(9) Funkce více proměnných - extrémy

Kristýna Kuncová

Matematika B2

Parciální derivace 2. řádu

Značení

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě a parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$. Pak definujeme parciální derivace 2. řádu jako

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a).$$

Příklad

Určete 2. parciální derivace funkce $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$.

Parciální derivace 2. řádu - příklad

Otázka

Určete $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, jestliže $f(x,y) = e^{xy}$

A e^{xy}

B ye^{xy}

C $x^2 e^{xy}$

D $e^{xy}(xy+1)$

D

Otázka

Určete $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, jestliže $f(x,y) = e^{xy}$

A e^{xy}

B ye^{xy}

C $x^2 e^{xy}$

D $e^{xy}(xy+1)$

D

Záměnnost parciálních derivací 2. řádu

Věta (O zaměnitelnosti parciálních derivací)

Nechť f je reálná funkce 2 proměnných, $a \in \mathbb{R}^2$. Nechť platí, že
(i) funkce $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ je spojitá v bodě a,
(ii) funkce $\frac{\partial f}{\partial y}$ je definovaná na nějakém okolí bodu a.
Potom existují a jsou si rovny

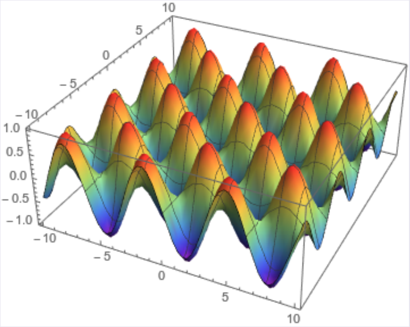
$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y \partial x}.$$

Extrémy

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definovaná na okolí bodu a. Řekneme, že funkce f má v bodě a

- *lokální maximum*, jestliže $\exists \delta > 0$ takové, že $\forall x \in P_\delta(a)$ platí $f(x) \leq f(a)$,
- *lokální minimum*, jestliže $\exists \delta > 0$ takové, že $\forall x \in P_\delta(a)$ platí $f(x) \geq f(a)$,



Nutná podmínka existence extrému

Věta (Nutná podmínka pro lokální extrém)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^2$ lokální extrém. Pokud existují parciální derivace $\frac{\partial f(a)}{\partial x}$ a $\frac{\partial f(a)}{\partial y}$, pak jsou nutně v bodě a rovny nule.

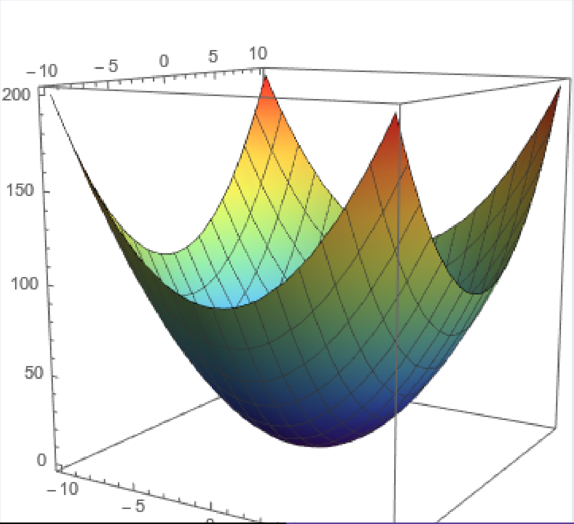
Poznámka

Body, kde $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, zveme *stacionární*.

Příklady

Příklad

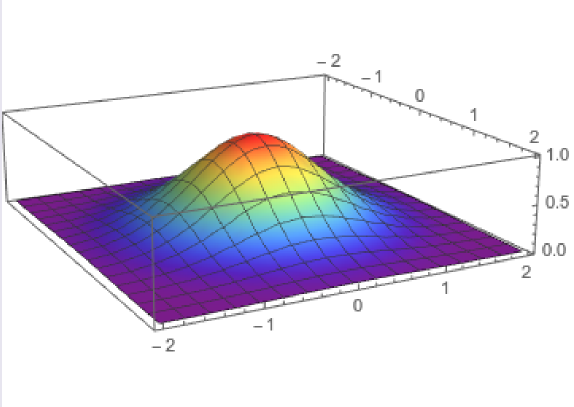
$f(x,y) = x^2 + y^2$



Příklady

Příklad

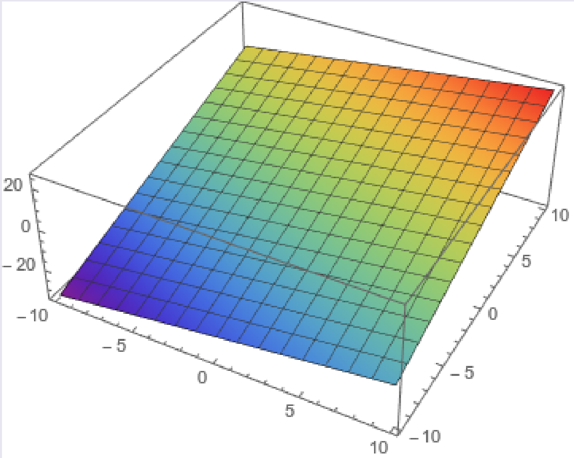
$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$



Příklady

Příklad

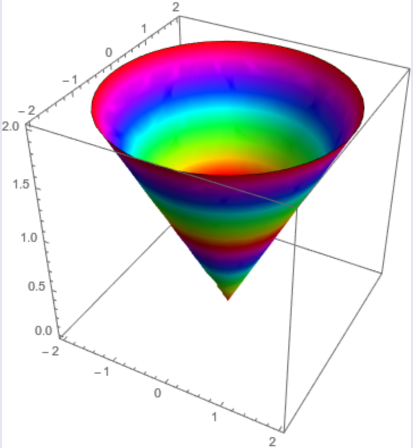
$f(x, y) = x + 2y - 4$



Příklady

Příklad

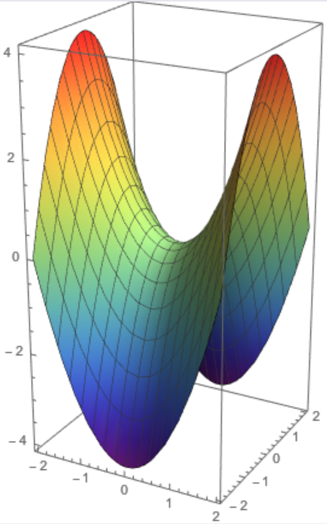
$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$



Příklady

Příklad

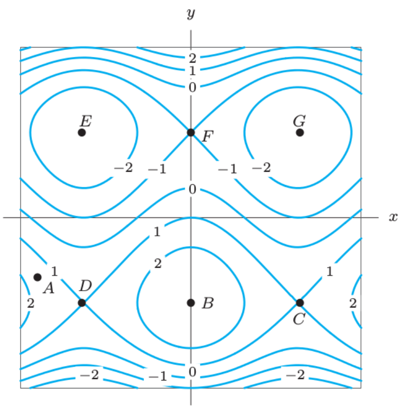
$f(x, y) = x^2 - y^2$



Příklady

Příklad

1. Které z bodů A, B, C, D, E jsou (nejspíše) kritickými body?
2. Které z bodů B, C, D, E jsou (nejspíše)
   1. lokální maximum,
   2. lokální minimum,
   3. sedlo?



Zdroj : Calculus, 6th Edition; Hughes-Hallett, Gleason, McCallum et al.

Hessova matice

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě a spojité 2. parciální derivace. Matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$$

nazveme *Hessovou maticí* funkce f v bodě a.
Její determinant zveme *Hessián* a značíme $H_f(a)$.

Příklad

Určete Hessián funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$

Postačující podmínka existence lokálního extrému

Věta (Postačující podmínka pro lokální extrém)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^2$ spojité parciální derivace druhého řádu $d^2 f(a)$. Nechť a je stacionární bod. Pokud

(a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x}(a) > 0$ a $H_f(a) > 0$ má f v bodě a lokální minimum,

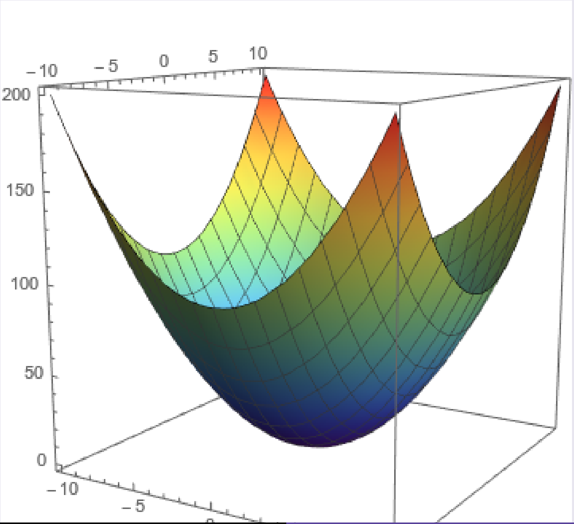
(b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x}(a) < 0$ a $H_f(a) > 0$ má f v bodě a lokální maximum,

(c) $H_f(a) < 0$, má f v bodě a sedlový bod.

Příklady

Příklad

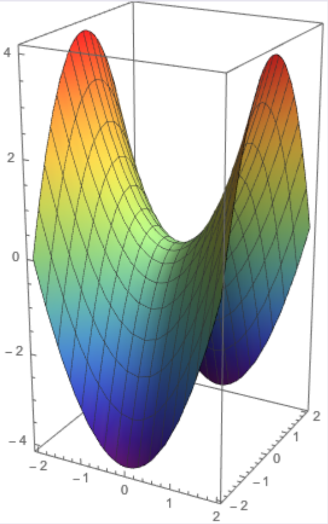
$f(x,y) = x^2 + y^2$

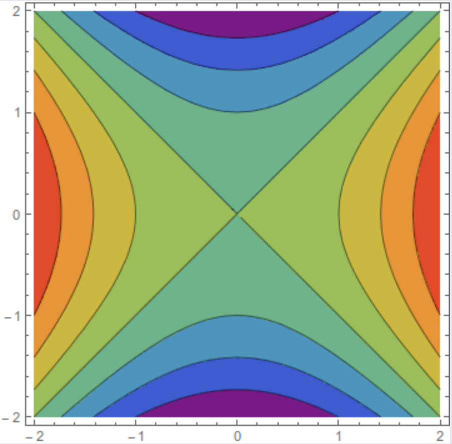


Příklady

Příklad

$f(x,y) = x^2 - y^2$





Lokální extrém - příklad

Věta (Postačující podmínka pro lokální extrém)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^2$ spojité parciální derivace druhého řádu $d^2 f(a)$. Nechť a je stacionární bod. Pokud

(a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x}(a) > 0$ a $H_f(a) > 0$ má f v bodě a lokální minimum,

(b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x}(a) < 0$ a $H_f(a) > 0$ má f v bodě a lokální maximum,

(c) $H_f(a) < 0$, má f v bodě a sedlový bod.

Příklad

Pro funkci $f(x, y)$ platí, že má v bodě $a = (-2, 2)$ stacionární bod. Dále platí, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = 4$ a $H_f(a) = 8$. Pak

A funkce f má v bodě a lokální maximum,

B funkce f má v bodě a lokální minimum,

C funkce f má v bodě a sedlo,

D o extrémech nelze nic říci.

B

Lokální extrémy - příklad

Příklad

Pro funkci $f(x, y)$ platí, že má v bodě $a = (3, 2)$ stacionární bod. Dále platí, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$ a $H_f(a) > 0$. Můžeme z toho vyvodit, že funkce f má v bodě a lokální maximum?

A Ano, kdykoli je Hessián kladný, má funkce v a lokální maximum.

B Ano, můžeme.

C Ne, funkce má v a lokální minimum, protože $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$.

D Ne, chybí nám informace o první derivaci.

B

Příklad

Na poště můžete podat pouze balíčky, které nejsou v žádném rozměru delší než 240 cm. Zároveň součet délky, šířky a výšky nesmí být delší, než 300 cm. Nejmenší možné rozměry jsou pak 14x9 cm. Jaký je největší možný objem balíku, který můžete poslat v krabici (tvaru kvádru)? (Za neskladné balíky se účtuje příplatek.)

Zdroj : http://allbor.cz/vse-o-nakupu/postovne-a-balne