Srovnání konformních kartografických zobrazení pro zvolené území (návod na cvičení)

Tomáš Bayer, Přírodovědecká fakulta UK, bayertom@natur.cuni.cz

1 Úvod

Cílem úlohy je srovnání vlastnosti jednoduchých konformních zobrazení a jejich posouzení z hlediska vhodnosti či nevhodnosti pro znázornění zvoleného území. Metodika hodnocení je založena na analýze hodnot délkového zkreslení na okrajových rovnoběžkách území. Vzhledem k tomuto kritériu budou posuzována následující kartografická zobrazení: válcové zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami, kuželové zobrazení se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami, stereografická projekce. Kartografická zobrazení volíme v obecné poloze.

1.1 Použitá symbolika

Nechť R představuje poloměr referenční koule, u, v zeměpisné souřadnice obecného bodu P, x, y pravoúhlé souřadnice obrazu bodu P' v rovině mapy, u_0 zeměpisnou šířku jedné nezkreslené rovnoběžky, u_1, u_2 šířky dvou nezkreslených rovnoběžek, u_k, v_k zeměpisné souřadnice kartografického pólu K, u_s zeměpisnou šířku severního okraje území. Hodnoty $\check{s}, d$ představují kartografické souřadnice bodu P, $\check{s}_0$ kartografickou šířku 1 nezkreslené rovnoběžky, $\check{s}_1, \check{s}_2$ kartografické šířky dvou nezkreslených rovnoběžek, n představuje konstantu zobrazení.

2 Válcové konformní zobrazení

Zobrazovací rovnice Mercatorova zobrazení v obecné poloze lze zapsat ve tvaru

$$x = c\cos d, \tag{1}$$

$$y = R \cdot \ln\tan(\frac{\check{s}}{2} + 45^\circ), \tag{2}$$

kde $c = R \cdot \cos\check{s}_0$, $\check{s}_0$ je kartografická šířka nezkreslené rovnoběžky. Volbu $\check{s}_0$ provedeme z podmínky, aby zkreslení ν na severním i jižním okraji $m_r^s = m_r^j$ i na rovníku m_r^r území byla až na znaménko stejná

$$m_r^s = m_r^j = 1 + \nu, \tag{3}$$

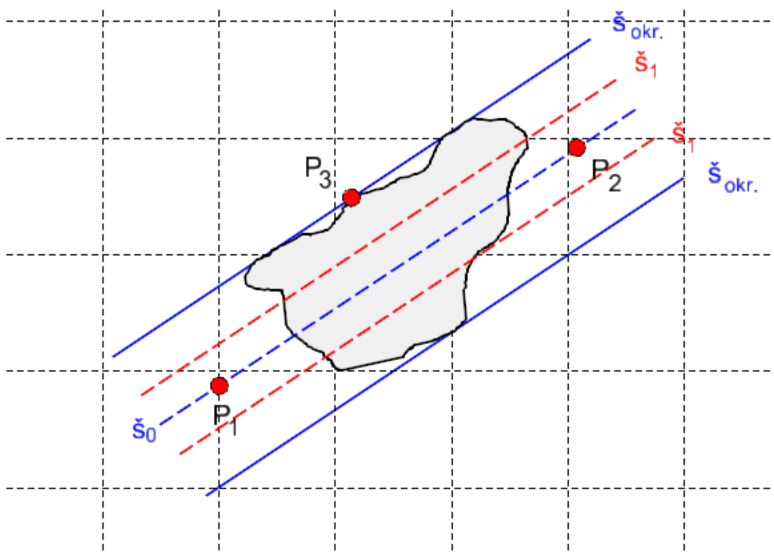
$$m_r^r = 1 - \nu. \tag{4}$$

Po sečtením (3) + (4) platí:

$$m_r^s + m_r^r = 2. \tag{5}$$

S ohledem na obecný tvar zobrazovacích rovnic válcového zobrazení určíme měřítko délek v kartografické rovnoběžce ze vztahu

$$m_r = \frac{c}{R\cos\check{s}} = \frac{\cos\check{s}_0}{\cos\check{s}}. \tag{6}$$



Obrázek 1: Znázornění volby optimálního válcového zobrazení v obecné poloze pro zadané území.

Dosadíme -li (6) do (5), platí

$$\frac{\cos \check{s}_0}{\cos 0} + \frac{\cos \check{s}_0}{\cos \check{s}_s} = 2,$$

kde $\check{s}_s \equiv \check{s}_{okr}$. Zeměpisnou šířku $\check{s}_0$ nezkreslené rovnoběžky určíme ze vztahu

$$\cos \check{s}_0 = \frac{2 \cos \check{s}_s}{1 + \cos \check{s}_s}. \tag{7}$$

Druhá nezkreslená rovnoběžka bude symetrická vzhledem ke kartografickému rovníku, její zeměpisná šířka bude $-\check{s}_0$.

Středem zadaného území vedeme kartografický rovník a dvě kartografické rovnoběžky tak, aby se území sevřelo do co nejužšího pásu, viz obr. 1. Odečteme zeměpisné souřadnice dvou libovolných bodů $P_1 = [u_1, v_1]$ a $P_2 = [u_2, v_2]$ ležících na kartografickém rovníku.

Kartografický rovník představuje ortodromu $o(P_1, P_2)$. Z bodů P_1 a P_2 vypočteme s použitím kosínové věty pro sférický trojúhelník $\Delta(S, P_1, P_2)$ zeměpisné souřadnice kartografického pólu $K = [u_k, v_k]$

$$\tan v_k = \frac{\tan u_1 \cos v_2 - \tan u_2 \cos v_1}{\tan u_2 \sin v_1 - \tan u_1 \sin v_2}, \tag{8}$$

$$\tan u_k = -\frac{\cos(v_1 - v_k)}{\tan u_1} = -\frac{\cos(v_2 - v_k)}{\tan u_2}. \tag{9}$$

Označme libovolný bod ležící na okrajové rovnoběžce jako $P_3 = [u_3, v_3]$. Z tohoto bodu spočteme za použití 1. kosinové věty pro sférický trojúhelník $\Delta(S, P_3, K)$ její kartografickou šířku $\check{s}_s$

$$\check{s}_s = \arcsin\left[\sin u_3 \sin u_k + \cos u_3 \cos u_k \cos(v_3 - v_k)\right].$$

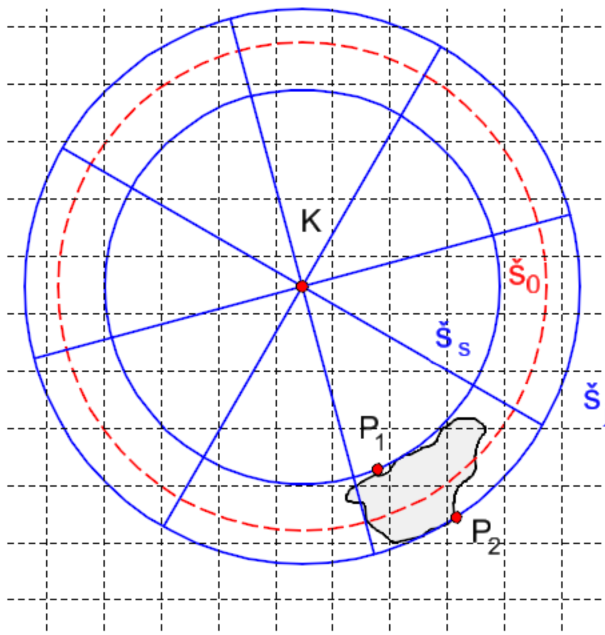
Kartografickou šířku nezkreslené kartografické rovnoběžky $\check{s}_0$ určíme ze (7). Pro kontrolu můžeme spočítat i kartografické šířky bodů P_1, P_2, které by měly vyjít nulové. Měřítko délek m lze v libovolném bodě s kartografickou šířkou $\check{s}$ určit ze vztahu

$$m = m_p = m_r = \frac{\cos \check{s}_0}{\cos \check{s}}, \tag{10}$$

zkreslení délek ν jako

$$\nu = m - 1.$$

Pro kontrolu můžeme spočítat hodnoty ν v bodech P_1, P_2, P_3; tyto by měly být, až na znaménko, stejné.



Obrázek 2: Znázornění volby optimálního kuželového zobrazení v obecné poloze pro zadané území.

3 Kuželové konformní zobrazení

Zobrazovací rovnice Lambertova kuželového konformního zobrazení v obecné poloze lze určit ze vztahu

$$\rho = \rho_0 \frac{\tan^c(\frac{\check{s}_0}{2} + 45^\circ)}{\tan^c(\frac{\check{s}}{2} + 45^\circ)}, \tag{11}$$

$$\varepsilon = c \cdot d. \tag{12}$$

Zobrazení má dvě konstanty, ϱ_0, c, určíme je ze dvou podmínek. První podmínku opět volíme tak, aby zkreslení délek na severním i jižním okraji,

$$m_r^s = m_r^j = 1 + \nu,$$

a ve středu území,

$$m_r^0 = 1 - \gamma,$$

byla až na znaménko stejná. Sečtením obou rovnic dostáváme podmínku

$$m_r^s + m_r^0 = 2,$$

$$\frac{c\rho_s}{R\cos\check{s}_s} + \frac{c\rho_0}{R\cos\check{s}_0} = 2,$$

$$c\rho_s \cos\check{s}_0 + c\rho_0 \cos\check{s}_s = 2R\cos\check{s}_0\cos\check{s}_s.$$

Po dosazení zobrazovací rovnice

$$c\rho_0 \frac{\tan^c(\frac{\check{s}_0}{2}+45^\circ)}{\tan^n(\frac{\check{s}_s}{2}+45^\circ)} \cos\check{s}_0 + c\rho_0\cos\check{s}_s = 2R\cos\check{s}_0\cos\check{s}_s,$$

$$c\rho_0\tan^c(\frac{\check{s}_0}{2}+45^\circ)\cos\check{s}_0 + c\rho_0\cos\check{s}_s\tan^c(\frac{\check{s}_s}{2}+45^\circ) = 2R\cos\check{s}_0\cos\check{s}_s\tan^c(\frac{\check{s}_s}{2}+45^\circ),$$

$$\rho_0\left[n\tan^c(\frac{\check{s}_0}{2}+45^\circ)\cos\check{s}_0 + c\cos\check{s}_s\tan^c(\frac{\check{s}_s}{2}+45^\circ)\right] = 2R\cos\check{s}_0\cos\check{s}_s\tan^c(\frac{\check{s}_s}{2}+45^\circ),$$

získáme konstantu ρ_0 ve tvaru

$$\rho_0 = \frac{2R\cos\check{s}_0\cos\check{s}_s\tan^c(\frac{\check{s}_s}{2}+45^\circ)}{c\left[\cos\check{s}_0\tan^c(\frac{\check{s}_0}{2}+45^\circ)+\cos\check{s}_s\tan^c(\frac{\check{s}_s}{2}+45^\circ)\right]}, \tag{13}$$

kde $\check{s}_s, \check{s}_j$ jsou kartografické šířky okrajových rovnoběžek svírající území. Hodnotu $\check{s}_0$ lze určit různými metodami, využijeme výše uvedenou podmínku stejného zkreslení v okrajových rovnoběžkách

$$m_r^s = m_r^j = 1+\nu.$$

Po dosazení

$$\frac{c\rho_s}{R\cos\check{s}_s} = \frac{c\rho_j}{R\cos\check{s}_j},$$

$$\frac{c\rho_0\tan^c(\frac{\check{s}_0}{2}+45^\circ)}{R\cos\check{s}_s\tan^n(\frac{\check{s}_s}{2}+45^\circ)} = \frac{c\rho_0\tan^c(\frac{\check{s}_0}{2}+45^\circ)}{R\cos\check{s}_j\tan^c(\frac{\check{s}_j}{2}+45^\circ)},$$

$$\cos\check{s}_s\tan^c(\frac{\check{s}_s}{2}+45^\circ) = \cos\check{s}_j\tan^c(\frac{\check{s}_j}{2}+45^\circ),$$

$$\log\cos\check{s}_s + \log\tan^c(\frac{\check{s}_s}{2}+45^\circ) = \log\cos\check{s}_j + \log\tan^c(\frac{\check{s}_j}{2}+45^\circ),$$

$$\log\cos\check{s}_s + c\log\tan(\frac{\check{s}_s}{2}+45^\circ) = \log\cos\check{s}_j + c\log n(\frac{\check{s}_j}{2}+45^\circ),$$

konstantu c určíme ze vztahu

$$\begin{aligned} c &= \frac{\log\cos\check{s}_s - \log\cos\check{s}_j}{\log\tan(\frac{\check{s}_j}{2}+45^\circ) - \log\tan(\frac{\check{s}_s}{2}+45^\circ)}, \qquad (14) \\ \sin\check{s}_0 &= c. \end{aligned}$$

Zadané území sevřeme dvěma kartografickými rovnoběžkami představujícími soustředné kružnice $k_1(K,\rho_s)$, $k_2(K,\rho_j)$ do co nejužšího pásu, viz obr. 2. Souřadnice kartografického pólu $K = [u_k, v_k]$ určíme odečtením z mapy, představuje střed kružnic.

Na každé z okrajových rovnoběžek zvolíme libovolný bod, označme je jako $P_1 = [u_1, v_1]$ a $P_2 = [u_2, v_2]$. V dalším kroku určíme ze sférických trojúhelníků $\Delta(P_1, S, K)$ a $\Delta(P_2, S, K)$ za použití 1. kosínové věty kartografické šířky $\check{s}_s, \check{s}_j$ obou okrajových rovnoběžek.

$$\check{s}_s = \arcsin\left[\sin u_1\sin u_k + \cos u_1\cos u_k\cos(v_1 - v_k)\right], \tag{15}$$

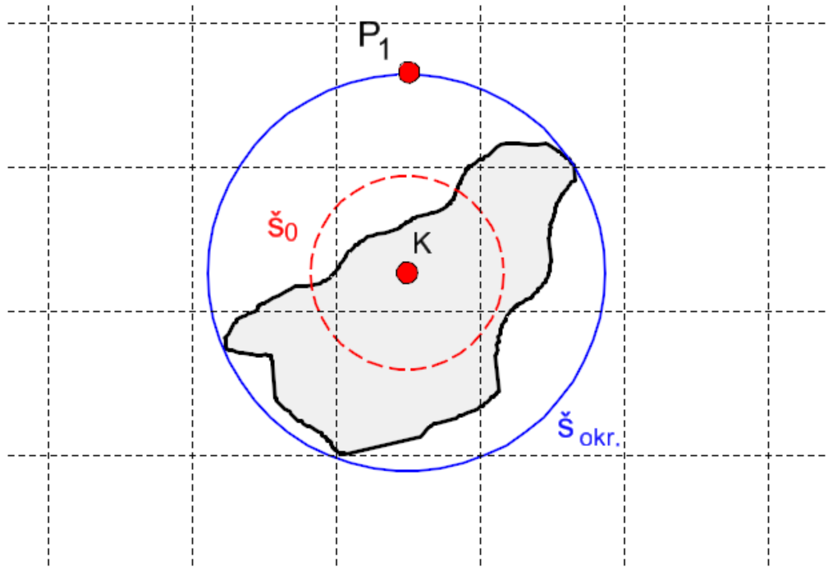
$$\check{s}_j = \arcsin\left[\sin u_2\sin u_k + \cos u_2\cos u_k\cos(v_2 - v_k)\right]. \tag{16}$$

Tyto hodnoty dosadíme do (14), (15). Poloměr severní rovnoběžky ρ_s určíme dosazením $\check{s}_s$ za $\check{s}$ do (11), poloměr jižní rovnoběžky ρ_j dosazením $\check{s}_j$ za $\check{s}$ do (11).

Dosazením $\check{s}_s, \check{s}_j, \rho_s, \rho_j$ do obecného vzorce pro výpočet měřítka délek

$$m = m_p = m_r = \frac{c\varrho_s}{R\cdot\cos u_s} = \frac{c\varrho_j}{R\cdot\cos u_j} = 1+\nu, \tag{17}$$

určíme hodnoty délkových zkreslení na severní a jižní okrajové rovnoběžce. Dosazením $\check{s}_0, \rho_0$ do (17) zkontrolujeme, zda pro měřítko délek na této rovnoběžce platí $m_r^0 = 1-\gamma$.



Obrázek 3: Znázornění volby optimálního azimutálního zobrazení v obecné poloze pro zadané území.

4 Azimutální konformní zobrazení

Zobrazovací rovnice stereografické projekce lze zapsat ve tvaru

$$\rho = c \cdot \tan \frac{\psi}{2}, \tag{18}$$

$$\varepsilon = d, \tag{19}$$

kde c je konstanta zobrazení a $\psi = 90° - u$, resp. $\psi = 90° - š$, představují doplněk zeměpisné resp. kartografické šířky do 90° v normální resp. obecné poloze. Konstantu zobrazení c lze volit tak, aby sečná rovina protínala sféru v nezkreslené rovnoběžce u_0, resp. $š_0$, kde $\psi_0 = 90 - u_0$, resp. $\psi_0 = 90 - š_0$ v normální resp. obecné poloze

$$m_r(\psi_0) = \frac{\rho}{R \sin \psi_0} = \frac{c \tan \frac{\psi_0}{2}}{2R \sin \frac{\psi_0}{2} \cos \frac{\psi_0}{2}} = 1,$$

$$c = 2R \cos^2 \frac{\psi_0}{2}.$$

Zobrazovací rovnice stereografické projekce s jednou nezkreslenou rovnoběžkou má tvar

$$\rho = 2R \cos^2 \frac{\psi_0}{2} \tan \frac{\psi}{2}, \tag{20}$$

$$\varepsilon = d, \tag{21}$$

pro měřítko délek platí

$$m_r = \frac{\rho}{R \sin \psi} = \frac{R \cos^2 \frac{\psi_0}{2} \cdot \tan \frac{\psi}{2}}{2R \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{\psi_0}{2}}{\cos^2 \frac{\psi}{2}}.$$

Zadanému území opíšeme kružnici s co nejmenším poloměrem představující kartografickou rovnoběžku, její střed představuje kartografický pól $K = [u_k, v_k]$, viz obr. 3. Zvolíme libovolný bod

$P_1 = [u_1, v_1]$ ležící na této "jižní" rovnoběžce a určíme jeho kartografickou šířku $\check{s}_j \equiv \check{s}_{okr}$ s využitím kosínové věty pro sférický trojúhelník $\Delta(S, P_1, K)$

$$\check{s}_j = \arcsin\left[\sin u_1 \sin u_k + \cos u_1 \cos u_k \cos(v_1 - v_k)\right], \tag{22}$$

$$\psi_j = 90° - \check{s}_j. \tag{23}$$

Abychom minimalizovali vliv zkreslení, upravíme volbu konstant.

Multiplikační konstanta μ. V pólu nebudeme uvažovat nulové zkreslení; zkreslení bude nabývat hodnoty $\mu = 1 - \nu$, proměnnou μ nazýváme jako multiplikační konstantu. Nezkreslenou rovnoběžku ψ_0 nebudeme volit, její hodnota nám vyjde z výpočtu

$$m_r(\psi = 0) = \frac{\cos^2 \frac{\psi_0}{2}}{\cos^2 \frac{\psi}{2}} = \mu,$$

$$\mu = \cos^2 \frac{\psi_0}{2} \Rightarrow \psi_0 = 2 \arccos \sqrt{\mu}.$$

Pokud současně požadujeme, aby na okraji území bylo až na znaménko stejné zkreslení γ jako v pólu, pak

$$m_r(\psi = 0) = m_r^p = 1 - \nu,$$

$$m_r(\psi_j) = m_r^j = 1 + \nu.$$

Sečteme -li obě rovnice, platí

$$m_r^p + m_r^j = 2,$$

$$\frac{\cos^2 \frac{\psi_0}{2}}{\cos^2 0} + \frac{\cos^2 \frac{\psi_0}{2}}{\cos^2 \frac{\psi_j}{2}} = 2,$$

$$\mu + \frac{\mu}{\cos^2 \frac{\psi_j}{2}} = 2,$$

$$\mu = \frac{2 \cos^2 \frac{\psi_j}{2}}{1 + \cos^2 \frac{\psi_j}{2}}. \tag{24}$$

Měřítko délek m_r na okrajové jižní rovnoběžce ψ_j určíme ze vztahu

$$m_r = \frac{\cos^2 \frac{\psi_0}{2}}{\cos^2 \frac{\psi}{2}} = \frac{\mu}{\cos^2 \frac{\psi_j}{2}}. \tag{25}$$

5 Závěr

Pro území protáhlého tvaru se jako nejvhodnější jeví válcová či kuželová zobrazení, jejichž křivky stejného zkreslení tvoří obrazy kartografických rovnoběžek (tj. úsečky). Pro zobrazení území s podobnou šířkou a délkou (nejsou dominantní v jednom ze směrů) je nejvhodnější použít azimutální zobrazení, jehož ekvideformáty představují obrazy kartografických rovnoběžek ve tvaru kružnice.