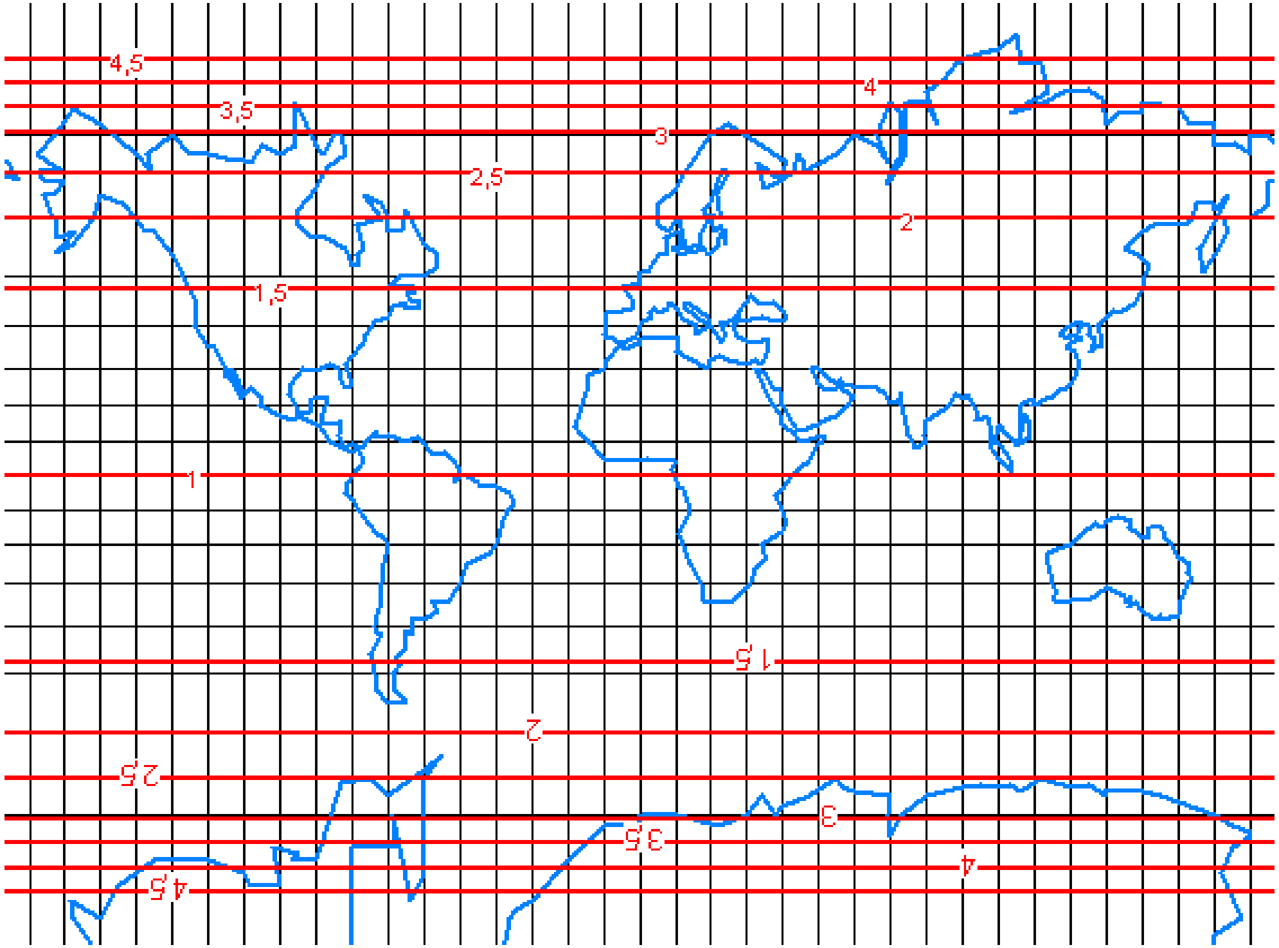
Geografická síť:
Normální poloha.
Dotykový bod φ=90°.

12. Ukázka ekvideformát kuželového ekvidistantního zobrazení



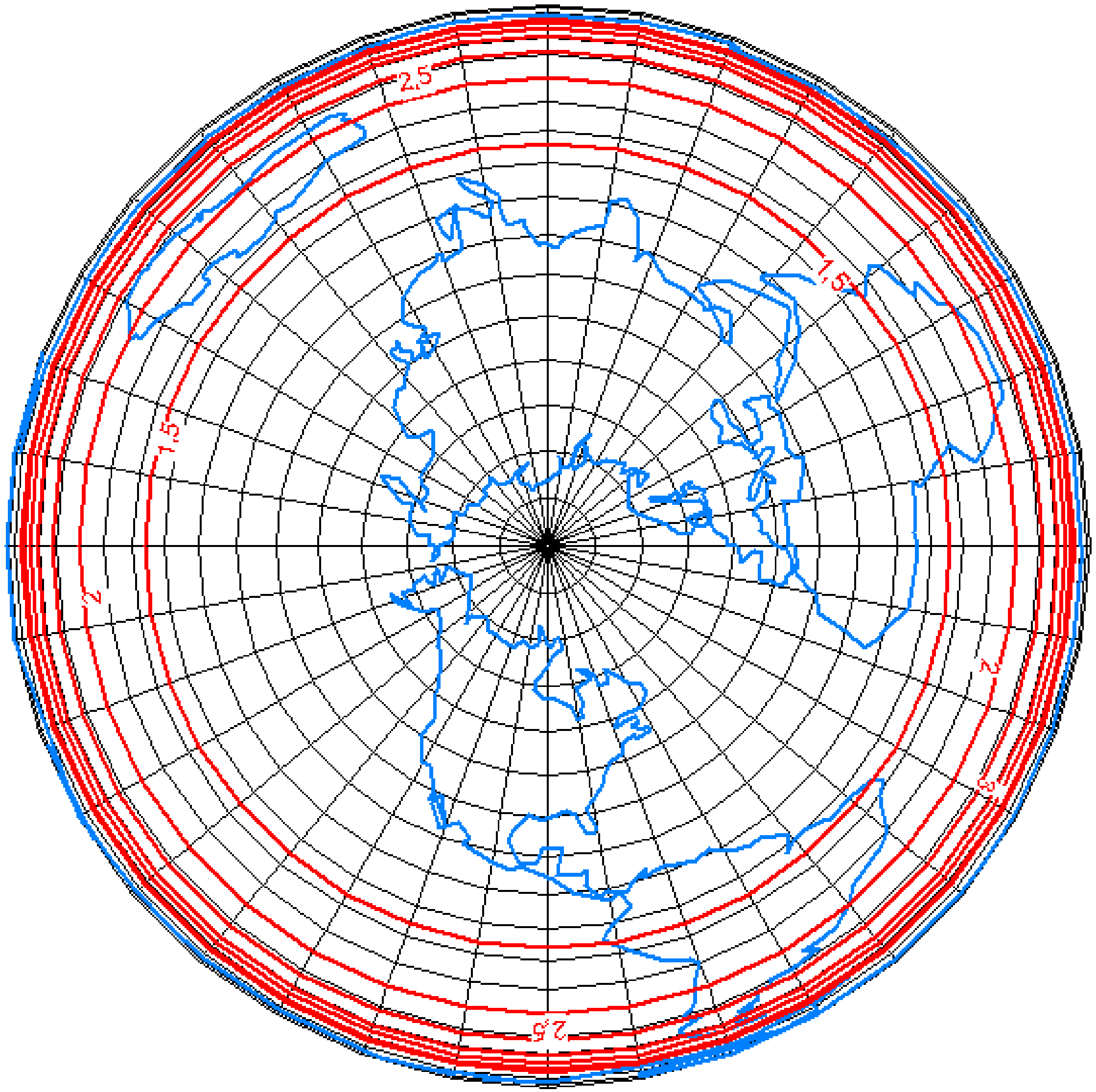
Geografická síť:
Normální poloha.
1 nezkrelená rovnoběžka φ=45°.
Tečný kužel.
Ekvideformáty m_p, krok 0.5
Interval <1,4>

13. Ukázka ekvideformát válcového konformního zobrazení



Geografická síť:
Normální poloha.
1 nezkrelená rovnob. φ=0°.
Tečný válec.
Ekvideformáty m_p, krok 0.5
Interval <1,4.5>

14. Ukázka ekvideformát azimutálního ekvivalentního zobrazení



Geografická síť:
Normální poloha.
Dotykový bod φ=90°.
Ekvideformáty m_p, krok 0.5
Interval <1,4.5>

15. Zobrazení referenčního elipsoidu na kouli

Společné vlastnosti:

- Používá se při požadavku přesné polohové lokalizace bodů, jinak postačuje referenční koule.
- Typické využití: velkoměřítkové mapy (u nás JTSK)
- Geografie a maloměřítkové mapování: nepoužívají se
- Obrazy poledníků: úsečky
- Obrazy rovnoběžek: obecné křivky
- Obrazy poledníků a rovnoběžek jsou na sebe kolmé: ortogonální zobrazení
- Pól se zobrazí jako bod

16. Zobrazovací rovnice a zkreslení

Délkový element v poledníku a rovnoběžce:

$$d_{pol} = M d j$$

$$d_{rov} = N \cos j \; \cos l$$

Zobrazovací rovnice:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= f(j) \\ v &= a g(l) \end{aligned}}$$

α je konstanta zobrazení

Výchozí požadavek: Δλ odpovídá Δv.

Tři situace:

- α<1: elipsoid nepokryje celou kouli
- α=1: elispoid pokryje celou kouli
- α>1: některé části elipsoidu se na kouli nezobrazí.

Kartografická zkreslení:

$$m_p = \frac{R du}{M d j} \qquad P = m_p m_r$$

$$m_r = a \frac{R \cos u dv}{N \cos j \, d l} \qquad \sin \frac{\Delta w}{2} = \frac{|m_r - m_p|}{m_r + m_p}$$

17. Zobrazení se zachovanými zeměpisnými souřadnicemi

Poměrně často používané, v podstatě zanedbáváme elipsoid => jako výchozí referenční plochu používáme kouli.

Zobrazení zkresluje vše, pro R=a na rovníku $m_r=1$.

Zobrazovací rovnice: $$u = j$$ $$v = a\, l \quad \text{zde } a = 1$$

Kartografická zkreslení:

$$m_p = \frac{R}{M} \qquad P = \frac{R^2}{MN}$$

$$m_r = \frac{R}{N}, \text{protože } (u \approx j) \qquad \sin\frac{\Delta w}{2} = \frac{M-N}{M+N}$$

Volba R:

$$R = a$$
$$R = b$$
$$R = M$$
$$R = N$$
$$R = \sqrt{MN}$$

$$R = \sqrt[3]{a^2 b} \text{...stejný povrch}$$

$$R = \sqrt{\frac{2a^2 + b^2}{3}} \text{...stejný objem}$$

18. Konformní zobrazení

Využito v Křovákově zobrazení, pro velkoměřítkové mapy Švýcarska.
Odvodil J. F. Gauss

Podmínka: $m_p = m_r \cap p = 0$.

$$\frac{Rdu}{Mdj} = \frac{R\cos u dv}{N\cos j\, d\, l}$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = a \int \frac{M}{N\cos j} dj = a \int \frac{(1-e^2)dj}{(1-e^2\sin^2 j)\cos j}$$

$$tg\left(\frac{u}{2}+45\right) = \frac{1}{k}\left(tg\left(\frac{j}{2}+45\right)\left(\frac{1-e\sin j}{1+e\sin j}\right)^{\frac{e}{2}}\right)^{a}$$

$$v = a\, l$$

Zkreslení:

$$m = \frac{aR\cos u}{N\cos j}$$

$$P = m^2 = \left(\frac{aR\cos u}{N\cos j}\right)^2$$

Kontanty zobrazení: α, k, R.

Jak je určit:

a) Souvislé zobrazení elipsoidu na kouli

b) Zobrazení části elipsoidu na část koule

19. Volba konstanty pro souvislé zobrazení

Výsledkem je souvislé zobrazení celého elipsoidu na kouli.

Požadavek:

- rovníku odpovídá rovník , tj. $\varphi=0 => v=0$

Konstanty:

$\alpha=1$, $k=1$, $R=a$

Důsledek:

- Nezkreslený rovník
- Se vzdáleností od rovníku hodnoty zkreslení narůstají
- Nevhodné pro severně/jižně rozložená území

20. Volba konstanty pro zobrazení části elipsoidu na část koule

Výsledkem je nesouvislé zobrazení části elipsoidu na část koule.

Symbolika: φ_0 …nezkreslená rovnoběžka

φ_s …severní rovnoběžka (okrajová) $\quad j_j < j_0 < j_s$

φ_j …jižní rovnoběžka (okrajová)

Použito u Křovákova zobrazení:
u_0=49°27¢35.84625²
a =1.0005974984
R=6380703.6105m

Délkové zkreslení: $m = f(j) = f(j_0 + \Delta j)$

Aproximace Taylorovým polynomem:

$$m = f(j_0) + f'(j_0)\Delta j + f''(j_0)\frac{\Delta j^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(j_0)\frac{\Delta j^n}{n!} + R_{n+1}$$

3 podmínky: f(φ)=1, f´(φ)=0, f´´(φ)=0, z nich α,k, R

$$a = \sqrt{1 + \frac{e^2 \cos^4 j_0}{1 - e^2}} \qquad k = \frac{tg^a\left(\frac{j_0}{2} + 45\right)\left(\frac{1 - e\sin j_0}{1 + e\sin j_0}\right)^{\frac{ae}{2}}}{tg\left(\frac{u_0}{2} + 45\right)} \qquad R = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 j_0} \qquad \sin u_0 = \frac{\sin j_0}{a}$$