

Voronoi diagram.

Vlastnosti, použití, konstrukce. Zobecněné Voronoi diagramy.

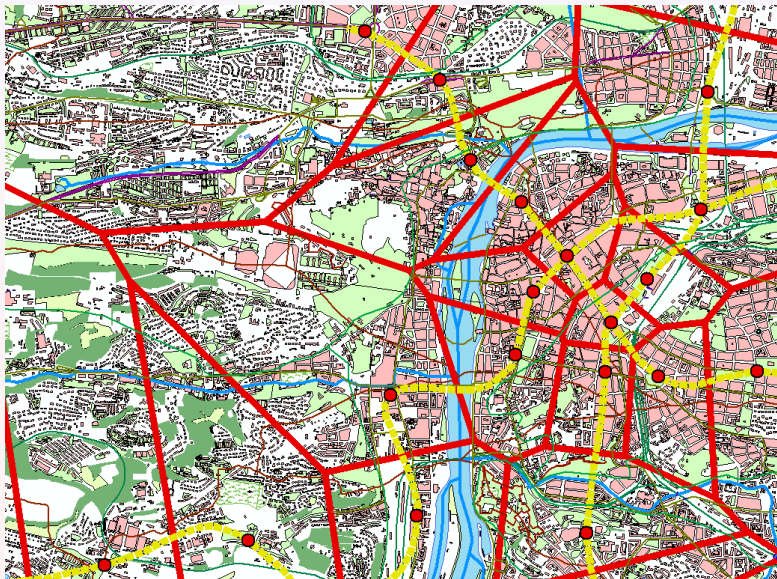
Tomáš Bayer | bayertom@natur.cuni.cz

Katedra aplikované geoinformatiky a kartografie. Přírodovědecká fakulta UK.

Obsah přednášky

- 1 Ukázka použití
- 2 Formulace problému
- 3 Vlastnosti Voronoi diagramu
- 4 Metody konstrukce $\mathcal{V}(P)$
 - Inkrementální konstrukce
 - Konstrukce metodou Sweep Line
- 5 Použití Voronoi diagramu
- 6 Zobecněné Voronoi teselace
 - AW metrika
 - MW metrika
 - Power metrika

1. Problém nejbližší stanice metra



2. Formulace problému

Dáno: Množina bodů $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ v \mathbb{R}^2 .

Hledáme: Voronoi diagram \mathcal{V} množiny P .

Definice 1:

Voronoi diagram $\mathcal{V}(P)$ představuje rozklad množiny bodů P na n uzavřených či otevřených oblastí $\mathcal{V}(p) = \{\mathcal{V}(p_1), \mathcal{V}(p_2), \dots, \mathcal{V}(p_n)\}$ takových, že každý bod $q \in \mathcal{V}(p_i)$ je blíže k bodu p_i než k jakémukoliv bodu $p_j \in P$.

Uzavřenou oblast $\mathcal{V}(p_i)$ nazýváme Voronoi buňkou.

Pro libovolný bod $q \in \mathcal{V}(p_i)$ a libovolnou buňku $\mathcal{V}(p_j)$ platí

$$d(q, p_i) \leq d(q, p_j).$$

Definice 2:

Voronoi diagram $\mathcal{V}(P)$ představuje průsečnici $n - 1$ polorovin.

Proces tvorby $\mathcal{V}(P)$ označujeme Voronoi teselací.

Alternativní označení: Thiessenova, Dirichletova teselace.

3. Voronoi diagramy v přírodě



The Children's Museum of Indianapolis

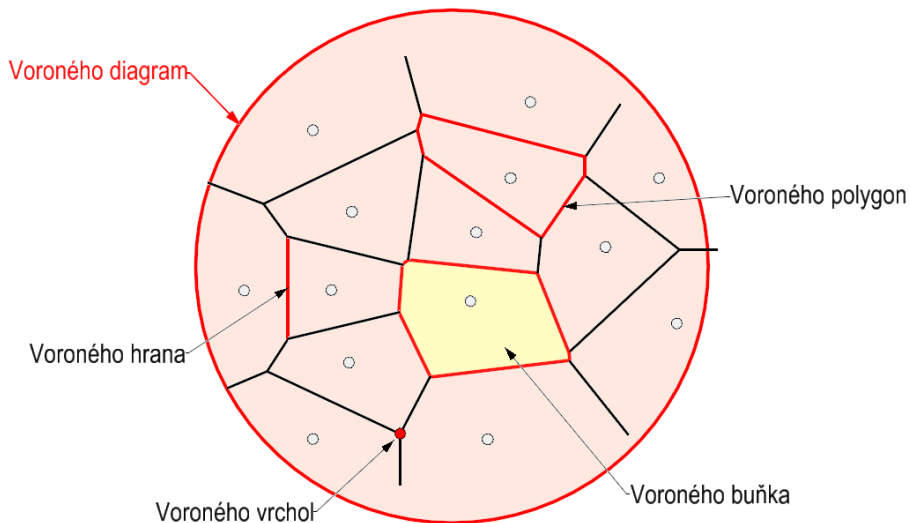


Luca Galuzzi - www.galuzzi.it



Hannes Grobe

4. Terminologie



5. Vlastnosti Voronoi diagramu (1/2)

V1: Voronoi diagram $\mathcal{V}(P)$ je planárním grafem.

V2: Vrchol q Voronoi buňky $\mathcal{V}(p_i)$ je průnikem 3 hran, právě když je $\mathcal{V}(P)$ nedegenerovaný.

V3: Pokud $p_i \in \mathcal{H}(P)$, pak je $\mathcal{V}(p_i)$ otevřený.

V4: Pro každý bod $p_i \in P$ je $\mathcal{V}(P)$ konvexní.

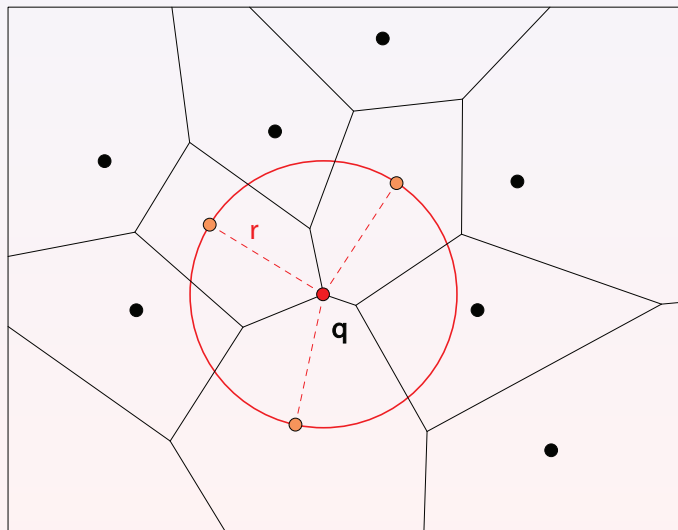
V5: Bod p_i je nejbližším bodem bodu p jestliže $p \in V(p_i)$.

V6: Každá strana $\overline{q_i q_j}$, $i \neq j$, je sdílena právě dvěma sousedními buňkami $\mathcal{V}(p)$.

V7: Bod q je vrcholem $\mathcal{V}(p)$, pokud existuje kružnice $k(q, r)$ procházející třemi nebo více generátory p_i, p_j, p_k , a neobsahuje žádný další bod P (spojitost s $DT(P)$).

V8: Kružnici $k(q, r)$ označujeme jako největší prázdnou kružnici ze všech prázdných kružnic se středem v bodě q .

6. Largest Empty Circle



7. Vlastnosti Voronoi diagramu (2/2)

V9: Průměrné množství hran ve Voronoi polygonu nepřekročí hodnotu 6.

V10: Vztah mezi počtem bodů n , počtem hran n_h a počtem trojúhelníků n_t teselace $\mathcal{V}(P)$:

$$n_h \leq 3n - 6,$$

$$n_t \leq 2n - 5.$$

V11: Voronoi diagram $\mathcal{V}(P)$ představuje ortografickou projekci stěn mnohostěnu tvořeného průsečnicemi všech polorovin A_i do roviny xy .

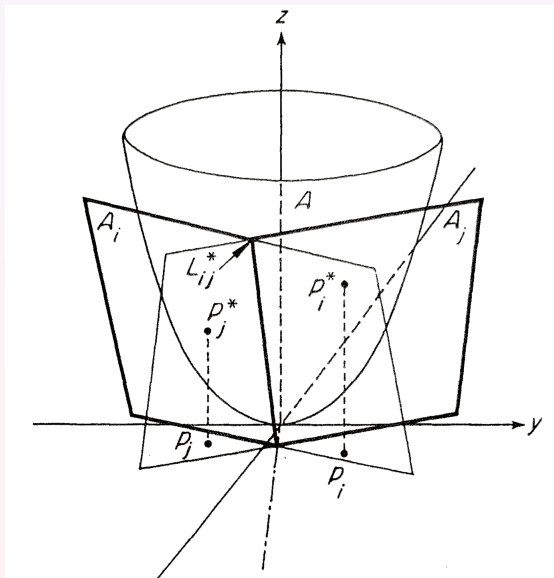
V12: Necht' bod p_i^* představuje ortografický průmět bodu p_i na povrch paraboloidu daného rovnicí

$$z = x^2 + y^2$$

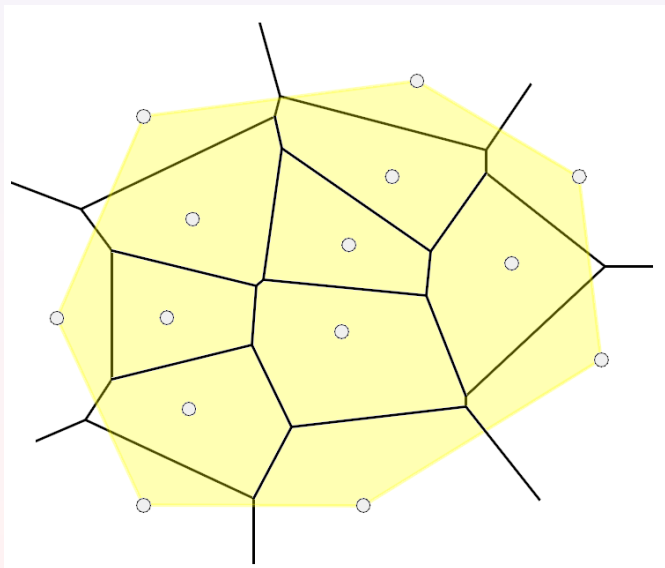
Rovina A_i je tečnou rovinou k paraboloidu v bodě p_i .

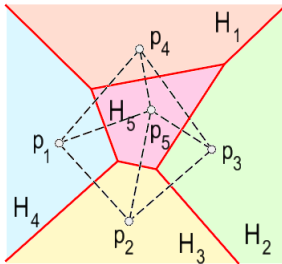
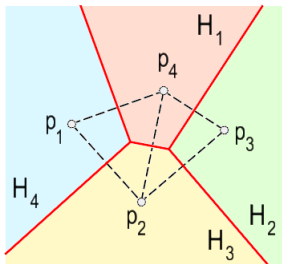
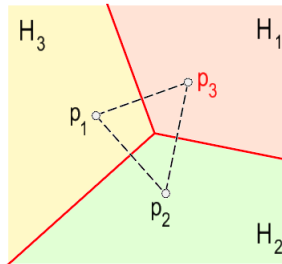
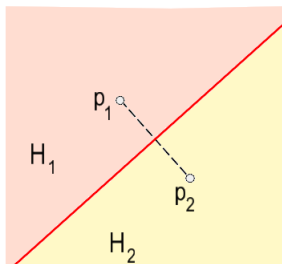
Průsečnicí A_i, A_j je přímka L_{ij}^* .

Její ortografický průmět do roviny xy tvoří Voronoi hranu.

8. Voronoi diagram jako průsečnice polorovin A_i 

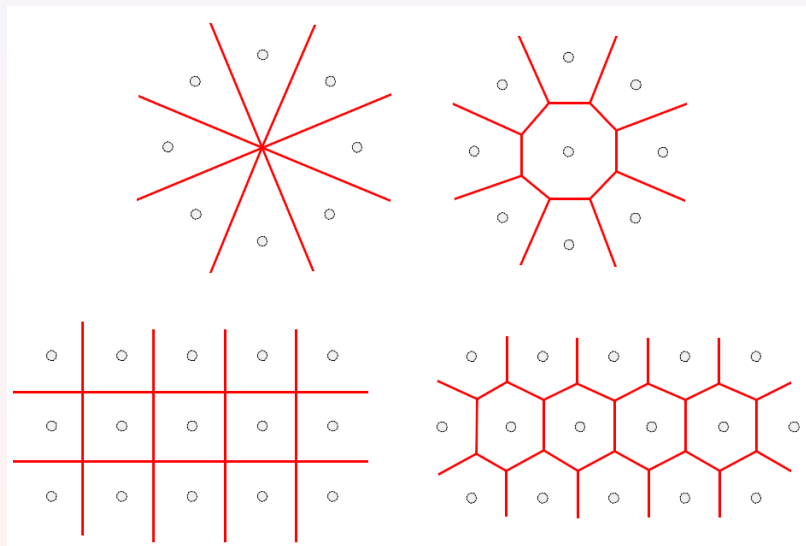
9. Ukázka $\mathcal{V}(P)$ a $\mathcal{H}(P)$



10. Ukázky Voronoi diagramů pro $n = 2, 3, 4, 5$ 

11. $\mathcal{V}(P)$, pravidelně rozložené vstupní množiny

Degenerované případy: 1), 3).



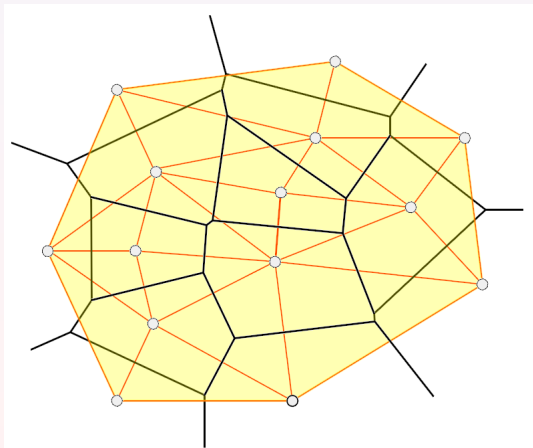
12. Vztah $\mathcal{V}(P)$ a $\mathcal{DT}(P)$

$\mathcal{DT}(P)$ planární graf duální k $\mathcal{V}(P)$.

Body p_i tvoří současně vrcholy $\mathcal{DT}(P)$.

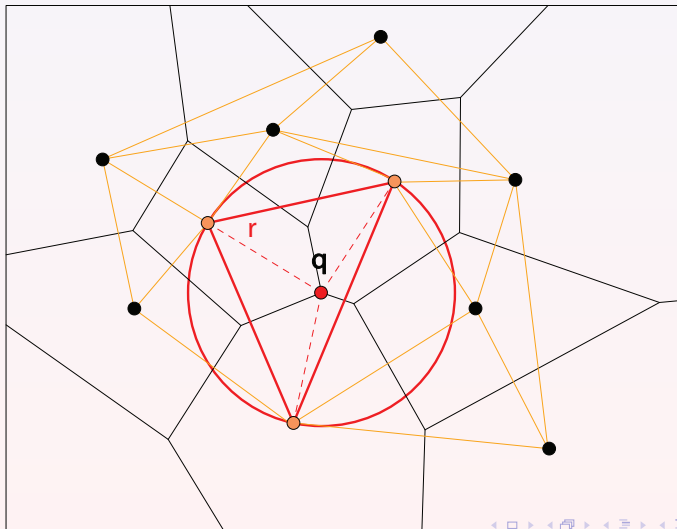
Body p_i, p_j tvoří hranu $t \in \mathcal{DT} \Leftrightarrow \mathcal{V}(p_i)$ a $\mathcal{V}(p_j)$ sdílejí společnou hranu.

Středů kružnic k opsaných trojúhelníkům $\mathcal{DT}(P)$ představují uzlové body $\mathcal{V}(P)$.



13. Largest Empty Circle II.

Kružnice opsaná Delaunay trojúhelníku, má největší poloměr.



14. Metody konstrukce $\mathcal{V}(P)$

Voronoi diagram lze konstruovat přímo či nepřímo.
Nepřímá konstrukce častější.

Přímá konstrukce:

- Inkrementální konstrukce: $O(n^2)$.
- Plane Sweep algoritmus: $O(n^2)$.
- Rozděl a panuj: $O(n \log n)$.

Nepřímá konstrukce:

- Konstrukce přes $DT(P)$: $O(n \log n)$.
Postupné spojení středů kružnic k opsaným $t \in DT(P)$.
 $DT(P)$ umíme konstruovat robustně, nejčastější metoda konstrukce.

Datová struktura pro popis $\mathcal{V}(P)$:

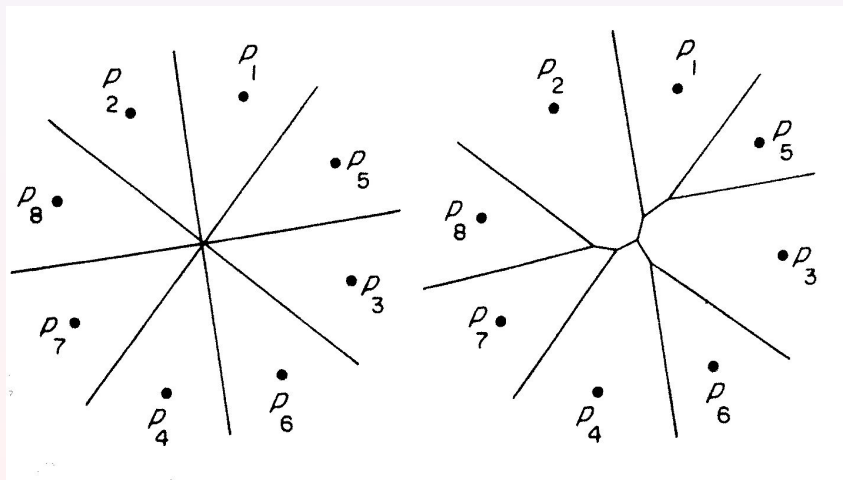
Pro inkrementální metodu použit topologický model.

Nejčastěji Doubly Connected Edge List nebo Winged Edge.

Nutno propojit p_i s generovanou buňkou $\mathcal{V}(p_i)$.

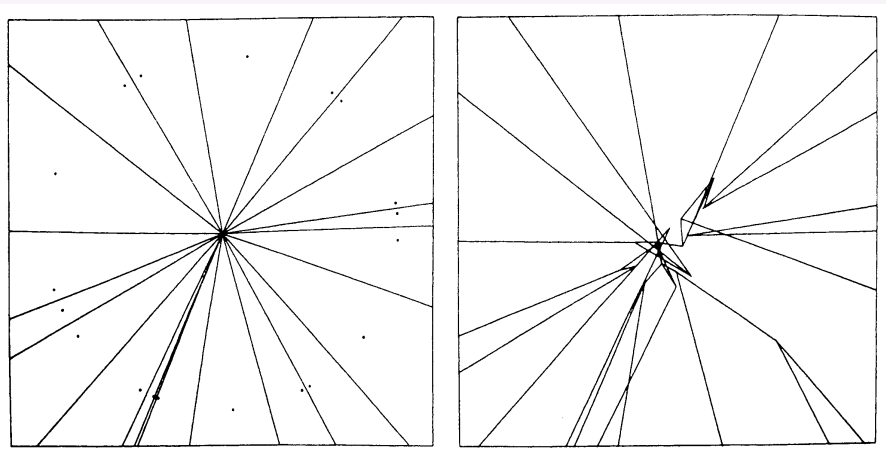
15. Error Free vs. Topologic Approach

Výpočet s maximální přesností vs. uchování topologie.
Okabe et al (2000)



16. Error Free vs. Topologic Approach

Okabe et al (2000)



17. Metoda Inkrementálního vkládání

Inkrementální algoritmus je založen na postupném přidávání bodů do $\mathcal{V}(P)$. Složitost algoritmu je $O(n^2)$.

\mathcal{V} se mezi dvěma iteracemi změní málo.

Postupné přidávání bodů, update stávajícího řešení výpočetně snadný

$$\mathcal{V}(P(n)) = \mathcal{V}P(n-1) + \Delta\mathcal{V}(p).$$

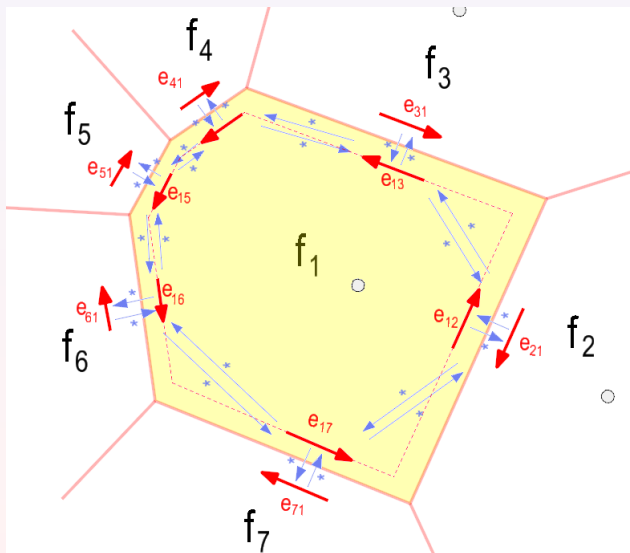
+ Snadno se algoritmizuje.

- Malá odolnost vůči singularitám, zaokrouhlovacím chybám.

Algoritmus tvořen 5 fázemi:

- Konstrukce simplexu Ω oblasti P .
- Konstrukce $\mathcal{V}(\Omega)$.
- *Opakované přidání bodů p do \mathcal{V}_m .*
- *Aktualizace $\mathcal{V}(P(n+1))$.*
- Odstranění simplexu Ω .

18. Ukázka datového modelu



19. Konstrukce simplexu Ω

Žádný z bodů P neleží vně simplexu Ω s vrcholy p_1, p_2, p_3 .
Vrcholy simplexu p_{-1}, p_{-2}, p_{-3} dostatečně daleko od P .

Přidání každého bodu p_i do $\mathcal{V}(P)$ proběhne uvnitř simplexu.
Analogie inkrementálního vkládání u \mathcal{DT} .

Simplex Ω tvořen trojúhelníkem p_1, p_2, p_3

$$\begin{aligned} p_1 &= [x_c, y_c + 3\sqrt{2}/2h], \\ p_2 &= [-3\sqrt{6}/4h + x_c, -3\sqrt{2}/4h + y_c], \\ p_3 &= [3\sqrt{6}/4h + x_c, -3\sqrt{2}/4h + y_c]. \end{aligned}$$

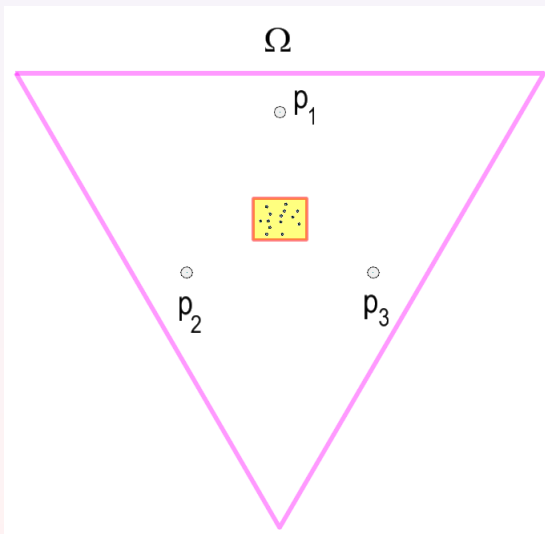
Odvozen ze souřadnic min-max boxu

$$h = \max(x_{max} - x_{min}, y_{max} - y_{min}),$$

a těžiště množiny P

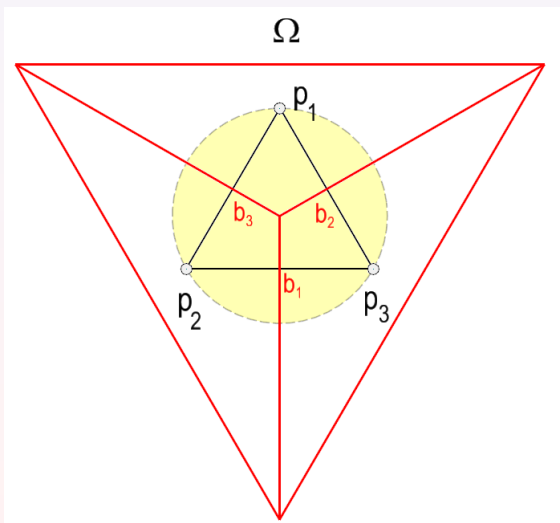
$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \\ y_c &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}. \end{aligned}$$

20. Znáznornění simplexu Ω



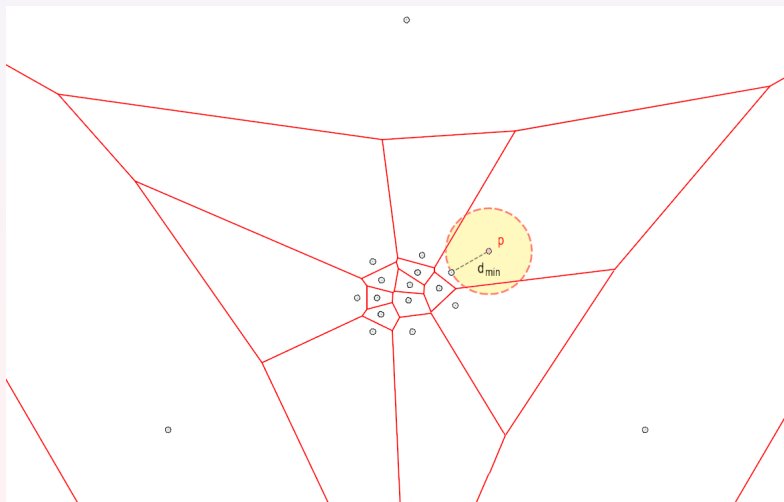
21. Konstrukce $\mathcal{V}(\Omega)$

Konstrukce $\mathcal{V}(\Omega)$ triviální, využívá $DT(\Omega)$ a trojici bisektorů stran $DT(\Omega)$.



22. Nalezení $\mathcal{V}(p_i)$

Rychlé nalezení $\mathcal{V}(p_i)$ obsahujícího p je důležitým krokem algoritmu.
Založeno na nalezení *nejbližšího souseda* p_i bodu p : Quad Tree, kD-Tree,...

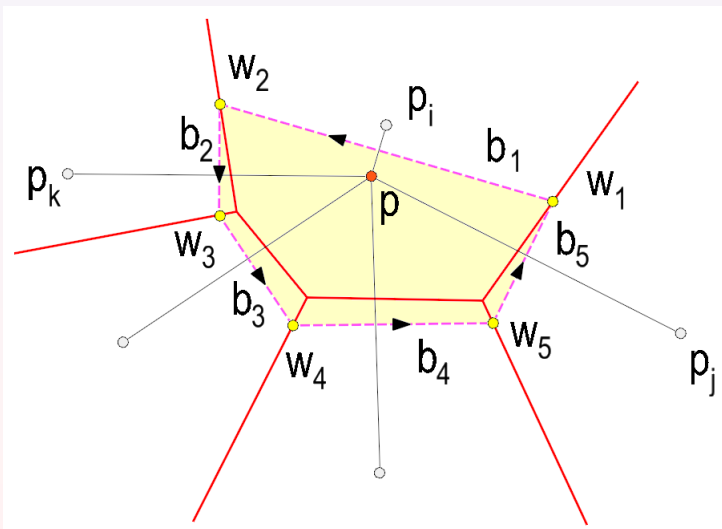


23. Princip konstrukce $\mathcal{V}(p)$

Nalezení $\mathcal{V}(p_i)$ takové, že $p \in \mathcal{V}(p_i)$.

Konstrukce bisektoru b_1 , výpočet průsečíku w_2 s $\mathcal{V}(p_i)$.

Opakujeme v sousedních Voronoi buňkách, dokud není nová buňka $\mathcal{V}(p)$ uzavřena.

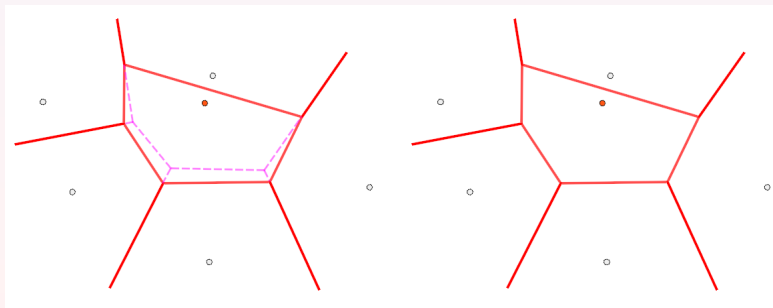


24. Aktualizace $\mathcal{V}(P(n))$

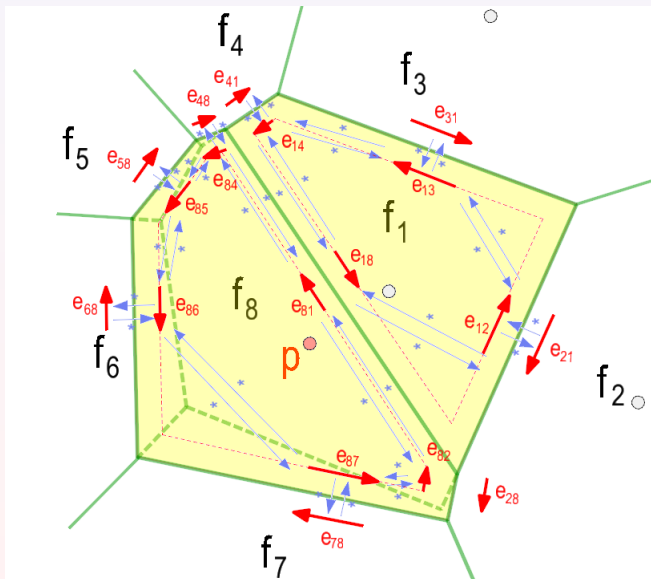
Tvořena dvěma fázemi:

- *Odstranění hran*
Uvnitř $\mathcal{V}(p_i)$ odstraněny všechny staré hrany hrany.
- *Napojení na původní hrany*
Napojení nově vytvořených hran $\mathcal{V}(p)$ na původní hrany.

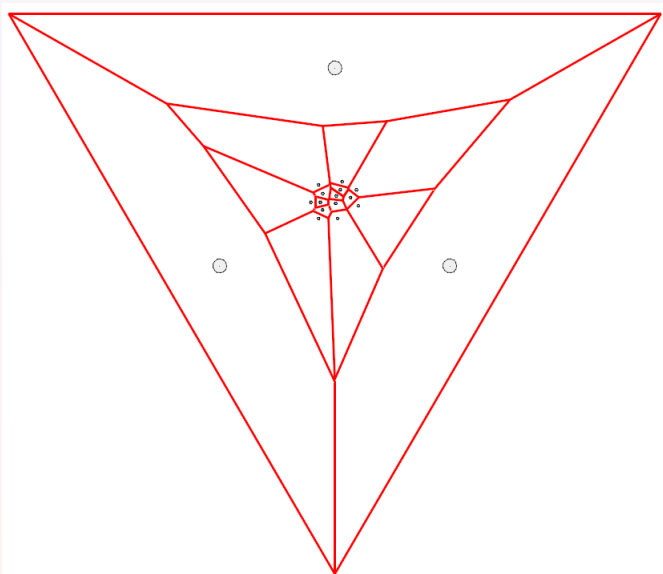
Nutno provést aktualizaci topologie nových hran v DCEL, dosti komplikované.



25. Aktualizace topologie v DCEL



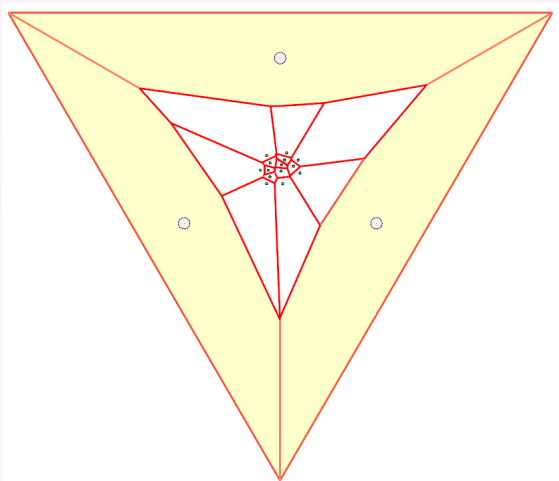
26. Výsledek, znázornění $\mathcal{V}(P + \Omega)$



27. Odstranění simplexu Ω

Odstranění všech buněk $\mathcal{V}(\Omega)$, výsledkem $\mathcal{V}(P)$

$$V(P) = \mathcal{V}(P \wedge \Omega) - \mathcal{V}(\Omega).$$

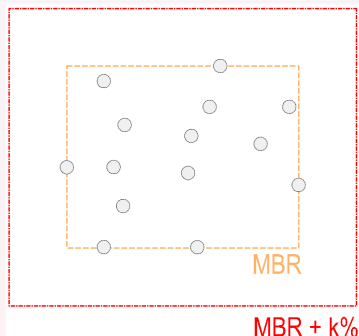


28. Oříznutí $\mathcal{V}(P)$

Nad množinou P zkonstruován MBR.

Vygenerován obdélník, jeho rozměry vzhledem k MBR zvětšeny o k %.
Hodnota k zpravidla mezi 20-50%.

Obdélník použit pro oříznutí hran $\mathcal{V}(P)$.

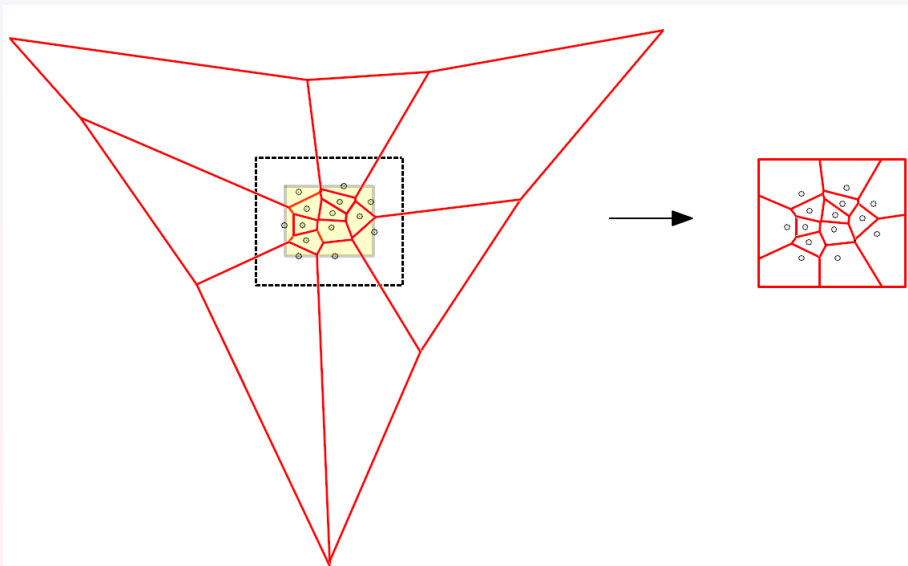


Hrany $\mathcal{V}(p_i)$ oříznuty/prodlouženy na hranici Ω .

Vrcholy obdélníku přidány do neuzavřených $\mathcal{V}(p_i)$ jako nové vrcholy.

Buňky $\mathcal{V}(p_i)$ uměle uzavřeny.

29. Znáznornění oříznutí $\mathcal{V}(P)$



30. Konstrukce Sweep Line algoritmem

Autorem Steve Fortune, 1986.

Složitost $O(n \cdot \log(n))$.

Inkrementální konstrukce, zametací přímka (Sweep Line).

Netradiční přístup, konstrukce $\mathcal{V}(P)$ prostřednictvím průsečíků parabolických oblouků.

Posloupnost parabolických oblouků označována jako Beach Line.

Analogie s tvarem pláže, na kterou dopadají vlny.

Parabola = množina bodů se stejnou vzdáleností od bodu a úsečky (Sweep Line).

Princip konstrukce:

Nad každým bodem množiny vygenerován kužel, úhel $\varphi = \pi/4$.

Konstrukce pomocné roviny ρ svírající s rovinou xy úhel $\omega = \pi/4$.

Průsečnice kužele a roviny ρ tvoří parabolické oblouky.

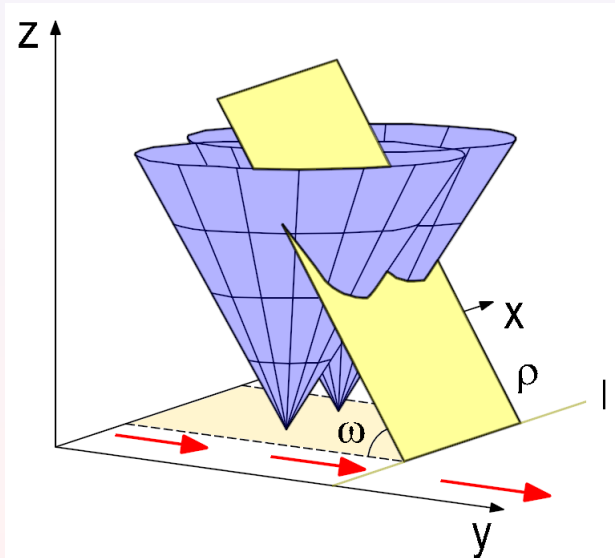
Průsečíky parabolických oblouků představují hrany $\mathcal{V}(P)$.

Rovina ρ (resp Sweep Line l) se pohybuje ve směru osy y .

Pravidelné střídání *dvou událostí*:

- Site Event.
- Circle Event.

31. Princip Fortune algoritmu



32. Ilustrace Fortune algoritmu

33. Site Event

Událost nastává v případě, kdy Sweep Line l prochází $p \in P$.

Rovina ρ je v p tečnou rovinou kužele.

Průsečnicí je polopřímka (pro účely algoritmu úsečka).

Posunujeme-li ρ , degeneruje úsečka v parabolický oblouk.

Šířka oblouku se neustále zvětšuje.

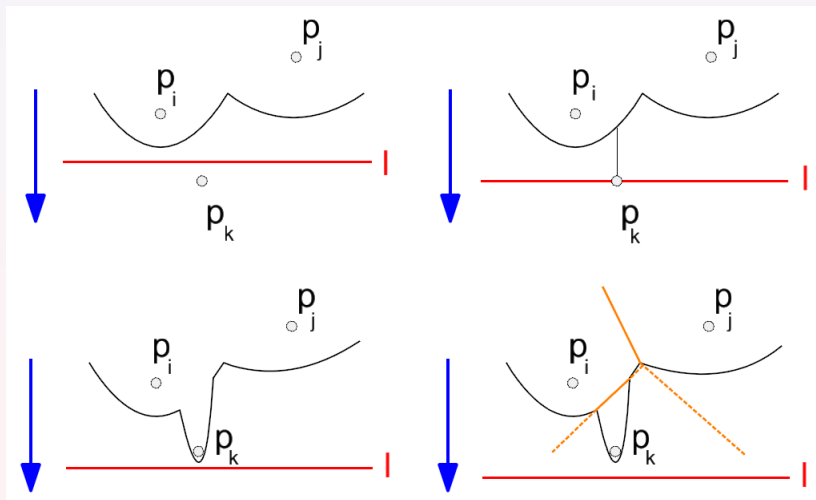
Parabolický oblouk rozdělí původní aktuální Beach Line na 2 části.

S posunem Sweep Line l se paraboly zplošťují.

Vzdálenost jejich průsečíků se zvětšuje.

Průsečíky tvoří hrany $\mathcal{V}(P)$.

34. Ilustrace Site Event

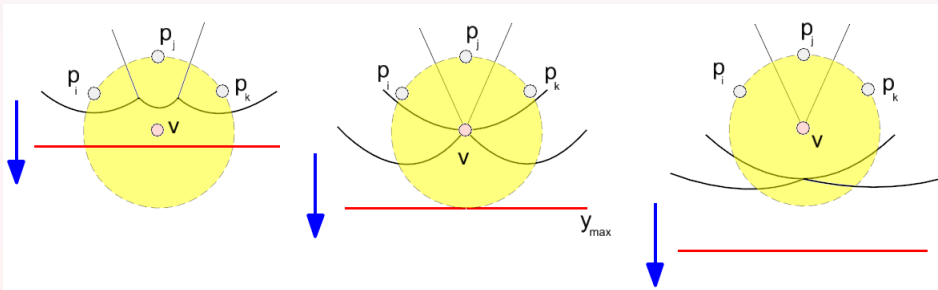


35. Circle Event

Tři parabolické oblouky Beach Line se protnou v bodě v .
Průsečík v středem kružnice $k(v, r)$ opsané trojici bodů.

Událost spojena se vznikem nového Voronoi uzlu v .
V okamžiku vzniku události zametací přímka l tečna k .

Parabolický oblouk, jehož generující bod má nejmenší hodnotu souřadnice y z trojice bodů, odstraněn z Beach Line.



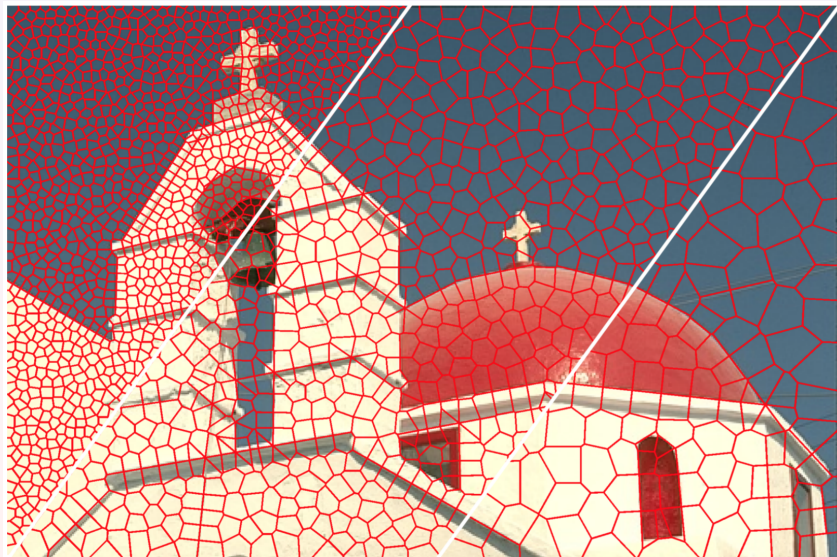
36. Použití Voroného digramů

Jedna z nejčastěji použitých struktur v geoinformaticce.
V pozadí mnoha metod i úloh.

Nejčastější aplikace Voronoi diagramů:

- Segmentace obrazu.
- Komprese dat.
- Poštovní problém.
- Nalezení přirozených sousedů (Naturail Neighbours).
- Interpolace metodou Natural Neighbour.
- Biometrie.
- Hledání optimálních cest.
- Analýzy shluků.
- Klasifikace dat.
- Konstrukce topologické kostry.
- Kartografická generalizace.

37. Segmentace obrazu



38. Nearest Post Office Problem

Optimalizace spádových oblastí vzhledem k centru (či naopak).

Uplatnění při návrhu polohy nemocnic, průmyslových zón, supermarketů, stanic MHD, kin, institucí.

Poloha volena zpravidla do centra Voronoi buňky.

Ze všech míst regionu zhruba stejná vzdálenost.

Ze znalosti tvaru spádové oblasti lze určit:

- jaké množství obyvatel bude službu využívat,
- zda je služba optimálně dostupná.

Měřítkem efektivity mohou být náklady na pořízení určitého zboží, cena za dopravu do centrálního bodu, atd.

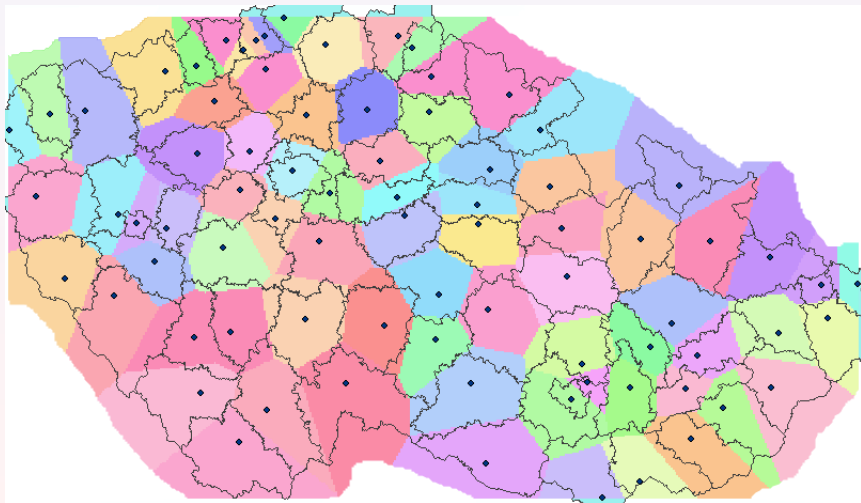
Aby popsaný model platil, je nutno zavést omezující podmínky:

- *Efektivní chování člověka*
Člověk bude využívat pouze ta centra, ke kterým má blíže než k jiným.
Snaha o minimalizaci nákladů.
- *Lineární růst nákladů*
Se vzdáleností od centra rostou náklady lineárně.
Pokud náklady nerostou lineárně, nutno použít jinou metriku.
Popř. použít obecnou nákladovou funkci vyjádřenou funkčním vztahem.
- *Stejná kvalita*
Kvalita produktu je ve všech centrech stejná.

39. The Nearest Post Office Problem



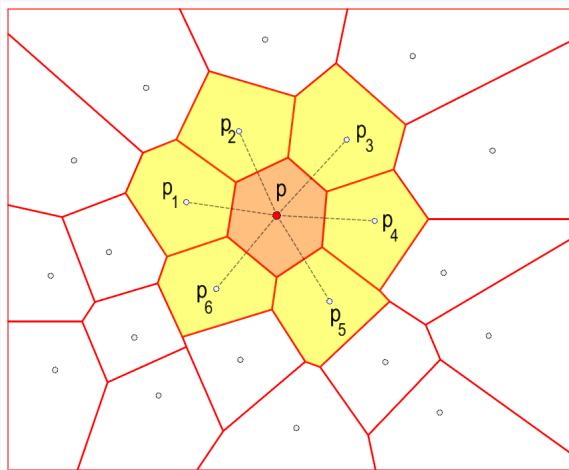
40. Okresy v ČR vs. Voronoi diagram



41. Natural Neighbor

Bod p_i přirozený soused $p \Leftrightarrow \mathcal{V}(p_i)$ sdílí hranu s $\mathcal{V}(p)$.

Využití při interpolaci, analýzách, ...



42. Natural Neighbour Interpolation

Interpolační metoda, často využívána v geoinformatice (Sibson, 1981).

Představuje aplikaci váženého průměru.

Není vhodná pro topografické povrchy, viditelné artefakty Voronoi buněk.

*Dáno: Množina bodů $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^3$, kde $p_i = [x_i, y_i, z_i]$, bod $q = [x_q, y_q]$.
Hledáme z_q .*

Do výpočtu zahrnuto k bodů p_i , jejichž $\mathcal{V}(p_i)$ se přidáním bodu q změní.
Jedná se o některé přirozené sousedy.

Váhová funkce w_i

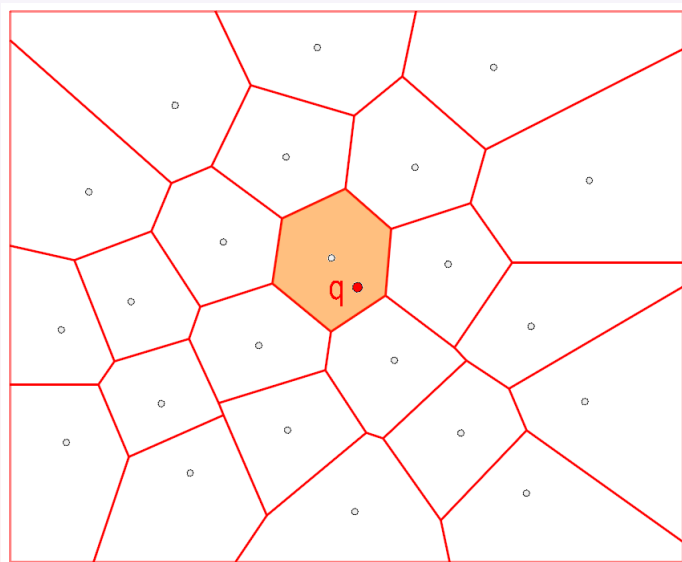
$$w_i = \frac{A(p_j) - A'(p_j)}{A(q)},$$

$A(q)$ plocha buňky $\mathcal{V}(q)$, $A(p_i)$ plocha $\mathcal{V}(p_i)$ před přidáním q a $A'(p_i)$ plocha $\mathcal{V}'(p_i)$ po přidání q .

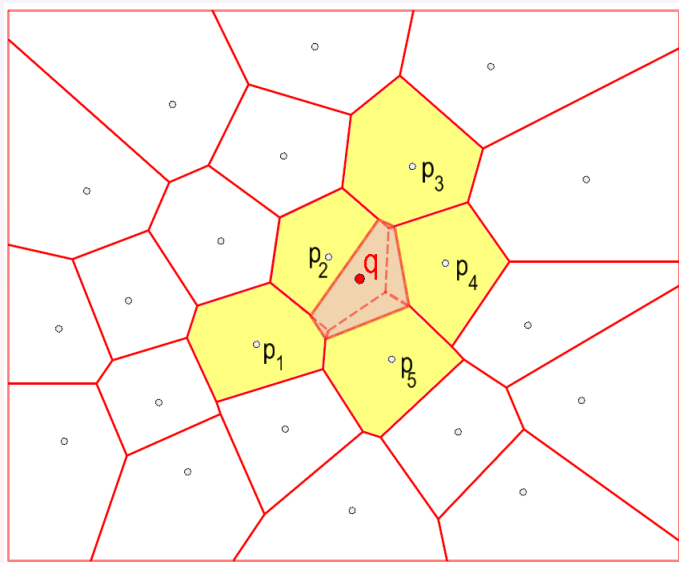
Interpolovaná hodnota z_q

$$z_q = \sum_{i=1}^k w_i z_i.$$

43. Natural Neighbor, nalezení $\mathcal{V}(p)$

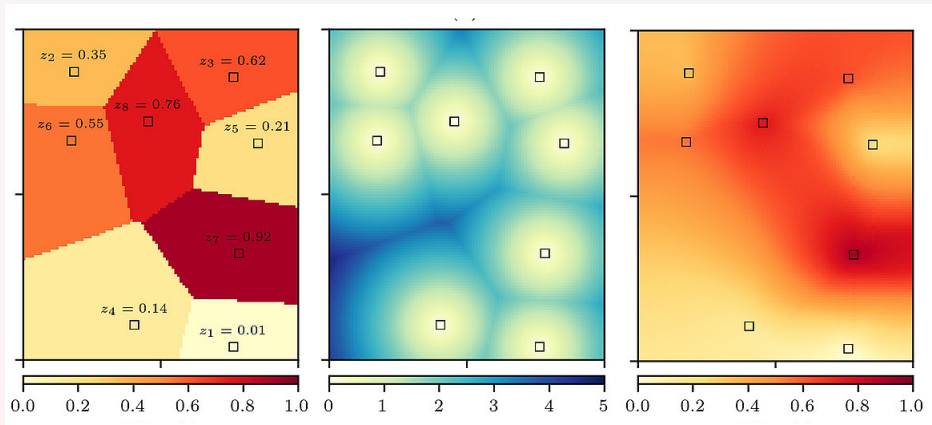


44. Natural Neighbor, změnou dotčené buňky $\mathcal{V}(p_j)$



45. Ukázka interpolace Natural Neighbor

Viditelné artefakty Voronoi buněk.

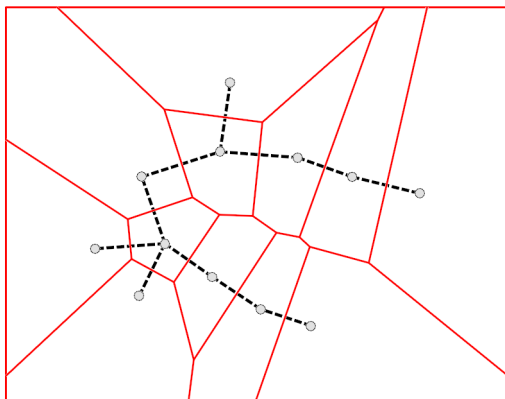


46. Optimalizace konstrukce minimální kostry

Za použití $\mathcal{V}(P)$ lze optimalizovat tvorbu MST.

Spojujeme pouze body p_i , jejichž $\mathcal{V}(P_i)$ sdílejí společnou hranu.

Při konstrukci MST prohledáváme pouze přirozené sousedy.



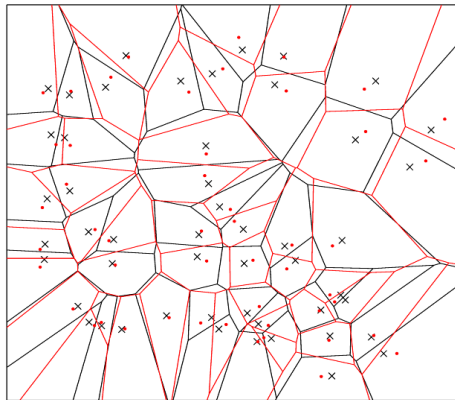
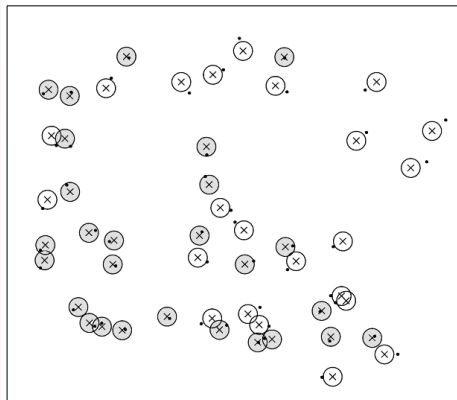
47. Porovnání bodových množin P, Q

Podobné množiny P, Q generují podobné $\mathcal{V}(P)$ a $\mathcal{V}(Q)$.

Lze měřit tvar, počet hran, alternativně převod na graf.

Výpočet invariantů, alternativně testován izomorfismus grafů.

Nevýhodou značná citlivost na šum.



48. Přehled metrik

Voronoi diagramy lze provozovat různými metrikami.
Změna tvaru buněk, vlastností.

Euklidovská metrika

$$d(q, p) = \|q - p\| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Manhattanská metrika

$$d(p, q) = |q - p| = |\Delta x| + |\Delta y|.$$

Minkowského metrika

$$d(q, p) = \|q - p\|^k = (|\Delta x^k| + |\Delta y^k|)^{1/k}.$$

MW (Multiplicatively Weighted) metric

$$d_m(q, p) = \frac{1}{w} \cdot d(q, p).$$

AW (Additively Weighted) metric

$$d_a(q, p) = d(q, p) - w.$$

CW (Compoundly Weighted) metric:

$$d_c(q, p) = \frac{1}{w} \cdot d(q, p) - w.$$

Power metric

$$d_p(q, p) = \|q - p\|^2 - w.$$

49. Zobecněné Voronoi diagramy

Vycházejí z Voronoi diagramu, zobecnění konceptu. Bývají nazývány jako *zobecněné Voronoi teselace*.

Základní vlastnosti zobecněných VD:

- Generátory mohou mít různou váhu.
- Používají různé metriky.

Důsledek:

- Buňky nemusejí být konvexní.
- Hranice buněk mohou tvořit kružnice či obecné křivky (hyperbola).
- Buňky nemusejí obsahovat generátor.

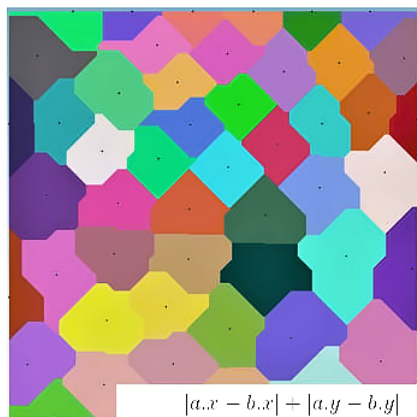
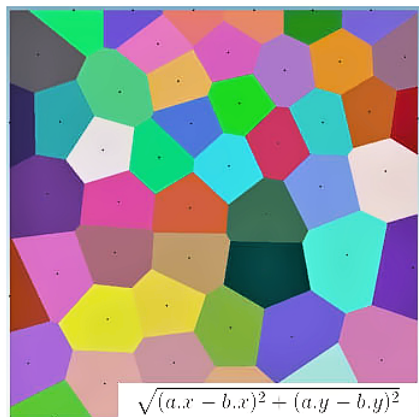
- Složitá konstrukce, nelze použít DT.
- Neumíme většinou pro velké množiny.

Nejznámější zobecněné VD:

- Johnson-Mehlova teselace (AW metrika)
- Apolloniova teselace (MW metrika),
- Power diagrams (Power metrika).

50. Euklidovská vs. Manhattanská metrika

Liniové segmenty, směrnice $k \frac{\pi}{4}$.
Buňky mohou být nekonvexní.



51. AW teselace

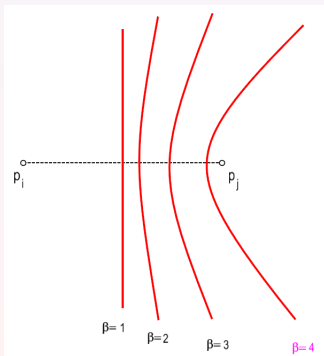
AW metrika: rozdíl β vzdáleností bodů p, p_i a p, p_j .

$$\beta = d(p, p_i) - d(p, p_j).$$

AW teselace

$$\beta = \text{const.}$$

Hrany buněk představovány hyperbolami, buňky nekonvexní.
Pro $\beta = 0$ získáme Voronoi diagram.



53. Johnson-Mehl teselace

AW teselace s "váhami".

Generátory představují kružnice s poloměry r .

AW metrika

$$\beta = (d(p, p_i) - r_i) - (d(p, p_j) - r_j) = 0.$$

Body ležící v jedné buňce mají stejnou vzdálenost od kružnice.

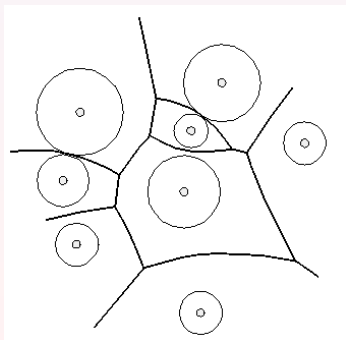
Hranice buněk mají stejnou vzdálenost od více než jedné kružnice

$$d(q, p_i) - r_i = d(q, p_j) - r_j.$$

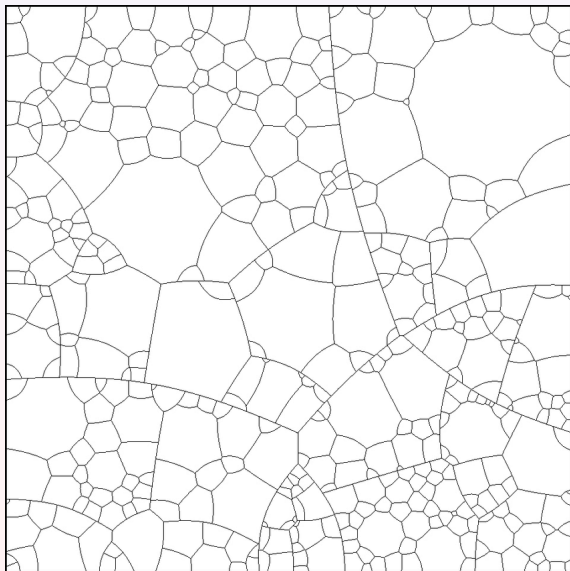
Buňky jsou nekonvexní, z centra každé buňky je vidět do všech vrcholů.

Tvoří star-shaped polygony.

Využívána v biologii, chemii pro simulace růstu buněk či krystalů.



54. Ukázka Johnson-Mehl teselace



55. MW teselace

MW metrika: poměr α vzdáleností bodů p , p_i a p , p_j .

$$\alpha = \frac{d(p, p_i)}{d(p, p_j)}$$

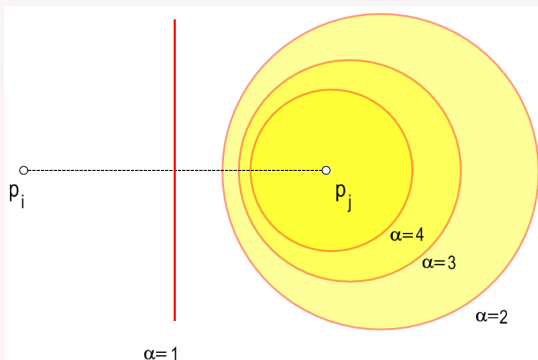
MW teselace

$$\alpha = \text{const.}$$

Používá MW metriku, nekonvexní buňky.

Hrany buněk kruhové oblouky, tzv. *Apolloniovy kružnice*.

Pro $a = 1$ získáme Voronoi diagram.

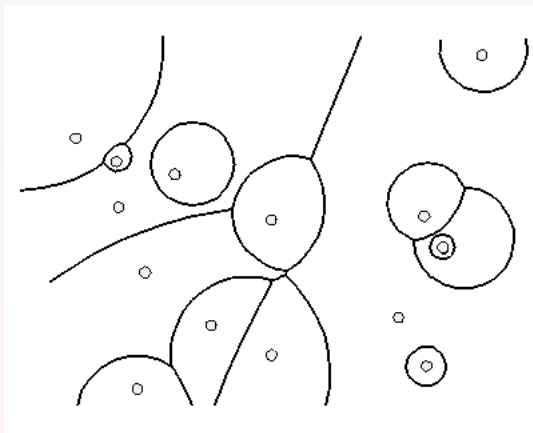


56. Apolloniova teselace

Používá MW metriku, generátory představovány body.
Hrany buněk tvoří oblouky Apolloniových kružnic.

Apolloniova kružnice:

Množina všech bodů, které mají od dvou bodů stejný poměr vzdáleností α .



57. Power metrika

Chan, 1995.

Power metrika: rozdíl γ druhých mocnin vzdáleností p, p_i a p, p_j

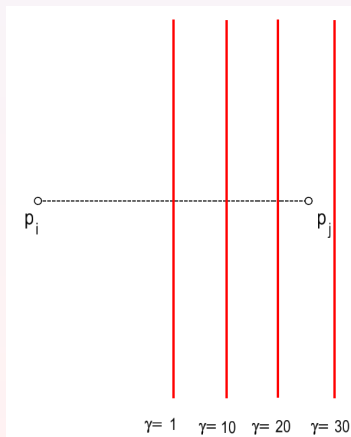
$$\gamma = d^2(p, p_i) - d^2(p, p_j).$$

Teslace s Power metrikou

$$\gamma = \text{const.}$$

Hrany buněk představovány úsečkami, buňky konvexní.

Pro $\gamma = 0$ získáme Voronoi diagram.



58. Power diagram

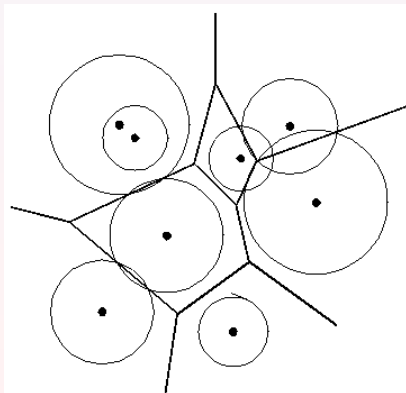
Teselace založená na Power metrice

$$\gamma = (d(p, p_i) - r_i)^2 - (d^2(p, p_j) - r_j)^2.$$

Generátory představují body nebo kružnice s poloměrem r .

Konvexní buňky podobné Voronoi diagramu, hranice buněk tvoří úsečky.
Některé z buněk mohou obsahovat více než jeden generátor či jsou prázdné.

Využití: Konstrukce, skeletonu (Medial Axis).



59. Ukázka Power diagramu

