

Konstrukce globů na platonských tělesech, návod na cvičení

Tomáš Bayer, Přírodovědecká fakulta UK

1 Úvod

Při konstrukci polyedrických globů na platonských tělesech vycházíme z předpokladu, že rovina definovaná stranou platonského tělesa a středem sféry tělesu vepsané/vepsané řeže tuto sféru v hlavní kružnici, ortodromě. Obrazem ortodromy v gnomonické projekci je polopřímka. Hranice plošek platonských těles v gnomonické projekci tedy budou opět úsečky. Celou sféru lze tedy po částech znázornit na povrch platonského tělesa bez překrytí či spár.

Celý postup tvorby polyedrického globu je tvořen několika kroky. Nejprve jsou určeny zeměpisné souřadnice vrcholů platonského tělesa tvořících vrcholy pravidelného n -úhelníku (plošky). Do těžiště každé plošky platonského tělesa, jehož zeměpisné souřadnice je nutno určit, umístíme kartografický pól K . V plošce vygenerujeme síť poledníků a rovnoběžek vztahených k pólu K . Načteme soubor s navzorkovanými body kontinentů. Body na sféře, které by se zobrazily na příslušné plošce platonského tělesa, budou přetransformovány vzhledem k jejímu centru, tj. ke kartografickému pólu K , a následně zobrazeny v gnomonické projekci. Nakonec kresbu ořízneme dle spojnic vrcholů n -úhelníku (platonské plošky). Postup opakujeme pro všechny plošky platonského tělesa.

2 Platonská tělesa

Platonská tělesa (viz Obr. 1) představují taková tělesa, jejichž strany jsou tvořeny stejnými pravidelnými n -úhelníky. Existuje 5 platonských těles: čtyřstěn, krychle (šestistěn), osmistěn, dvanáctistěn, a dvacetistěn. Každému platonskému tělesu lze opsat i vepsat sféru. Na cvičeních budeme z důvodu jednoduchosti glóby konstruovat na čtyřstěnu, šestistěnu a osmistěnu; výklad se soustředí na tato tři platonská tělesa.

2.1 Pravidelný čtyřstěn

Stěny pravidelného čtyřstěnu (viz Obr. 2) tvoří rovnostranné trojúhelníky. Výšku stěny v_s pravidelného čtyřstěnu s délkou hrany a lze určit např. z $\triangle(A, E, D)$ Pythagorovou větou

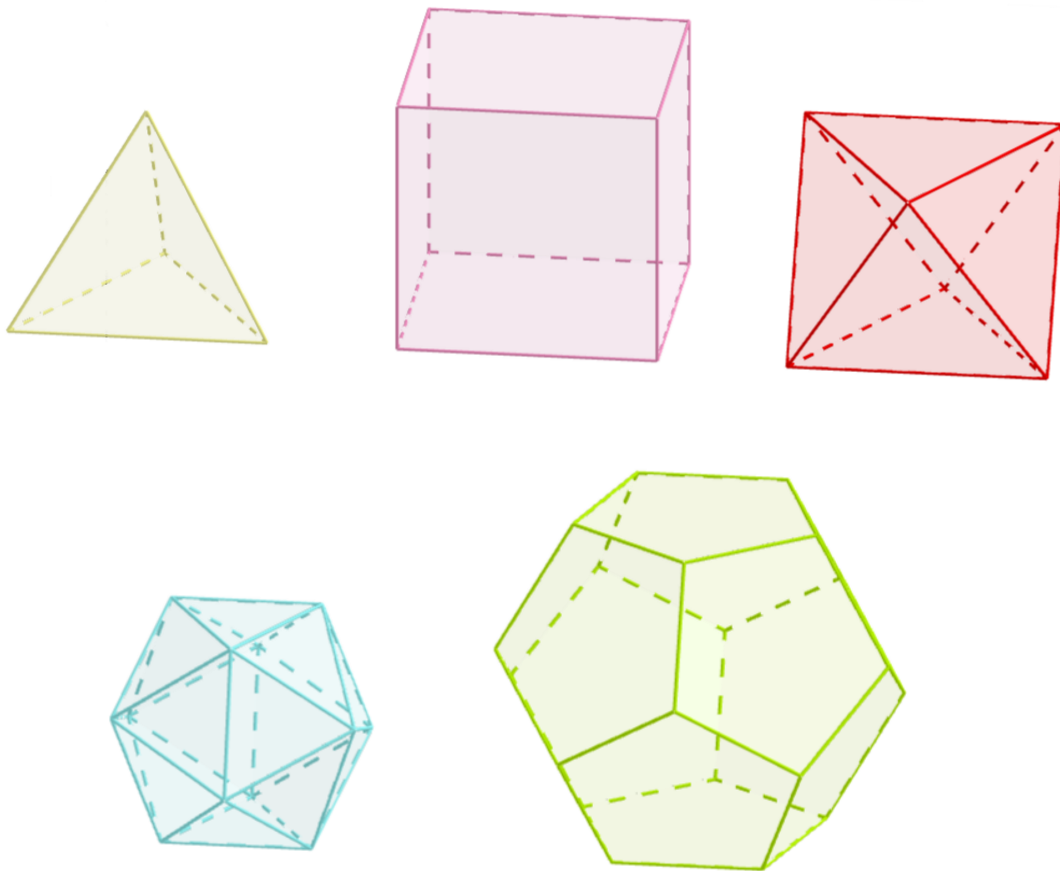
$$v_s = |ED| = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Výšky všech stěn jsou stejné. Protože ED je těžnice $\triangle(A, B, D)$, pak $|LE| = |ED|/3$. Tělesovou výšku v_t lze určit z $\triangle(C, E, L)$ pomocí

$$v_t = |CL| = \sqrt{|CE|^2 - |LE|^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{a^2}{12}} = \sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

Poloměr sféry vepsané do čtyřstěnu je

$$r = |FO| = |LE| = \frac{\sqrt{3}}{6}a.$$



Obrázek 1: Platonská tělesa: čtyřstěn, krychle (šestistěn), osmistěn, dvacetistěn, dvanáctistěn.

Úhel mezi úsečkami CL a CE představuje hledanou zeměpisnou šířku u bodu C (vrcholu)

$$\sin u = \frac{|LE|}{|CE|} = \frac{|ED|}{3|ED|} = \frac{1}{3}.$$

Body A, B, C leží na jižní polokouli, proto zeměpisná šířka $u_j = -u = 19.4712^\circ$ je tedy záporná. Pokud základní poledník vedeme bodem A , zeměpisné souřadnice vrcholů čtyřstěnu A, B, C, D jsou

$$A = [u_j, 0^\circ], \quad B = [u_j, 120^\circ], \quad C = [u_j, 240^\circ], \quad D = [90^\circ, \cdot].$$

Kartografický pól leží v těžišti každé plošky čtyřstěnu, jeho zeměpisná šířka u_k je pro šikmé plošky rovna $u_k = u$, pro podstavu $u_k = -90^\circ$. Zeměpisné souřadnice kartografických pólů K, L, M, N jsou

$$K = [u, 60^\circ], \quad L = [u, 180^\circ], \quad M = [u, 300^\circ], \quad N = [-90^\circ, \cdot].$$

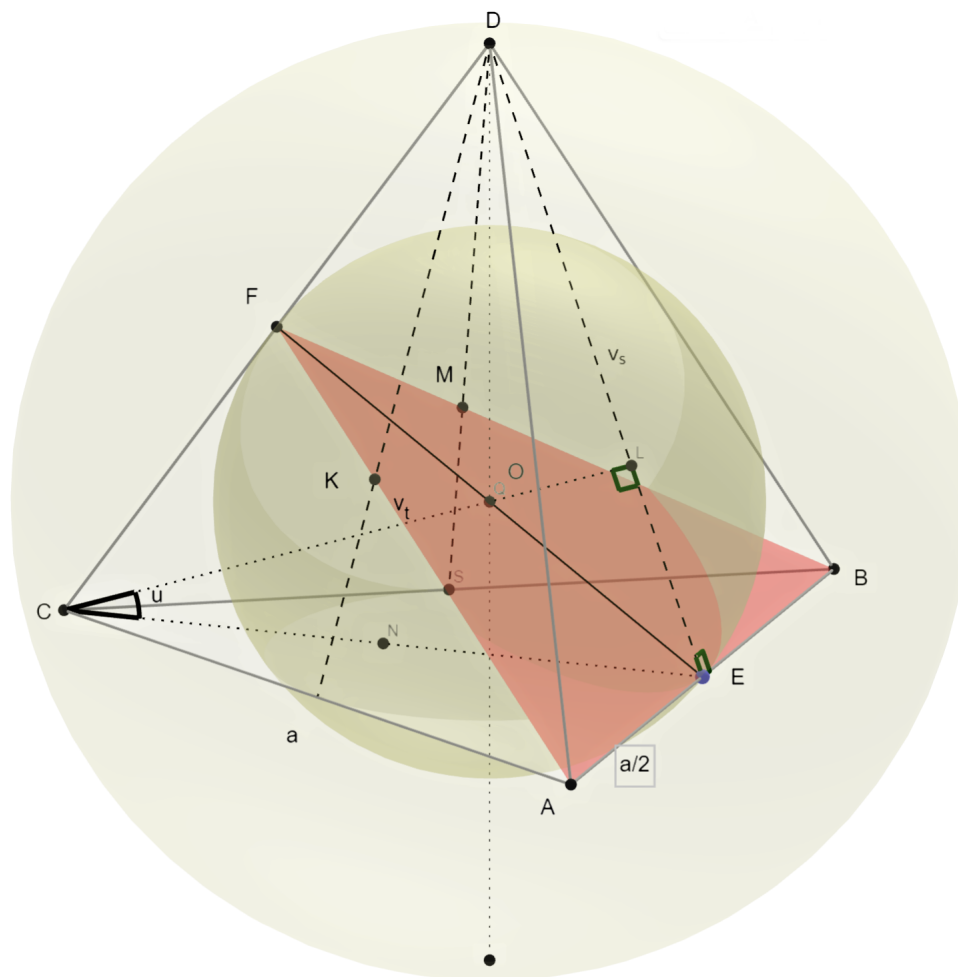
2.2 Krychle

Stěny krychle (viz Obr. 3) s délkou hrany a tvoří čtverce. Stěnová úhlopříčka AC má délku

$$v_s = AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

Z $\triangle(A, C, G)$ určíme tělesovou úhlopříčku

$$v_t = |AG| = \sqrt{u_s^2 + a^2} = \sqrt{3}a.$$



Obrázek 2: Geometrie čtyřstěnu.

Poloměr sféry vepsané do krychle je $r = a/2$. Úhel mezi úsečkami AG a AC představuje hledanou zeměpisnou šířku u bodu G (vrcholu)

$$\tan u = \frac{a}{u_s} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vrcholy $A - D$ leží na jižní polokouli, $u_j = -u = -35.2644^\circ$, vrcholy $E - H$ na severní polokouli. Základní poledník zvolíme tak, aby procházel bodem A . Souřadnice vrcholů $A - D$ čtyřstěnu jsou

$$A = [u_j, 0^\circ], \quad B = [u_j, 90^\circ], \quad C = [u_j, 180^\circ], \quad D = [u_j, 270^\circ],$$

souřadnice vrcholů $E - H$ jsou symetricky sdružené vzhledem k rovníku

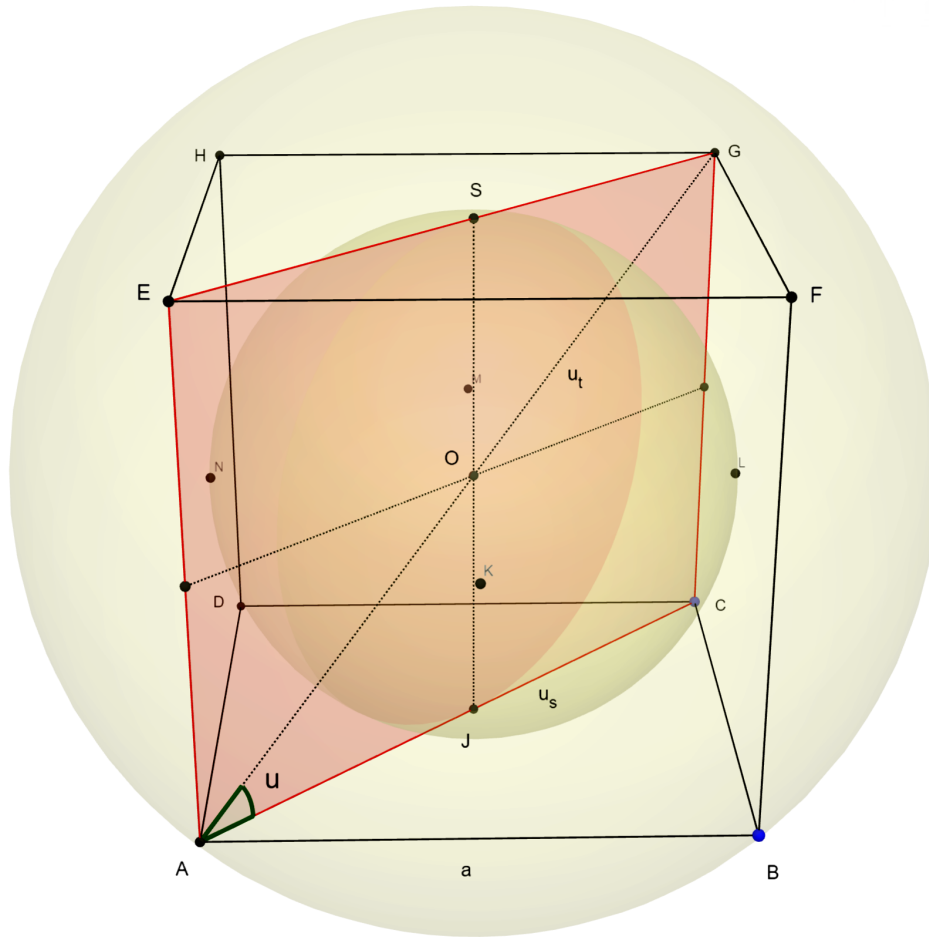
$$E = [u, 0^\circ], \quad F = [u, 90^\circ], \quad G = [u, 180^\circ], \quad H = [u, 270^\circ].$$

Kartografické póly K, L, M, N, S, J jsou voleny ve středech stěn krychle (plošek)

$$K = [0, 45^\circ], \quad L = [0, 135^\circ], \quad M = [0, 225^\circ], \quad N = [0^\circ, 315^\circ], \quad S = [90^\circ, \cdot], \quad J = [-90^\circ, \cdot].$$

2.3 Pravidelný osmistěn

Výšku stěny v_s pravidelného osmistěnu (viz Obr. 4) s délkou hrany a lze určit např. z $\triangle(E, G, C)$ Pythagorovou větou



Obrázek 3: Geometrie šestistěnu (krychle).

$$v_s = |EG| = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Tělesová úhlopříčka je úhlopříčkou čtverce se stranou a

$$v_t = |AC| = \sqrt{2}a.$$

Protože EG je těžnice $\triangle(E, B, C)$, pak $|IG| = |EG|/3$. Poloměr sféry vepsané do osmistěnu je

$$r = \sqrt{|OG|^2 - |IG|^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{1}{12}a^2} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Úhel mezi úsečkami OI a OG představuje hledanou zeměpisnou šířku u bodu I (vrcholu)

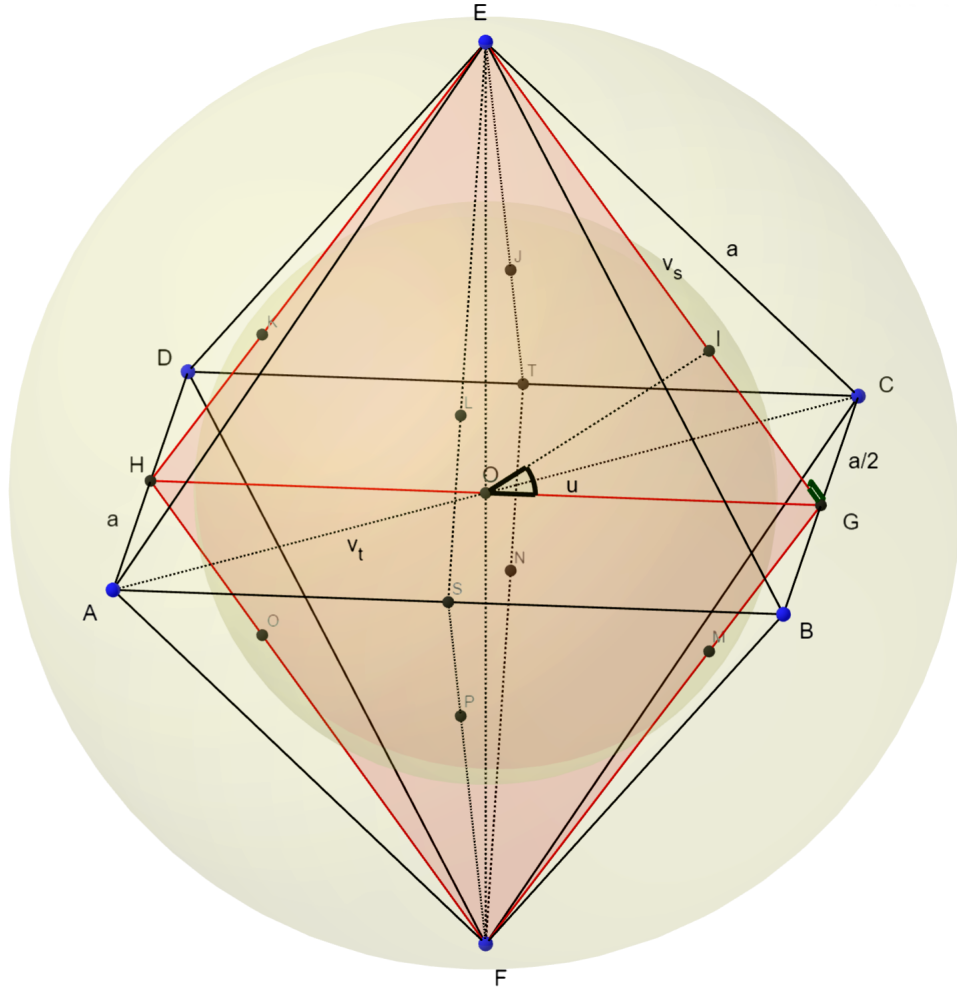
$$\sin u = \frac{|IG|}{|OG|} = \frac{\sqrt{3}/6a}{a/2} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

kde $u = 35.2644^\circ$. Vrcholy $A - D$ osmistěnu leží na rovníku, vrcholy E, F tvoří severní a jižní pól

$$A = [0^\circ, 0^\circ], \quad B = [0^\circ, 90^\circ], \quad C = [0^\circ, 180^\circ], \quad D = [0^\circ, 270^\circ], \quad E = [90^\circ, \cdot], \quad F = [-90^\circ, \cdot].$$

Kartografické póly $I - P$ jsou voleny v těžištích rovnostranných trojúhelníků. Póly I, J, K, L leží na severní polokouli

$$I = [u, 45], \quad J = [u, 135^\circ], \quad K = [u, 225^\circ], \quad L = [u, 315^\circ],$$



Obrázek 4: Geometrie osmistěnu.

póly M, N, O, P jsou symetricky sdružené na jižní polokouli

$$M = [-u, 45], \quad N = [-u, 135^\circ], \quad O = [-u, 225^\circ], \quad P = [-u, 315^\circ].$$

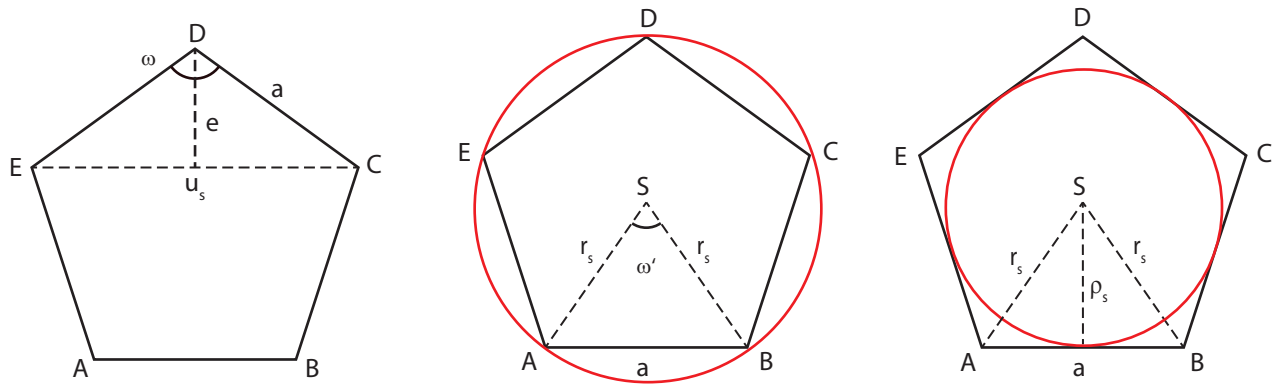
2.4 Pravidelný dvanáctistěn

Výpočet parametrů pravidelného dvanáctistěnu, jehož hrany tvoří pravidelné pětiúhelníky s délkou hrany a , je obtížnější než v předchozích případech. S ohledem na součet úhlů $S = (n - 2)\pi$ v pravidelném n úhelníku pro úhel mezi dvěma stranami pětiúhelníku platí $\omega = \frac{3}{5}\pi = 108^\circ$. Délku stěnové úhlopříčky u_s v rovnoramenném trojúhelníku CDE určíme z kosinové věty

$$u_s^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos \omega = 2a^2(1 - \cos \omega), \Rightarrow u_s = a\sqrt{2(1 - \cos \omega)} = a\frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

kde $\cos 108^\circ = -\frac{1}{1 + \sqrt{5}}$, viz Obr. 5. Poloměr $r_s = |AS|$ kružnice opsané pětiúhelníku určíme opět z rovnoramenného trojúhelníku, $\omega' = 72^\circ$, za pomoci kosinové věty

$$a^2 = 2r_s^2 - 2r_s^2 \cos \omega' = 2r_s^2(1 - \cos \omega'), \Rightarrow r_s = \frac{a}{2(1 - \cos \omega')} = \frac{a}{10}\sqrt{10(5 + \sqrt{5})},$$



Obrázek 5: Výpočet délky stěnové úhlopříčky u_s , poloměru r_s kružnice opsané a poloměru ρ_s kružnice vepsané pětiúhelníku.

kde $\cos 72^\circ = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$. Poloměr ρ_s = kružnice vepsané pětiúhelníku určíme z Pythagorovy věty

$$\rho_s^2 = r_s^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{10}(5 + \sqrt{5}) - \frac{a^2}{4}, \Rightarrow \rho_s = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}.$$

Vzdálenost e vrcholu D pravidelného pětiúhelníku od úhlopříčky CE s délkou u_s vypočteme opět Pythagorovou větou

$$e^2 = a^2 - \frac{u_s^2}{4} = a^2 - \frac{a^2}{4}(1 + \sqrt{5})^2, \Rightarrow e = \frac{a}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

V dalším kroku určíme úhel β mezi ploškami dvanáctistěnu, budeme pracovat se dvěma sousedními ploškami, tj. dolní podstavou $ABCDE$ a $CDLKJ$, viz Obr. 6. Trojúhelník BJC posuneme ve směru CD o hodnotu a tak, aby body C a D splynuly; vznikne čtyřboký jehlan EB_1J_1LD . Výšku $v = |J_2D|$ v trojúhelníku DJ_1L určíme z Pythagorovy věty. Protože

$$u_s - a = a \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - a = a \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

pak

$$a^2 = v^2 + \frac{(u_s - a)^2}{4} = v^2 + a^2 \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16} \rightarrow v = a \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}},$$

kde $\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$. Hledaný úhel B_1DJ_2 označme α , určíme ho z tohoto pravouhlého

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{u_s}{2v} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{5})}{2\sqrt{5 + \sqrt{5}}} = \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \approx 56.5825^\circ, \rightarrow \alpha = 116.5651^\circ.$$

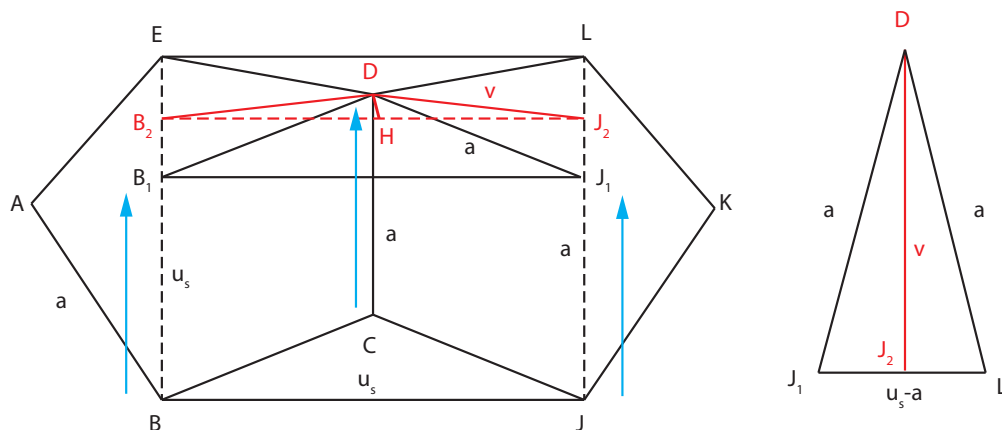
Pro další odvození předpokládejme, že dvanáctistěn řežeme rovinou $0AF$, viz Obr. 7. Sféra vepsaná dvanáctistěnu se středem v jeho těžišti se jej dotýká v těžišti každé ze stěn. V pětiúhelníku $FGQPO$ bude dotykovým bodem U . Pro úhel β platí

$$\beta = 180^\circ - \alpha,$$

zeměpisnou šířku bodu U určíme jako

$$u_\alpha = 90^\circ - \beta = \alpha - 90^\circ \approx 26.5651^\circ.$$

Bod $K_1 \equiv U$ je tedy kartografickým pólem použitým pro zobrazení této stěny, stejnou zeměpisnou šířku mají i středy zbývajících plošek $K_2 - K_5$ nad rovinou $z = 0$ (severní polokoule). Díky středové symetrii



Obrázek 6: Čtyřboký jehlan $A_1F_1F_2A_2E_1$ a trojúhelník $F_2A_2E_1$.

vrcholů dvanáctistěnu vzhledem k bodu 0 platí pro středy plošek $K_6 - K_{10}$ na jižní polokouli $u_j = -u_\alpha$. Rovina základního poledníku bude totožná s rovinou řezu AF_0 , zeměpisná délka bodu K_1 je $v_1 = 36^\circ$, zeměpisné délky ostatních kartografických pólů mají odlehlost 72° . Pro kartografické póly $K_1 - K_5$ tedy platí

$$K_1 = [u_\alpha, 0^\circ], \quad K_2 = [u_\alpha, 72^\circ], \quad K_3 = [u_\alpha, 144^\circ], \quad K_4 = [u_\alpha, 216^\circ], \quad K_5 = [u_\alpha, 288^\circ],$$

pro kartografické póly $K_6 - K_{10}$

$$K_6 = [-u_\alpha, 36^\circ], \quad K_7 = [-u_\alpha, 108^\circ], \quad K_8 = [-u_\alpha, 180^\circ], \quad K_9 = [-u_\alpha, 252^\circ], \quad K_{10} = [-u_\alpha, 324^\circ],$$

zbylé dva kartografické póly K_{11}, K_{12} se nacházejí v severním a jižním pólu.

Poloměr sféry vepsané dvanáctistěnu označme jako $\rho = |OU|$. Z pravoúhlého trojúhelníku $0UV$ vyplývá, že

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{\rho_s}, \rightarrow \rho = \rho_s \tan \frac{\alpha}{2}.$$

Protože

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{10 - 2\sqrt{5}}},$$

platí

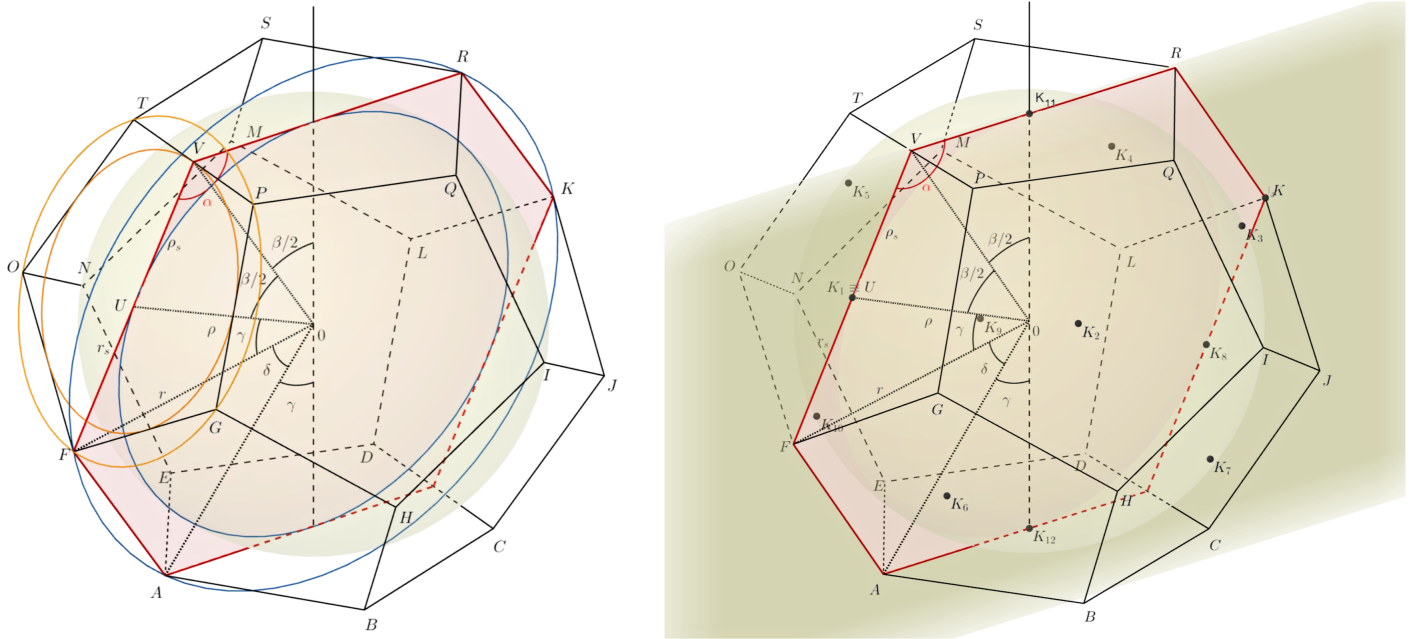
$$\rho = \rho_s \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{20} \sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})}.$$

Sféra opsaná dvanáctistěnu bude procházet body $ACKSPF$ řezu, její poloměr označíme jako $r = |OF|$, určíme ho z pravoúhlého trojúhelníku $0UF$

$$r = \sqrt{r_s^2 + \rho^2} = \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})}{4} a.$$

Úhel γ spočteme ze vztahu

$$\tan \gamma = \frac{r_s}{\rho} = \frac{2a\sqrt{10(5 + \sqrt{5})}}{\sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})}} \approx 37.3774^\circ,$$



Obrázek 7: Řez dvanáctistěnem rovinou OAF odpovídající rovině základního poledníku se znázorněním určovaných parametrů.

jeho doplněk $u_\gamma = 90^\circ - \gamma \approx 52.6226^\circ$. Představuje zeměpisnou šířku vrcholů $P - T$ dvanáctistěnu, vzhledem k symetrii pro vrcholy $A - E$ platí $u_j = -u_\gamma$, ve směru zeměpisné délky v je jejich odlehlost 72° . Pro vrcholy $A - E$ platí

$$A = [-u_\gamma, 0^\circ], \quad B = [-u_\gamma, 72^\circ], \quad C = [-u_\gamma, 144^\circ], \quad D = [-u_\gamma, 216^\circ], \quad E = [-u_\gamma, 288^\circ],$$

pro vrcholy $P - T$ pak

$$P = [u_\gamma, 36^\circ], \quad Q = [u_\gamma, 108^\circ], \quad R = [u_\gamma, 180^\circ], \quad S = [u_\gamma, 252^\circ], \quad T = [u_\gamma, 324^\circ].$$

Úhel δ určíme z rovnoramenného trojúhelníku OFA s využitím kosinové věty

$$a^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos \delta, \rightarrow \cos \delta = \frac{2r^2 - a^2}{2r^2} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{3(3 + \sqrt{5})} \approx 41.8103^\circ.$$

Hodnota $u_\delta = 90 - \gamma - \delta = 10.8123^\circ$ představuje zeměpisnou šířku vrcholů G, I, K, M, O dvanáctistěnu, pro zbývajících 5 vrcholů F, H, J, L, N platí $u_j = -u_\delta$, jejich odlehlost ve směru v je 72° . Souřadnice vrcholů G, I, K, M, O určíme jako

$$G = [u_\delta, 36^\circ], \quad I = [u_\delta, 108^\circ], \quad K = [u_\delta, 180^\circ], \quad M = [u_\delta, 252^\circ], \quad O = [u_\delta, 324^\circ],$$

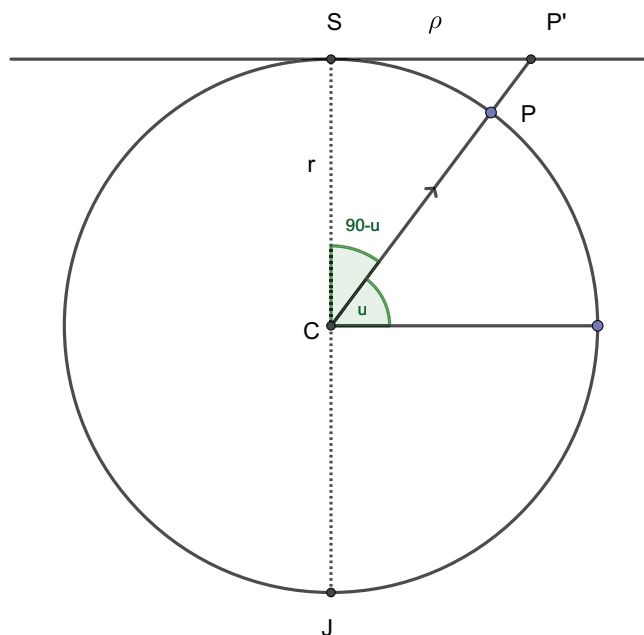
souřadnice vrcholů F, H, J, L, N jako

$$F = [-u_\delta, 0^\circ], \quad H = [-u_\delta, 72^\circ], \quad J = [-u_\delta, 144^\circ], \quad L = [-u_\delta, 216^\circ], \quad N = [-u_\delta, 288^\circ].$$

Z Obr. 7 je patrné, že platí $\beta + 2\gamma + \delta = 180^\circ$.

3 Gnomonická projekce

Gnomonická projekce (viz Obr. 8) patří mezi azimutální zobrazení. Středem promítání je střed sféry C , promítáme na rovinu tečnou ke sféře v kartografickém pólu K . V normální poloze $K \equiv S$, kde S je severní



Obrázek 8: Gnomonická projekce, normální poloha.

pól. Obraz P' bodu P leží na rovnoběžkové kružnici $k(S, \rho)$ s poloměrem $\rho = |SP'|$. Z $\triangle(S, C, P')$ je patrné, že zobrazovací rovnice gnomonické projekce v polárním tvaru lze zapsat

$$(\rho, \varepsilon) = (r \tan(90^\circ - u), v),$$

kde r představuje poloměr sféry a u, v jsou zeměpisné souřadnice bodu. V obecné poloze vztažené ke kartografickému pólu $K = [u_k, v_k]$ mají tvar

$$(\rho, \varepsilon) = (r \tan(90^\circ - \check{s}), d),$$

kde \check{s}, d jsou kartografické souřadnice bodu. Zobrazovací rovnice gnomonické projekce v pravoúhlém tvaru jsou

$$(x, y) = (\rho \cos d, \rho \sin d) = (r \tan(90^\circ - \check{s}) \cos d, r \tan(90^\circ - \check{s}) \sin d).$$

Gnomonická projekce má *speciální vlastnost*: obrazem ortodromy (hlavní kružnice) je polopřímka vycházející z pólu. Protože poledníky tvoří ortodromy, jejich obrazy jsou polopřímky vycházející z pólu, obrazy rovnoběžek jsou kružnice. Ze zobrazovacích rovnic je patrné, že obrazem poledníku $\wp(u, v = v_0)$, $u \in (0, \pi/2)$, kde $\varepsilon = v_0 = \text{const}$ a $\varrho = f(u)$, je tedy polopřímka s počátkem v obrazu pólu. Protože

$$\lim_{u \rightarrow \pm 0} \tan(90^\circ - u) = \pm \infty,$$

gnomonická projekce je schopna zobrazit pouze část sféry, a to hemisféru bez rovníku.

Plošné zkreslení v gnomonické projekci určíme ze vztahu

$$\begin{aligned} P &= \frac{\frac{\partial y}{\partial \check{s}} \frac{\partial x}{\partial d} - \frac{\partial y}{\partial d} \frac{\partial x}{\partial \check{s}}}{r^2 \cos \check{s}} - 1, \\ &= \frac{r^2}{r^2 \cos \check{s}} \left(\frac{\sin(90^\circ - \check{s})}{\cos^3(90^\circ - \check{s})} \sin^2 d + \frac{\sin(90^\circ - \check{s})}{\cos^3(90^\circ - \check{s})} \cos^2 d \right) - 1, \\ &= \frac{1}{\cos^3(90^\circ - \check{s})} - 1, \end{aligned}$$

K	$[90^\circ, \cdot]$	$[0^\circ, 45^\circ]$	$[0^\circ, 135^\circ]$	$[0^\circ, 225^\circ]$	$[0^\circ, 315^\circ]$	$[-90^\circ, \cdot]$
\underline{u}	30°	-70°	-70°	-70°	-70°	-90°
\bar{u}	90°	70°	70°	70°	70°	-30°
\underline{v}	-180°	-100°	10°	100°	190°	-180°
\bar{v}	180°	100°	200°	290°	380°	180°

Tabulka 1: Volba \underline{u}, \bar{u} a \underline{v}, \bar{v} pro šestistěn.

kde

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \check{s}} &= -\frac{r}{\cos^2(90^\circ - \check{s})} \cos d, \\ \frac{\partial x}{\partial d} &= -r \tan(90^\circ - \check{s}) \sin d, \\ \frac{\partial y}{\partial \check{s}} &= -\frac{r}{\cos^2(90^\circ - \check{s})} \sin d, \\ \frac{\partial x}{\partial d} &= r \tan(90^\circ - \check{s}) \cos d,\end{aligned}$$

za \check{s} dosadíme libovolný vrchol plošky platonského tělesa (ve všech vrcholech by mělo být plošné zkresení stejné). Čím přesnější aproximaci sféry použijeme, tím menší jsou hodnoty zkresení na okrajích mapy.

Rovina procházející středem sféry a hranou platonského tělesa řeže sféru v *hlavní kružnici*. Obraz části hlavní kružnice mezi dvěma body hrany platonského tělesa je v gnomonické projekci úsečkou. Plošky platonských těles jsou ohraničeny úsečkami jak v originále, tak i v obraze (tj. v gnomonické projekci). Této vlastnosti se hojně využívá při konstrukci polyedrických globů, mezi ploškami tak nevznikají překryty ani spáry.

4 Konstrukce polyedrického globu

Polyedrický glóbus bude definován měřítkovým číslem M . Poloměr sféry vepsané platonskému tělesu je

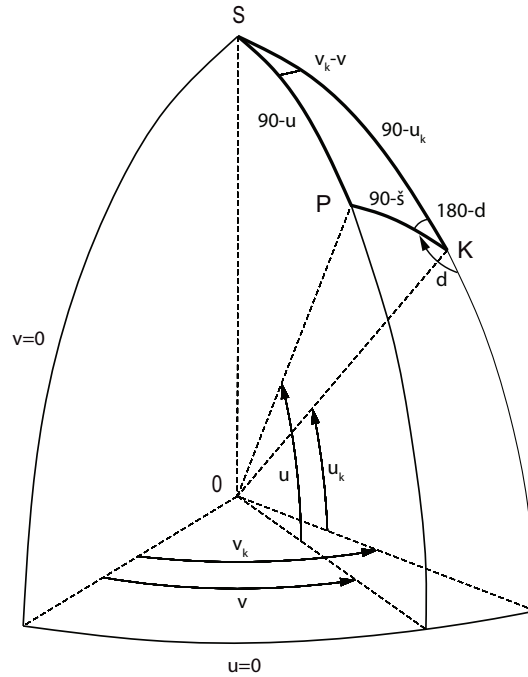
$$r = \frac{R}{M},$$

kde R je poloměr náhradní sféry pro aproximaci Země (např. $R = 6378000$ m). Hodnotu r následně použijeme v zobrazovacích rovnicích gnomonické projekce.

Postup prací bude tvořen níže uvedenými kroky. Nejprve pro každou plošku spočteme obrazy příslušných vrcholů mnohostěnu. Geografickou síť poledníků a rovnoběžek nad ploškou v gnomonické projekci navzorujeme s vhodnými kroky. Následně z externího souboru načteme lomové body jednotlivých kontinentů. Veškerá data pro každou plošku a jí příslušející kartografický pól v jejím těžišti transformujeme do obecné polohy zobrazení. Spojením obrazů vrcholů plošky vytvoříme ořezové linie, podle kterých ořízneme geografickou síť a polohopis. Nakonec z jednotlivých plošek mnohostěnu v grafickém editoru sestavíme plášť glóbu.

4.1 Konstrukce geografické sítě

Obrazem poledníků v gnomonické projekci jsou polopřímky vycházející z kartografického pólu, obrazem rovnoběžek kružnice o poloměru r . Úhel mezi obrazy poledníků zůstává zachován.



Obrázek 9: Řešení sférického trojúhelníka, transformace do obecné polohy.

Geografická síť bude generována na intervalu $\langle \underline{u}, \bar{u} \rangle \times \langle \underline{v}, \bar{v} \rangle$ příslušné plošky platonského tělesa. Rozestupy mezi rovnoběžkami označíme Δu , rozestupy mezi poledníky Δv . Rovnoběžka bude vzorkována s krokem δu , poledník s krokem δv . V praxi budeme volit $\Delta u = \Delta v = 10^\circ$, $\delta u = \delta v = 1^\circ$. Rozestupy mezi poledníky a rovnoběžkami by měly být stejné pro všechny plošky platonského tělesa, kroky vzorkování se mohou lišit v závislosti na křivosti poledníků/rovnoběžek.

Poledníky vygenerujeme v cyklu jeden po druhém. Nejprve vytvoříme vektory obsahující zeměpisné souřadnice u, v jednotlivých bodů poledníku. Následně provedeme konverzi do obecné polohy zobrazení vzhledem k pólu $K = [u_k, v_k]$ plošky a zobrazíme tyto body v gnomonické projekci.

```

XM = []; YM = [];
for v=vmin:Dv:vmax
    %Create meridian
    um = umin:du:umax;
    vm = ones(1,length(um))* v;

    %Convert to the oblique aspect
    [sm, dm] = uvTosd(um, vm, uk, vk);

    %Project meridian in gnomonic projection
    [xm, ym] = gnom(R, sm, dm);
    XM = [XM; xm]; YM = [YM; ym];
end

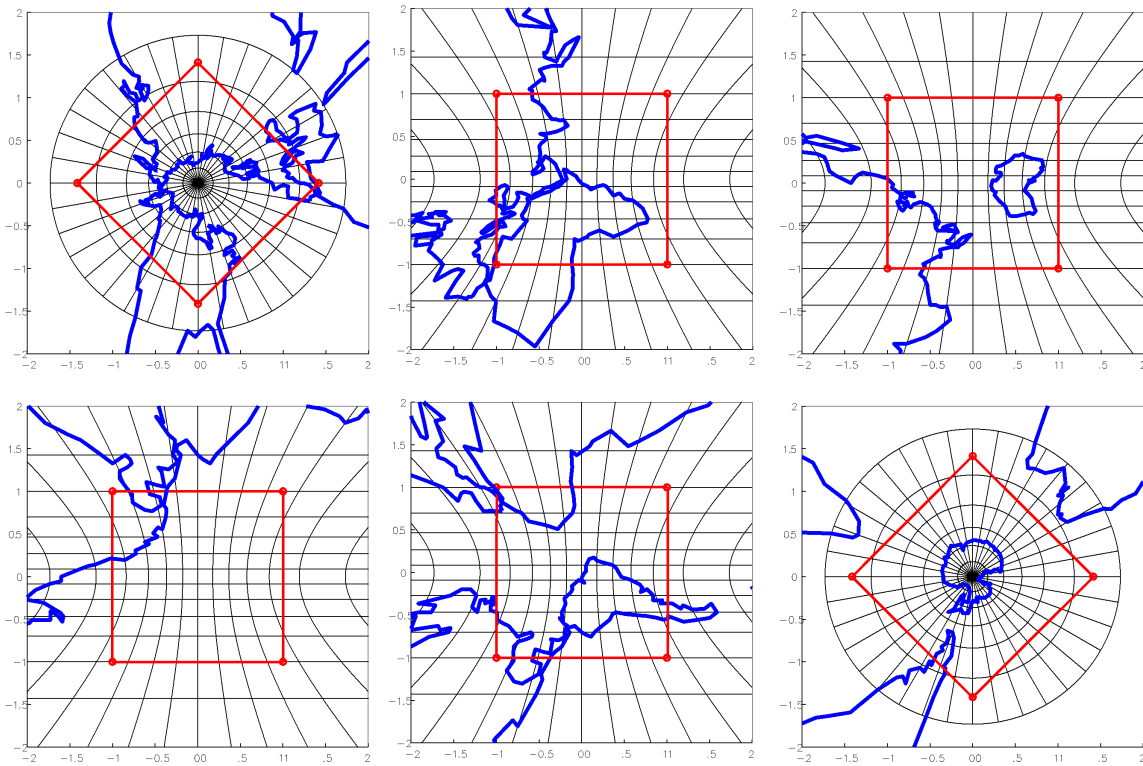
```

U rovnoběžek postupujeme analogicky:

```

XP = []; YP = [];
for u=umin:Du:umax

```



Obrázek 10: Plošky platonského tělesa s ořezovými liniemi, krychle.

```

%Create parallel
vp = vmin:dv:vmax;
up = ones(1,length(vp))*u;

%Convert to the oblique aspect
[sp, dp] = uvTosd(up, vp, uk, vk);

%Project parallel
[xp, yp] = gnom(R, sp, dp);
XP = [XP; xp]; YP = [YP; yp];
end

```

Následně poledníky i rovnoběžky v plošce vykreslíme:

```

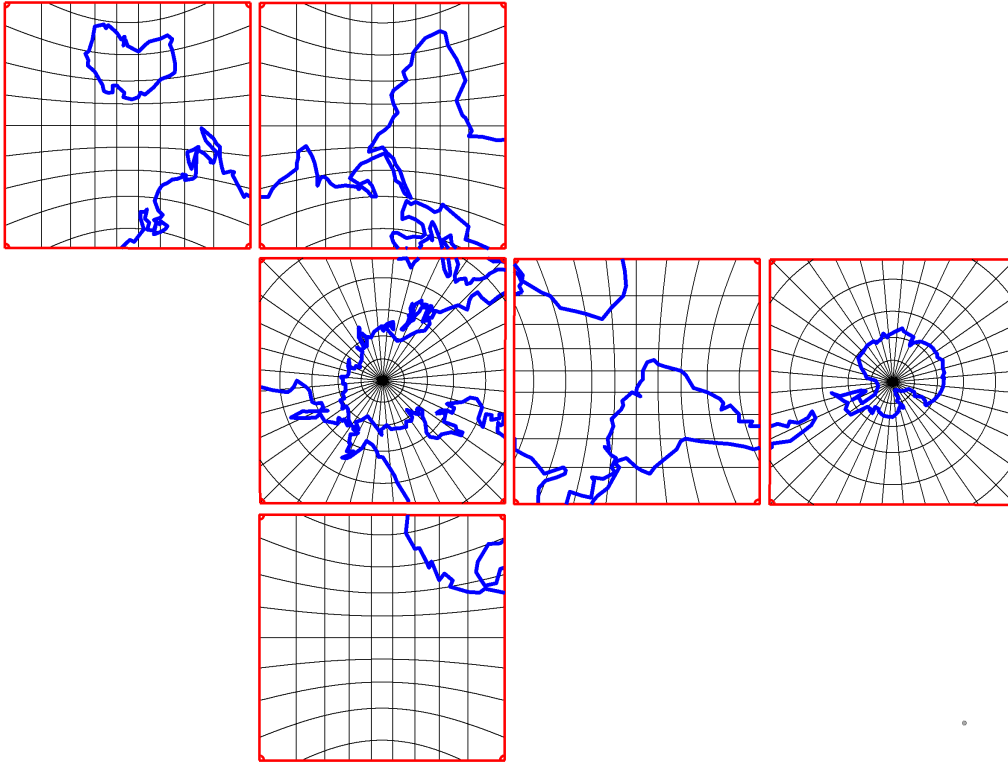
plot (xm', ym', 'k');
plot (xp', yp', 'k');

```

Hodnoty \underline{u}, \bar{u} a \underline{v}, \bar{v} je nutné zvolit v závislosti na rohových bodech plošky: $\underline{u}, \underline{v}$ volíme o něco menší než zeměpisné souřadnice nejjižnějšího a nejzápadnějšího rohového bodu, \bar{u}, \bar{v} o něco větší než zeměpisné souřadnice nejvýchodnějšího a nejsevernějšího rohového bodu plošky; v praxi postačuje posun o $5^\circ - 10^\circ$. Příklad volby \underline{u}, \bar{u} a \underline{v}, \bar{v} polyedrický globus na šestistěnu je uveden v Tab. 1.

4.2 Načtení lomových bodů kontinentů

Z textového souboru načteme lomové body kontinentů, např. pro Evropu:



Obrázek 11: Rozložený polyedrický globus, krychle.

```
eu = load('europe.txt')
[seu, deu] = uvTosd(eu(:, 1), eu(:, 2), uk, vk);
```

Každý kontinent bude uložen v samostatném souboru, na jednom řádku budou souřadnice u, v bodu odděleny mezerou (tabelátorem).

Gnomonická projekce nezobrazuje rovník, $\rho(0) \rightarrow \infty$. Body ležící blízko rovníku mají velké hodnoty ρ , mohou vést ke graficky nepřírodným artefaktům v mapě. Proto je nutné před znázorněním v gnomonické projekci taková místa lokalizovat a odstranit. Nalezneme proto všechny body, jejichž kartografická šířka je menší než nějaká limitní hodnota $\underline{\xi}$, a odebereme je ze seznamu. V praxi použijeme hodnotu $\underline{\xi} = 5^\circ$,

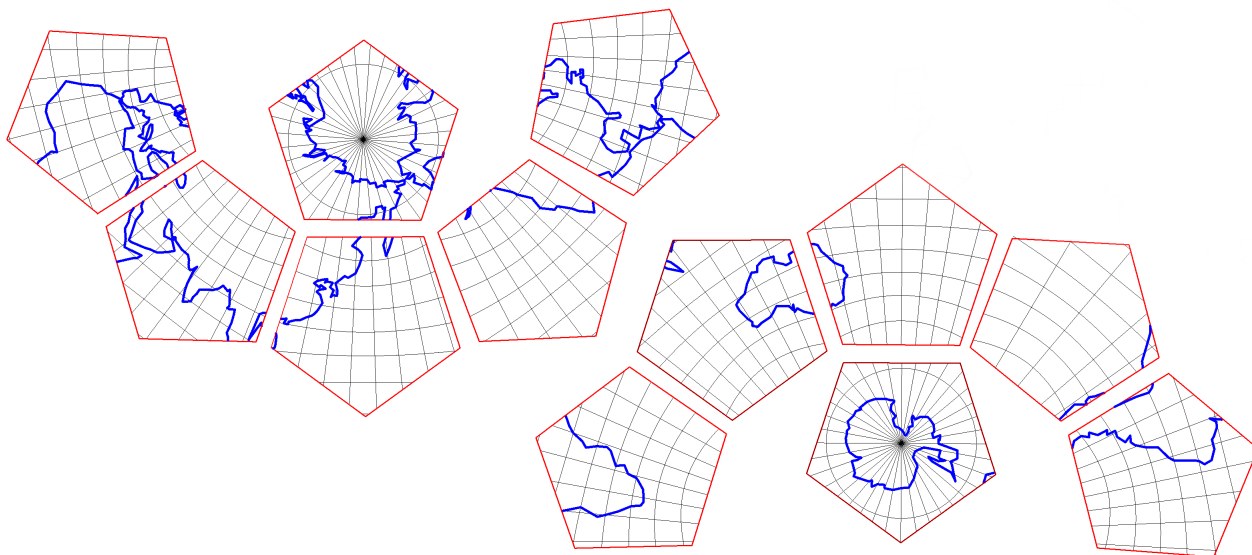
```
idx = find(seu < 5);
seu(idx) = [];
deu(idx) = [];
```

Zbývající lomové body zobrazíme v gnomonické projekci:

```
[xeu, yeu] = gnom(R, seu, deu);
plot(xeu, yeu, 'b', 'LineWidth', 3);
```

4.3 Transformace do obecné polohy zobrazení

Při transformaci bodu $P = [u, v]$ do obecné polohy vzhledem ke kartografickému pólu $K = [u_k, v_k]$ je nutné použít kvadrantově korektní převod. Z kosinové věty pro $\triangle(S, P, K)$, viz Obr. 9, platí



Obrázek 12: Rozložený polyedrický globus, dvanáctistěn.

$$\sin \check{s} = \sin u \sin u_k + \cos u \cos u_k \cos(v_k - v).$$

Vztah pro kartografickou délku d uvedený ve skriptech nepostačuje, funguje pouze pro první kvadrant. Hodnotu d určíme nejprve ze sinové věty

$$\sin d = \cos u \frac{\sin(v_k - v)}{\cos \check{s}},$$

následně z kosinové věty

$$\begin{aligned} \sin u &= \sin \check{s} \sin u_k - \cos \check{s} \cos u_k \cos d, \\ \cos d &= \frac{\sin \check{s} \sin u_k - \sin u}{\cos \check{s} \cos u_k}, \end{aligned}$$

pak

$$\tan d = \frac{\sin d}{\cos d} = \frac{\sin(v_k - v) \cos u \cos u_k}{\sin \check{s} \sin u_k - \sin u}.$$

Po dosazení za \check{s} ze sinové věty lze vztah postupně upravit do tvaru

$$\begin{aligned} \tan d &= \frac{\sin(v_k - v) \cos u \cos u_k}{\sin u \sin^2 u_k + \cos u \sin u_k \cos u_k \cos(v_k - v) - \sin u}, \\ &= \frac{\sin(v_k - v) \cos u \cos u_k}{\sin u (\sin^2 u_k - 1) + \cos u \sin u_k \cos u_k \cos(v_k - v)}, \\ &= \frac{\sin(v_k - v) \cos u \cos u_k}{-\sin u \cos^2 u_k + \cos u \sin u_k \cos u_k \cos(v_k - v)}, \\ &= \frac{\sin(v_k - v) \cos u}{\cos u \sin u_k \cos(v_k - v) - \sin u \cos u_k}. \end{aligned}$$

Kvadrantově korektní výsledek získáme s využitím funkce `atan2()`

$$d = \text{atan2}(\sin(v_k - v) \cdot \cos(u), \cos(u) \cdot \sin(u_k) \cdot \cos(v_k - v) - \sin(u) \cdot \cos(u_k));$$

Poznámka: Uvedená orientace úhlu d (po směru hodinových ručiček) byla použita ing. Josefem Křovákem. Pro západní kartografii je typická opačná orientace, která je přirozenější (analogie kartografické délky se zeměpisnou), tedy $d = -d$.

4.4 Sestavení modelu polyedrického tělesa

Po vygenerování vrcholů plošek platonského tělesa, zákresu geografické sítě a importu lomových bodů můžeme přistoupit k finalizaci glóbu. Vygenerujeme jednotlivé plošky platonského tělesa se spojnicemi vrcholů tvořících ořezové linie a vyexportujeme je, viz Obr. 10. Je vhodné zvolit některý z vektorových formátů, které Matlab podporuje (např. *.eps).

Soubor zkonvertujeme do shapefilu či některého z dalších vhodných formátů. V grafickém editoru, popř. v GIS software, odstraníme prvky vně ořezových linií, singularity a případné grafické nedostatky. Plošky platonského tělesa k sobě sesadíme tak, aby tvořily polyedr, viz Obr. 11–12. Následně maketu glóbu vystříhneme, sestavíme a slepíme. Posuny mezi jednotlivými ploškami polyedru a jejich natočení vůči ose x lze snadno spočítat.

Alternativně lze tyto kroky naskriptovat v Pythonu, popř. použít vhodný GIS.