Prostorová indexace.

Hilbert Curve. Z-Curve. Quad Tree. k-D Tree. R-Tree. Clustering.

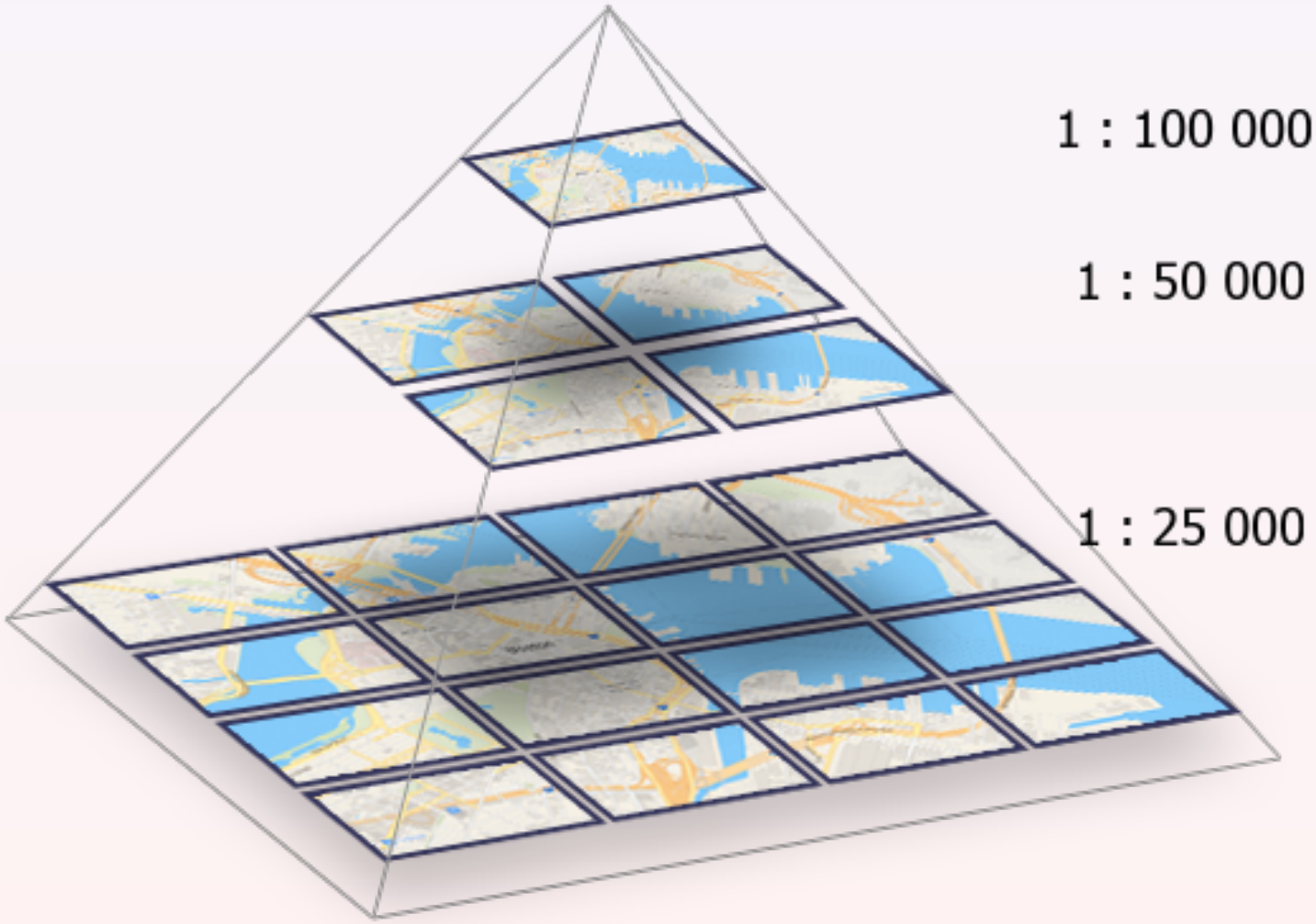
Tomáš Bayer | bayertom@natur.cuni.cz

Katedra aplikované geoinformatiky a kartografie, Přírodovědecká fakulta UK.

1. Motivace

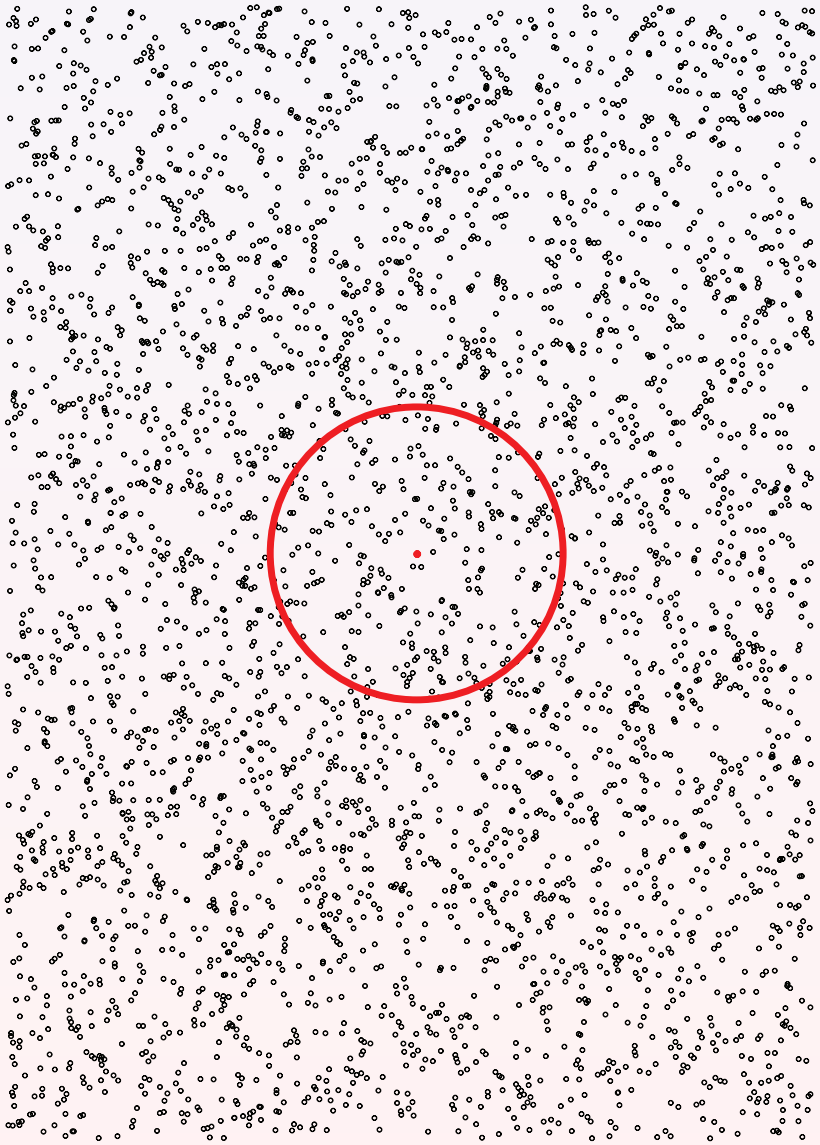
Multiměřítková reprezentace kartografických dat.

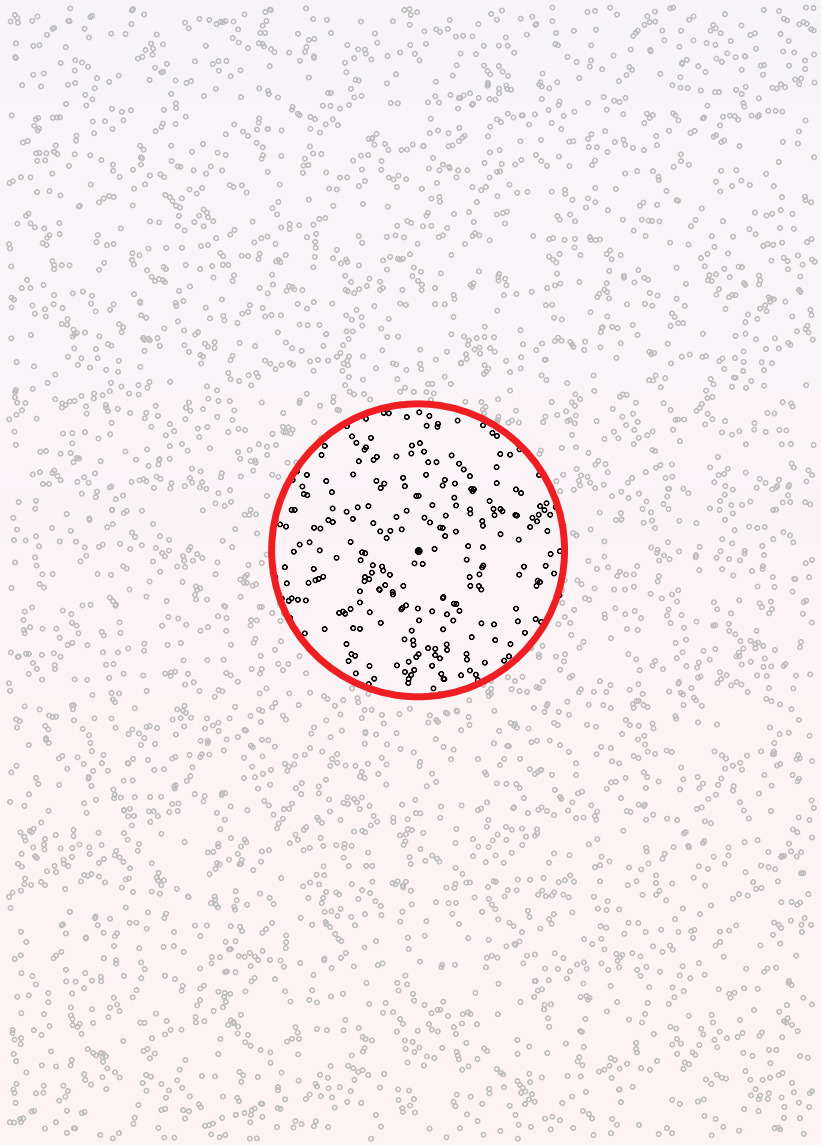
Jakou dlaždici načíst při posunu mapy v aktuálním zvětšení?



2. Motivace

Zpracování bodových mračen, rychlé nalezení KNN.





3. Prostorová data

Prostorová data reprezentují objekty na zemském povrchu.

Mají geometrickou a atributovou složku.

Prostorové dotazy: práce s podmnožinou prvků splňujících kritérium.

Využívají vzájemné prostorové vztahy mezi jednotlivými entitami.

Prostorové vazby budovány v rámci předzpracování.

Nejčastější prostorové dotazy:

- Nalezení $k-$nejbližších sousedů (KNN Search).
- Nalezení objektů ležících v intervalu (Interval Search).
- Nalezení objektů ležících uvnitř jiného objektu (Location Search).
- Nalezení objektů ležících v určité vzdálenosti od jiných (Distance Seach).

Datové soubory rozsáhlé, efektivní implementace prostorových operací.

Prostorové dotazy lze urychlit s využitím *prostorové indexace.*

Zásadní při zpracování Big-Data.

Metody vhodné pro 0D-2D entity, lze rozšířit i pro 3D.

Topologická korektnost výstupů.

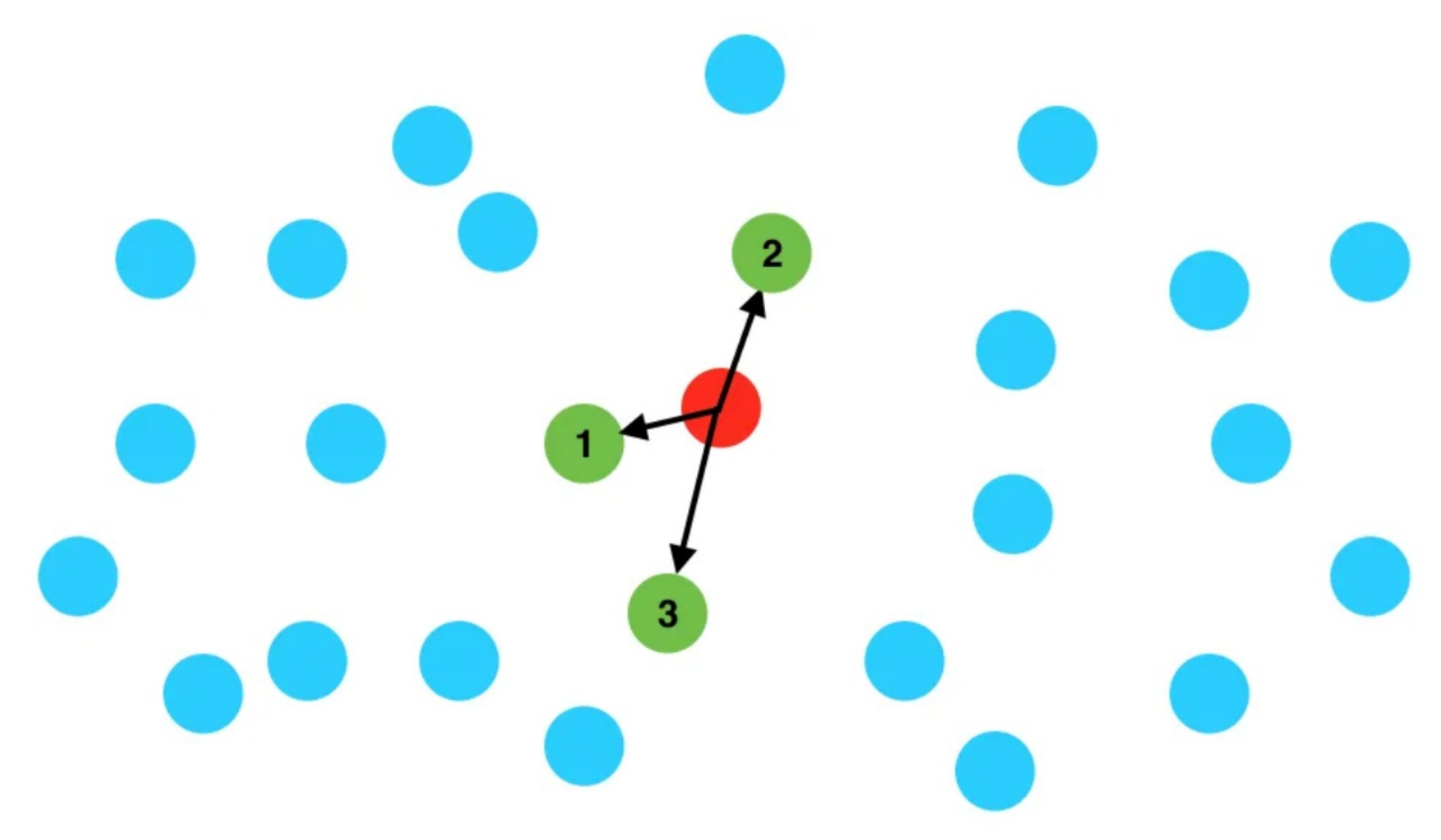
Indexace & GIS:

Zrychlení operací s prostorovými daty, prostorové dotazy a analýzy.

Web GIS, rastrové / vektorové dlaždice, rychlé načítání dat.

Jakou dlaždici načíst v aktuálním zvětšení?

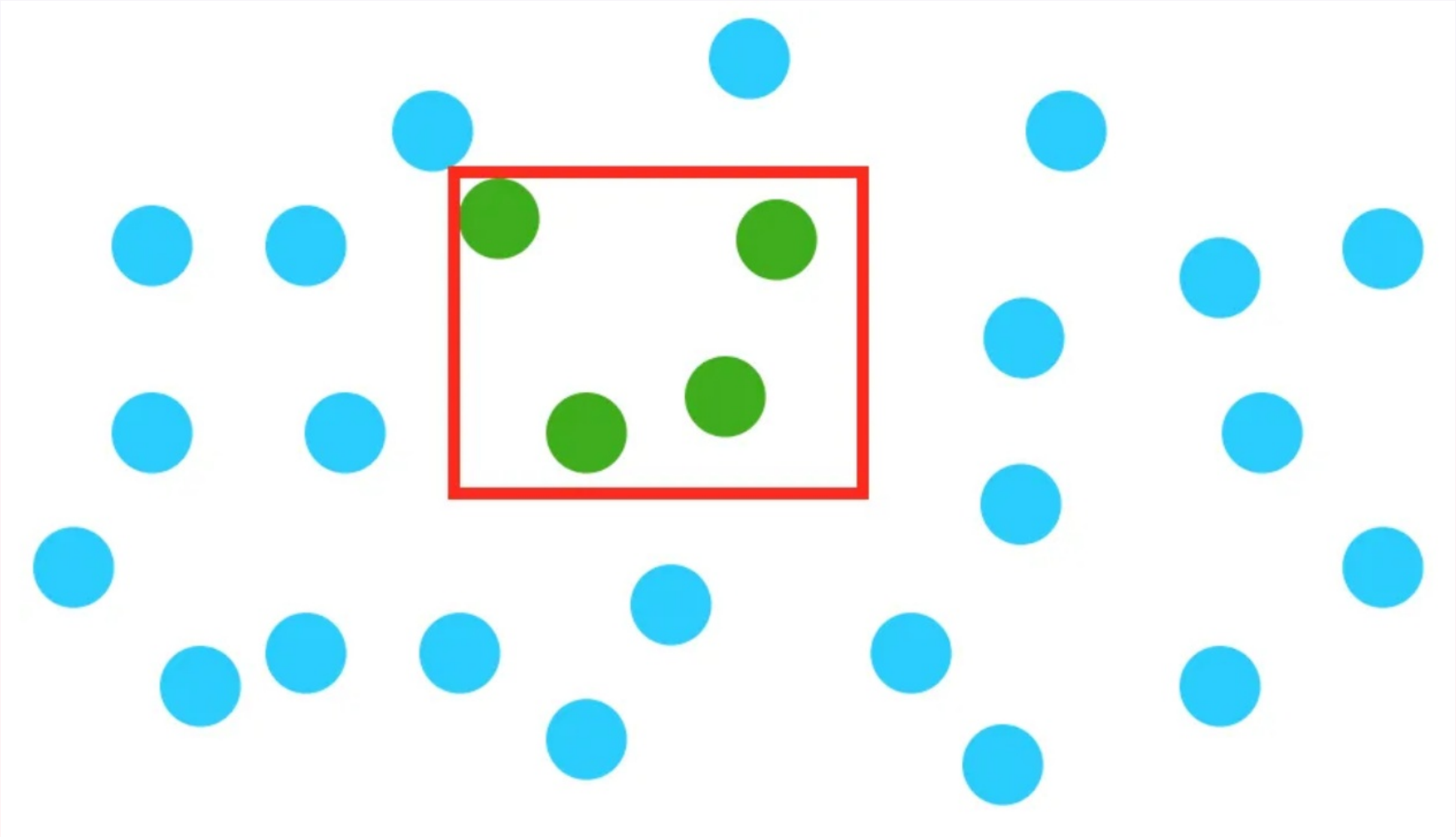
4. KNN Search



KNN search výpočetně drahý.

ANN (Approximate NN) search: body v dlaždicích stejným prostorovým indexem.

5. Interval Search



6. Metody prostorové indexace

Prostorová indexace založeny na transformačních metodách.

Dvě základní strategie:

Mapování do prostoru s nižší dimenzí:

tzv. Geo-Hashing.

Zpravidla konverze na jednodimenzionální problém, výsledkem 1D prostorový index.

Využívá Space Ordering (seřazení dle hodnoty hashe).

Indexovány buňky v 2D/3D gridu.

+ Extrémně rychlá, $\Theta(c)$.

- Problematické definice sousedství.

- Vznik kolizí.

Zástupci: Snake Curve, Spiral Curve, Hilbert Curve, Z-Curve.

Dynamické dělení prostoru:

tzv. Space Partitioning.

Prostor opakovaně dělen na menší části stejné dimenze (+- pravidelné).

Části se mohou / nemusejí překrývat.

Snaha minimalizovat jejich překryt.

+ Rychlost.

+ Částečné zachování sousedství.

Zástupci: Grid, Quad-Tree, k-D Tree, R-Tree, Hierarchical Clustering.

7. Geo-Hashing

Transformace úlohy na jednodimenzionální indexaci, vhodné pro bodové prvky.

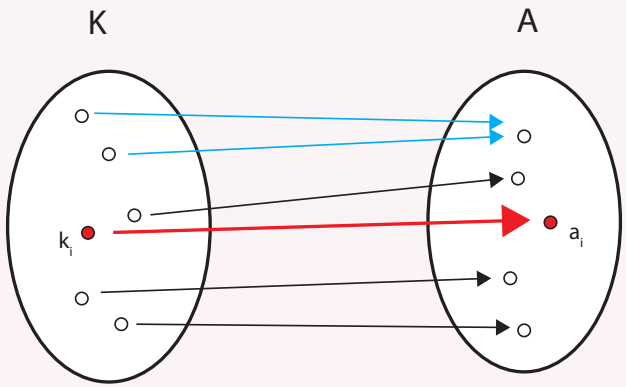
Hashovací funkce (jednosměrná)

$$h : K \to A, \qquad h(k) = a, \qquad \|A\| \ll \|K\|, \qquad k \in K, a \in A.$$

Prostor klíčů K zobrazen do prostoru adres A.

Klíč k posloupnost bitů libovolné délky, adresa a posloupnost bitů pevné délky.

Pro $\forall a \in A$ snadný výpočet $a = h(k)$, klíčem poloha bodu $p = [x, y, z]$



Protože $\|A\| \ll \|K\|$, dochází ke kolizím

$$h(k_1) = h(k_2), \qquad k_1 \neq k_2.$$

Blízké objekty mají podobnou adresu, lze je uspořádat dle polohy.

Využití *Space Filling Curves* pro výpočet hashovací funkce:

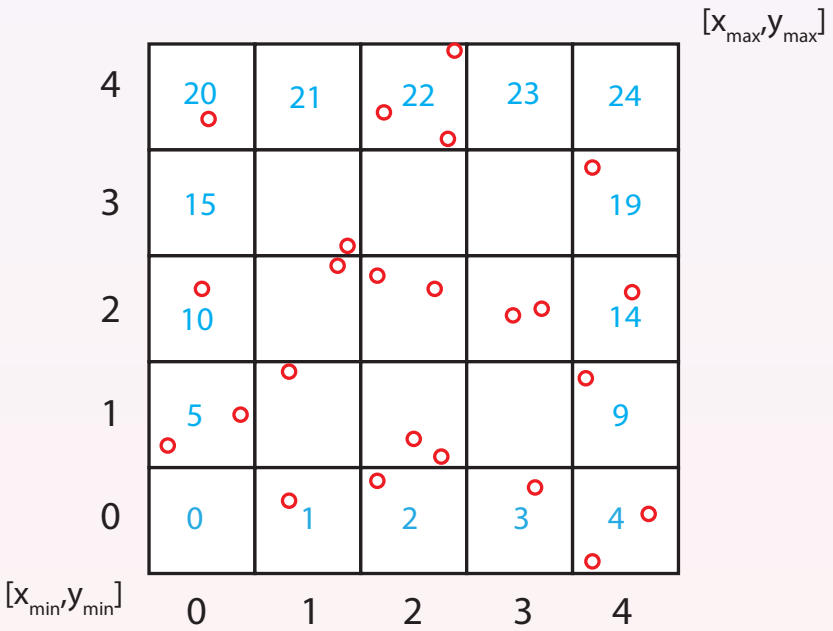
- Snake Curve.
- Spiral Curve.
- Hilbert Curve.
- Z-Curve.

8. Pokrytí prostoru gridem

Prostor lze pokrýt 2D / 3D gridem.

Počet buněk (buckets) n_b funkcí velikosti datasetu n a dimenze k

$$n_b = n^{1/k}.$$



Řádkový a sloupcový index bodu $p = [x, y]$

$$i = (int)\frac{y - y_{min}}{y_{max} - y_{min}}, \qquad j = (int)\frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}.$$

Blízké objekty leží ve stejné buňce.

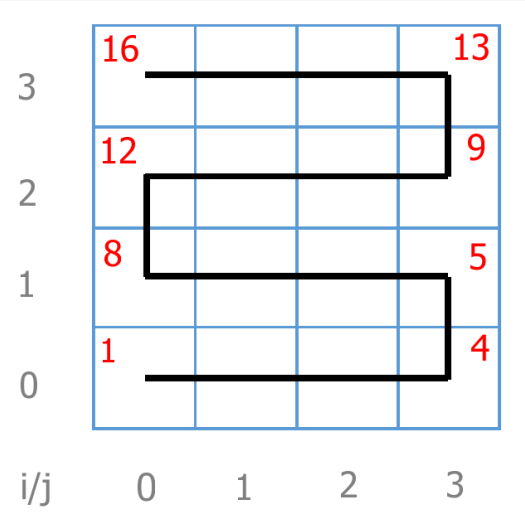
Tato struktura bude použita pro indexaci: Space Filling Curves.

Dodatečné paměťové nároky $O(n^k)$, $k = 2, 3$.

9. Snake Curve

Jednoduchá vyplňující křivka.

Každá buňka gridu získá 1D index.



Postup po řádcích resp. sloupcích, dle x resp. y souřadnic vzestupně.

$$p.addr = \begin{cases} i \cdot n + j + 1, & i \text{ liché}, \\ (i+1)n - j, & i \text{ sudé}. \end{cases}$$

Objekty v jedné buňce $\rightarrow$ stejný index.

Alternativně lze použít i bitovou reprezentaci.

Získání adresy v $O(c)$.

\+ Jednoduchá implementace.

\- Blízké objekty nemusejí mít podobnou adresu.

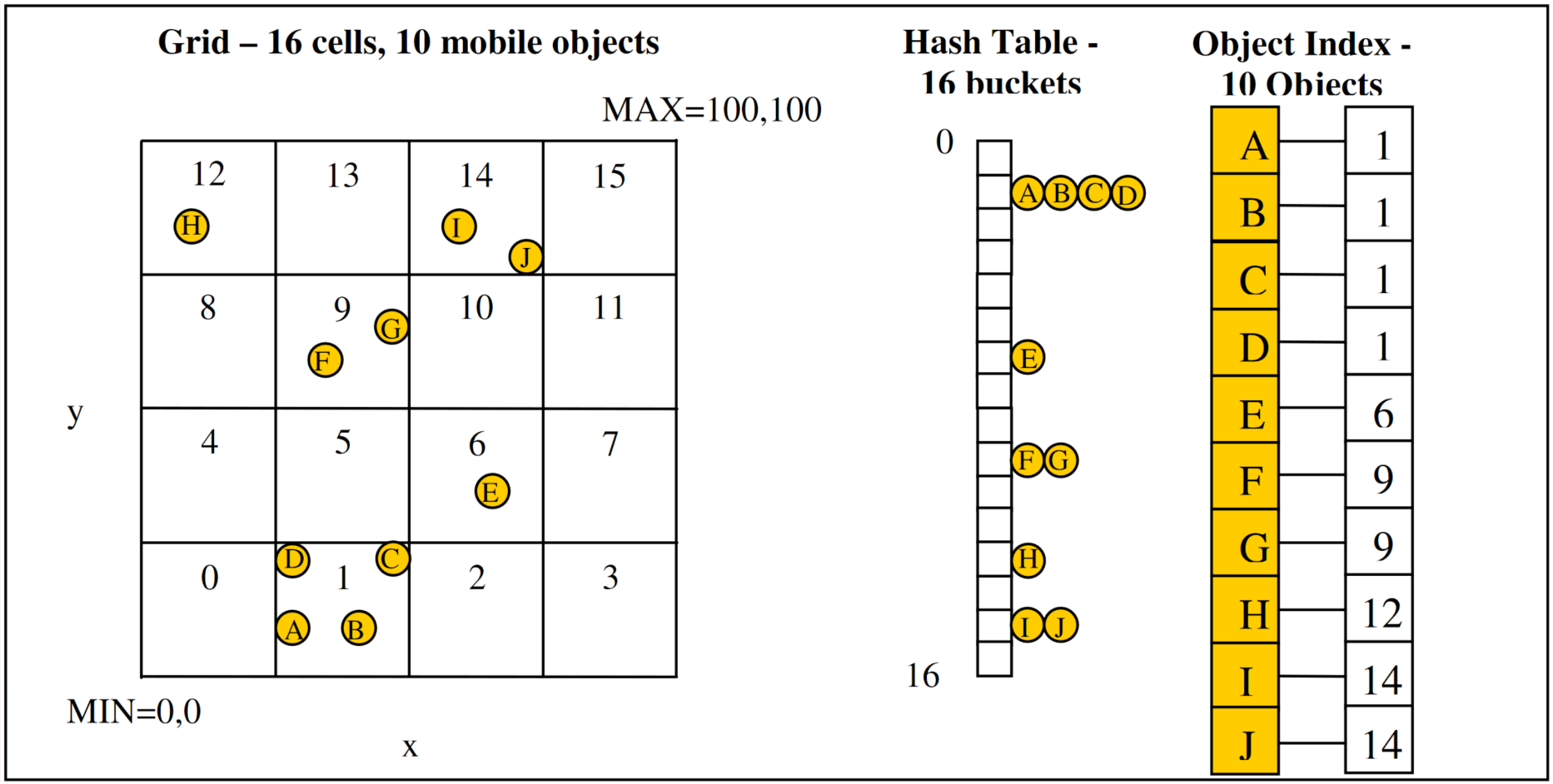
10. Geo-hashing, Snake Curve

ID buňky použito jako hash, 2 seznamy:

- Seznam bodů v buňce

```
{ID : [points]} #Vyuziti Dictionary, konstantni cas
```

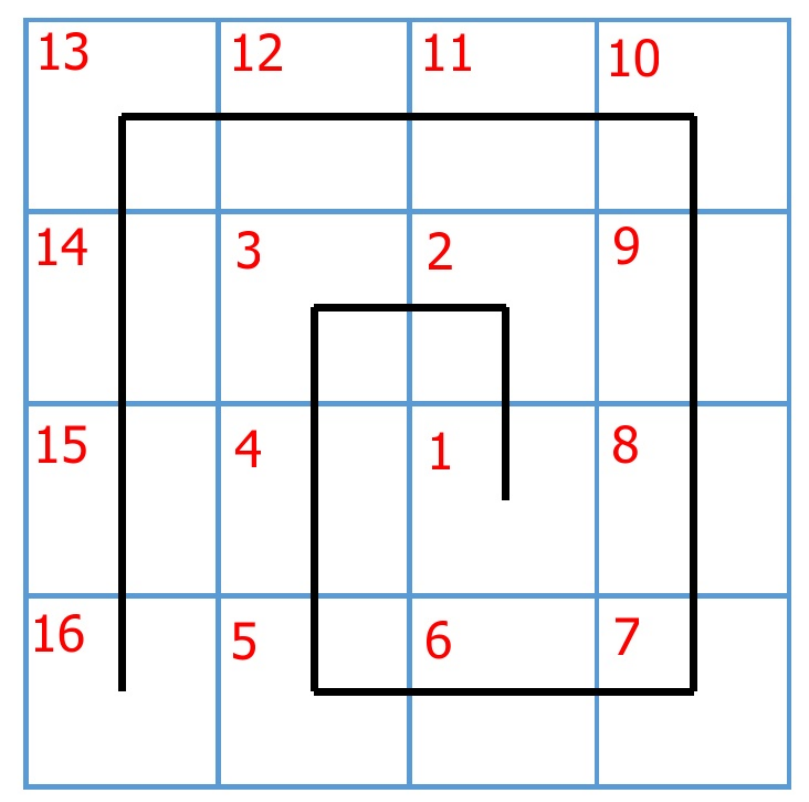
- Příslušnost bodu vzhledem k buňce.
  Implementace polem.



11. Spiral Curve

Jednoduchá vyplňující křivka.

Buňky uspořádány ve směru od středu k okrajům do spirály.



Preference vnitřních objektů, časté v počítačové grafice/geometrii.

Získání adresy v $O(c)$.

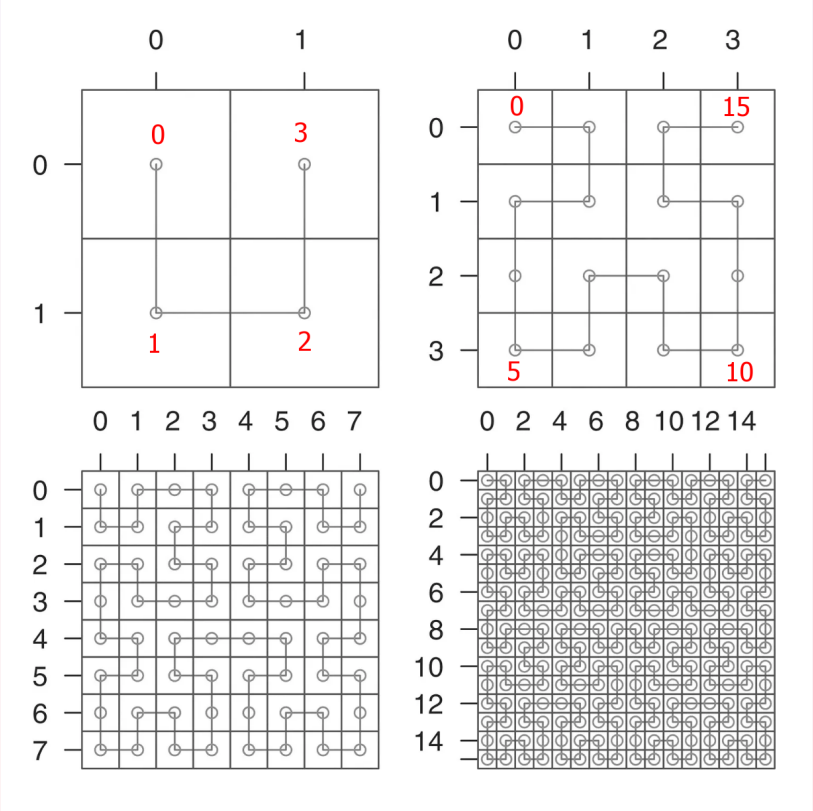
+ Jednoduchá implementace.

- Blízké objekty nemusejí mít podobnou adresu.

12. Hilbert Curve

Rekurzivně definovaná křivka vyplňující prostor.

Patří mezi 1D fraktály.



Posloupnost U-shaped segmentů.

\+ Lépe zachovává vzdálenost.

\- Složitější implementace (rekurzivní).

13. Indexace s využitím Hilbert Curve

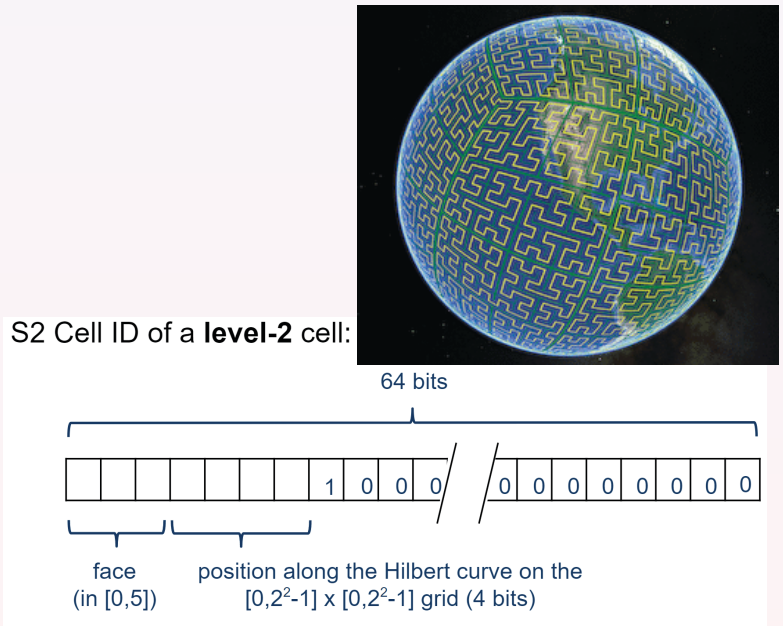
Pořadová čísla buněk možno reprezentovat binárně.

```
Level 1 (0-3): 00, 01, 10,11.
Level 2: (0-15): 0000, 0001, 0010, ..., 1111.
```

Dvojice binárních čísel představují pozice buněk v Quad–Tree.

00	11
01	10

0000	0001	1110	1111
0011	0010	1101	1100
0100	0111	1000	1011
0101	0110	1001	1010



Prostorový index S2 (64 bitů):

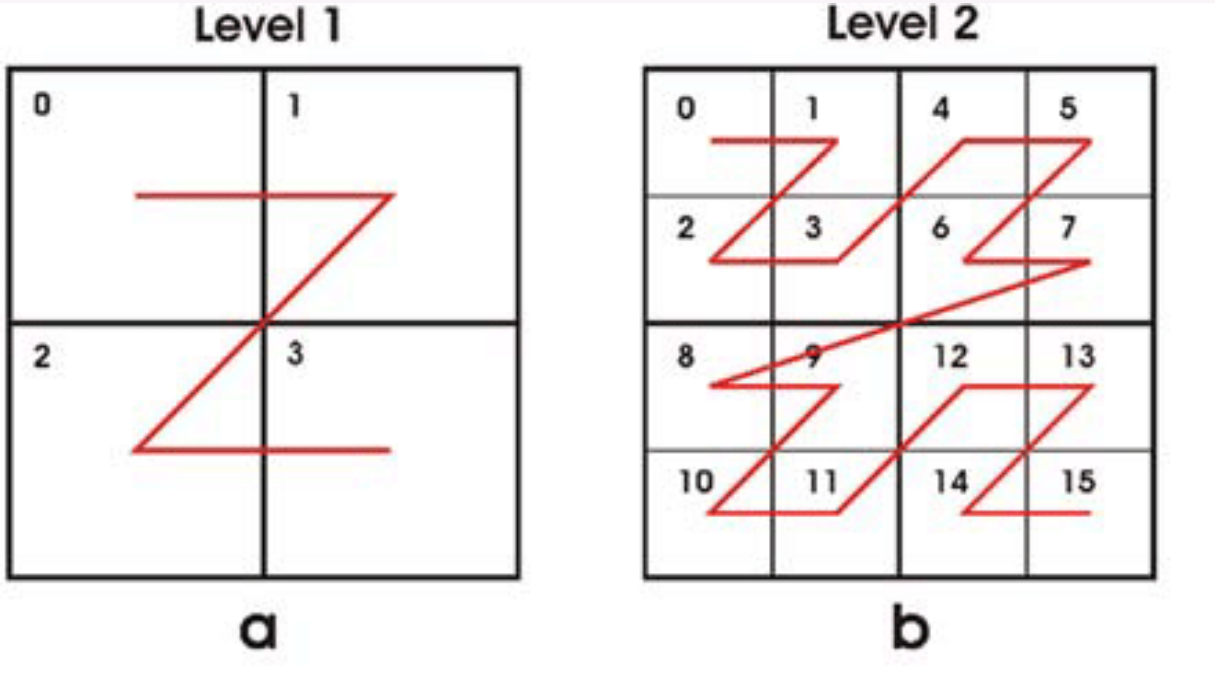
- Face ID: identifikátor na zemském povrchu.
- Pořadové číslo v Hilbertově křivce (odpovídá Level).

Indexace s využitím HC využívá např. Google.

14. Z-Curve

Rekurzivně definovaná křivka vyplňující prostor, 1D fraktál.

Často používána v geoinformatice (MySQL 7+).



Posloupnost Z-shaped segmentů.

\+ Zachovává vzdálenost, avšak hůře než HC.

\- Jednodušší implementace než HC.

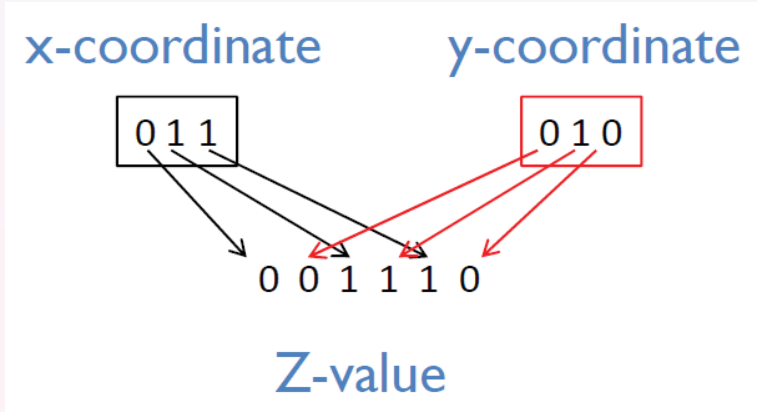
15. Indexace s využitím Z-Curve

Pro indexaci využívány souřadnice buněk ve směru *x*, *y* zapsané binárně:

```
Level 1: 0, 1.
Level 2: 00, 01, 10, 11.
```

1	01	11
0	00	10
	0	1

11	0100	0111	1101	1111
10	0101	0110	1100	1110
01	0001	0011	1001	1011
00	0000	0010	1000	1010
	00	01	10	11



Prostorový index:

Pozice buňky získána prolínáním bitů (Bit Interleaving).

Střídají se bity ve směru *x* a *y*

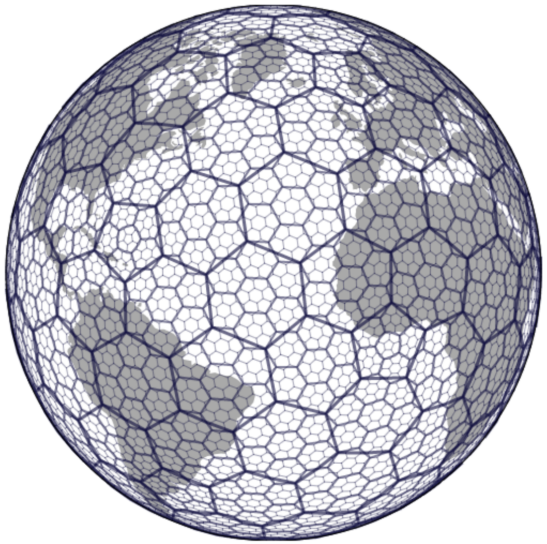
```
(0,0)->(00,00)->0000 = 0
(1,1)->(01,01)->0011 = 3
(2,3)->(10,11)->1101 = 13
```

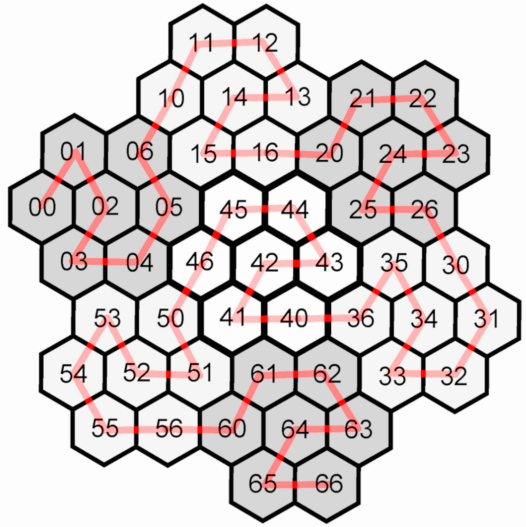
16. Hexagonal Indexation

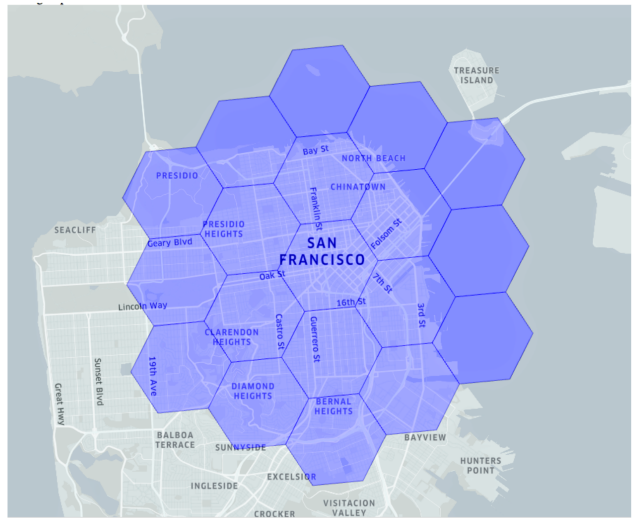
Prostorový index, zemský povrch rozdělen do sférických šestiúhelníků.

Indexace realizována prostřednictvím Peano-Gosper Curve (Space Filling Curve).

Využito v H3 Spatial index.







Princip indexace:

Prováděna po skupinách tvořených 7 šestiúhelníky.

Buňky ($n = 67$) číslovány koeficienty $k_i = [0, 66]$.

Indexační funkce

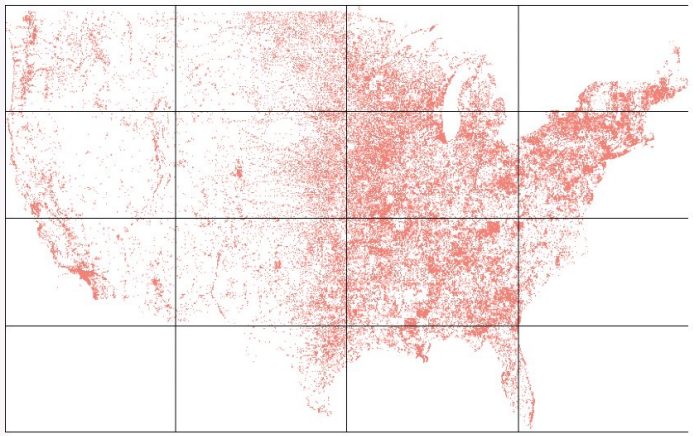
$$idx = k_1 2^{3(n-1)} + k_2 2^{3(n-2)} + \ldots + k_{n-1} 2^{3(1)} + k_n 2^{3(0)}.$$

Prostorový index:

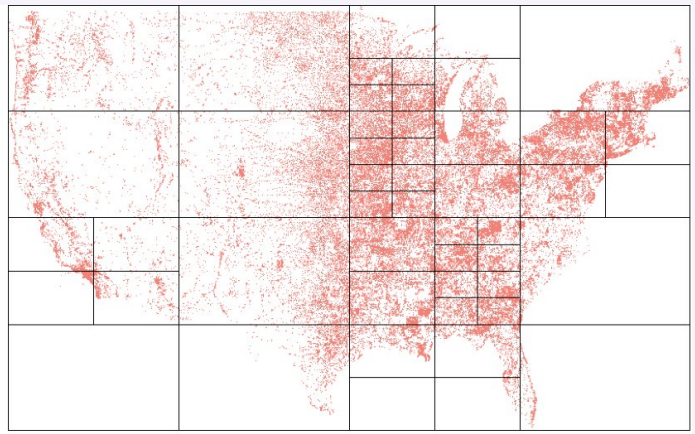
Číslo hexagonální dlaždice v rámci světa + poloha s využitím idx.

Reprezentace 64-bitovým integerem.

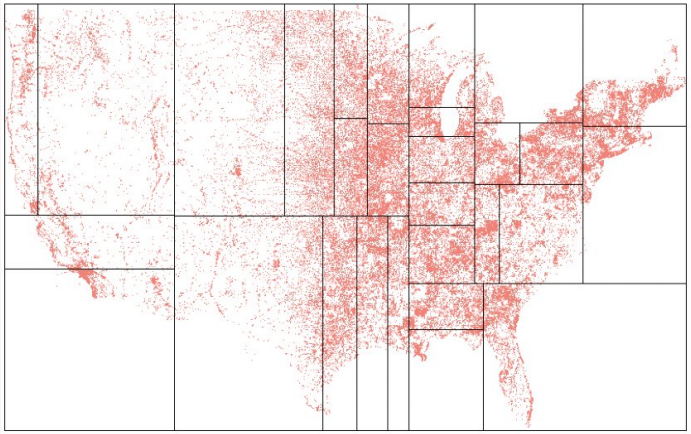
17. Přehled prostorových indexačních struktur



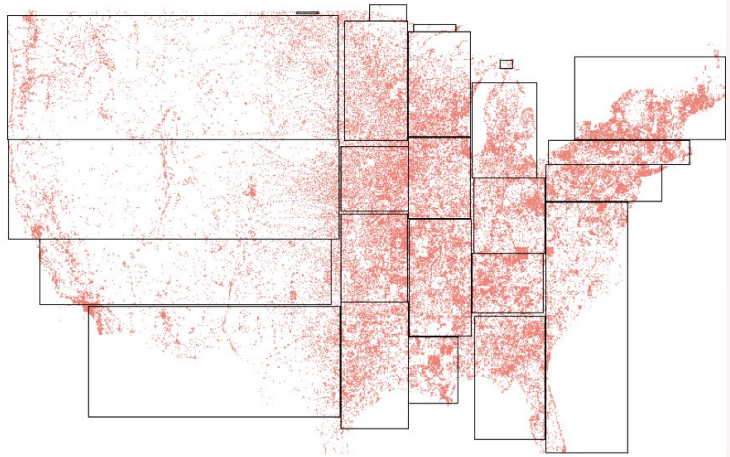
Uniform grids



Quad-Tree



KD-Tree



R-Tree

18. Quad-Tree

Datová reprezentující rekurzivní dělení prostoru do kvadrantů.

Každý kvadrant obsahuje nejvýše zadaný počet objektů.

Strom stupně 4, každý uzel má právě 4 potomky.

Kvadranty čtvercové nebo obdélníkové.

Lze zobecnit do prostoru dimenze 3 $\Rightarrow$ Oct-Tree (8 potomků).

Space / Data driven decomposition:

- Regional Quad-Tree: pravidelné dělení (častější).
- Point Quad-Tree: dělící hranice závisí na vstupních bodech (v mediánu).

+ Adaptabilní dělení prostoru (zohledňuje hustotu).
+ Uchovává sousednost.
+ Lze použít pro libovolné objekty (efektivní zejména pro 0D entity).
+ Snadná implementace.

Nutnost předzpracování dat (vytvoření Quad-Tree, $O(n \log n)$).

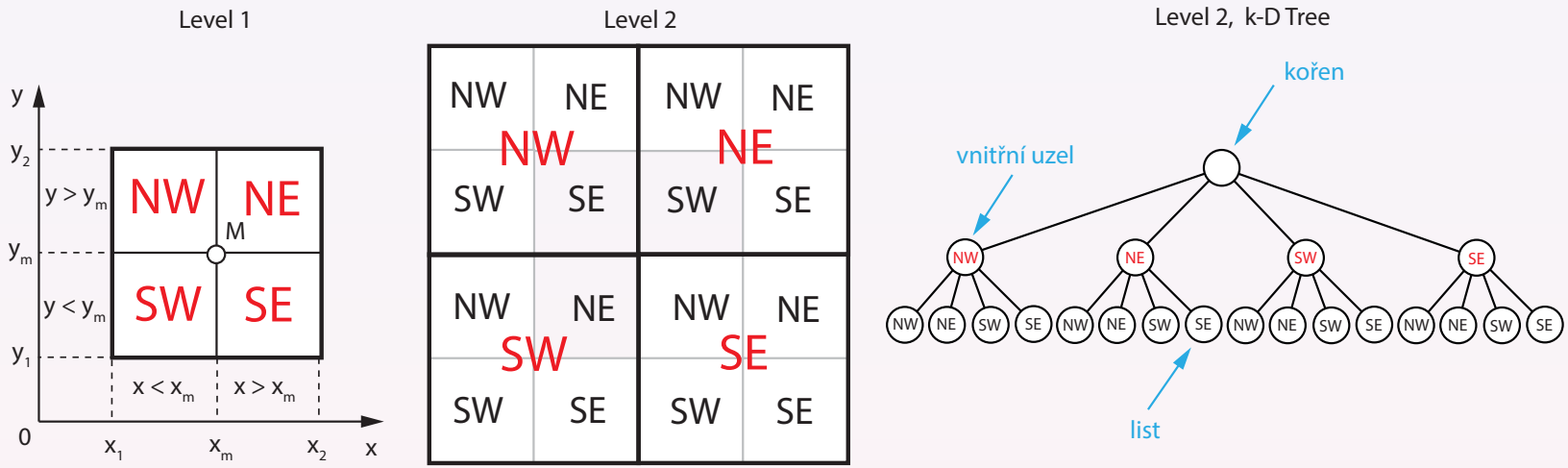
Paměťové nároky $O(n)$.

- Méně efektivní než ostatní stromy.
- Nevhodný pro data s proměnlivou prostorovou hustotou.
- Nejsou vyvážené.

19. Princip Quad-Tree

Opakované dělení prostoru do 4 kvadrantů: NW, NE, SW, SE.

Kvadrant kartézský součinem dvojice intervalů $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$.



Souřadnice středu kvadrantu

$$x_m = (x_1 + x_2)/2, y_m = (y_1, +y_2)/2$$

Přidávaný bod $p = [x, y]$.

Hledáme kvadrant σ, ve kterém leží.

$$p \in \begin{cases} NE & x > x_m, y > y_m, \\ NW & x \leq x_m, y > y_m, \\ SW & x \leq x_m, y \leq y_m, \\ SE & x > x_m, y \leq y_m. \end{cases}$$

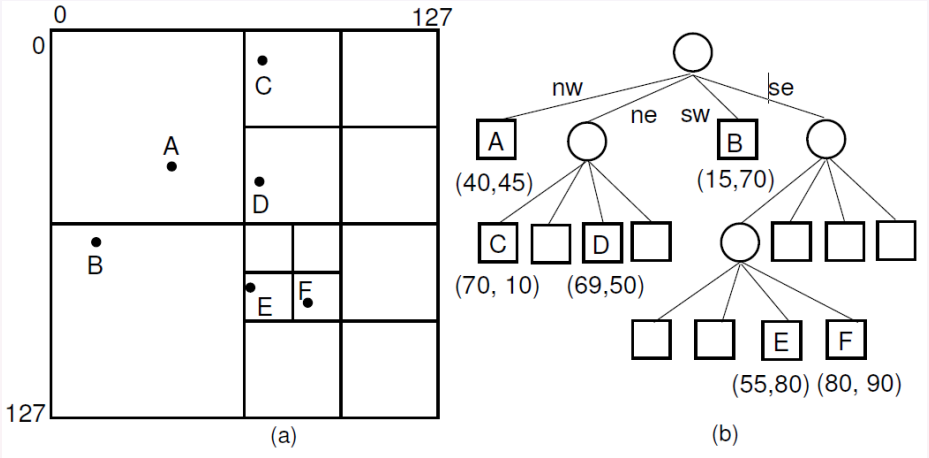
Vnitřní uzly pouze pro orientaci, data uchovávána v listech.

20. Quad-Tree, reprezentace

Dělení do kvadrantů prováděno opakovaně.

Podmínka: kvadrant obsahuje alespoň nějaký bod.

Výsledkem adaptivní dělení prostoru.



Stromová reprezentace, 2 typy uzlů:

- interní (4 potomci),
- list: představuje kvadrant (prázdný/obsahuje body).

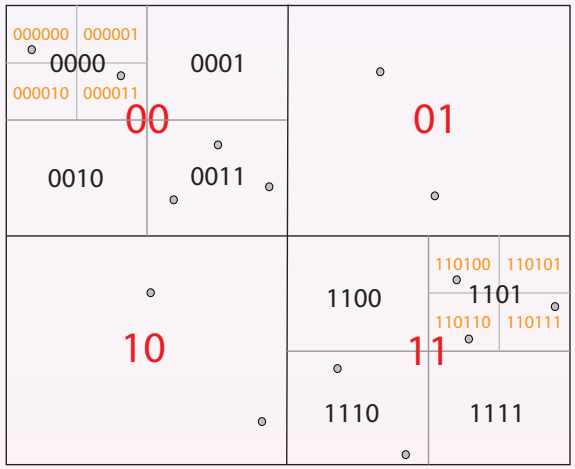
Jednoduchá implementace v Pythonu:

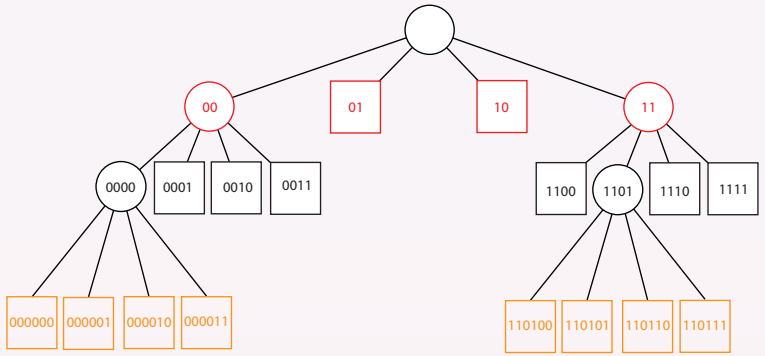
```
class QTNode():
   def __init__(self, xm, ym, w, h, points):
     self.xm = xm
     self.ym = ym
     self.width = w
     self.height = h
     self.points = points
     self.children = []
```

21. Quad-Tree, prostorová indexace

Dvě základní metody indexace:

- Využití Quad-Tree indexu (analogie s HC).
- Využití Space Filling Curves (viz Z-Curve, efektivnější).





Quad-Tree index:

Pořadová čísla kvadrantů (identifikátory) možno reprezentovat binárně.

```
Level 1 (0-3): 00, 01, 10, 11.
Level 2 (0-3): 00, 01, 10, 11.
```

Index kvadrantu: kombinace identifikátorů kvadrantů z úrovní Level 1 až Level k.

```
Level 1 + Level 2: 0000-0011, 0100-0111, 0100-0111, 1100-1111.
```

- Pro vysoké stromy Quad-Tree indexy dlouhé.

Využití: databázové systémy Oracle, MySQL.

22. k-D Tree

Nejčastěji používaná struktura pro prostorovou indexaci.
Dělení střídavě probíhá v k směrech.
Reprezentace stromem stupně k, každý uzel má právě k potomků.
2D varianta: střídá se dělení ve směru x, y, strom stupně 2.

Dělící nadrovina prochází mediánem množiny.
Výsledkem obdélníkové oblasti, každá obsahuje nejvýše zadaný počet objektů.
Konkrétní tvar závislý na vstupním datasetu.
Efektivnější dělení než Quad-Tree.

Nutnost předzpracování dat (vytvoření k-D Tree, $O(n \log n)$).
Paměťové nároky $O(n)$.

+ Nejpoužívanější prostorová indexační struktura.
+ Efektivní zejména pro 0D entity.
+ Schopnost adaptace na proměnnou prostorovou hustotu množin.
+ Vysoká efektivita zejména pro malá k.

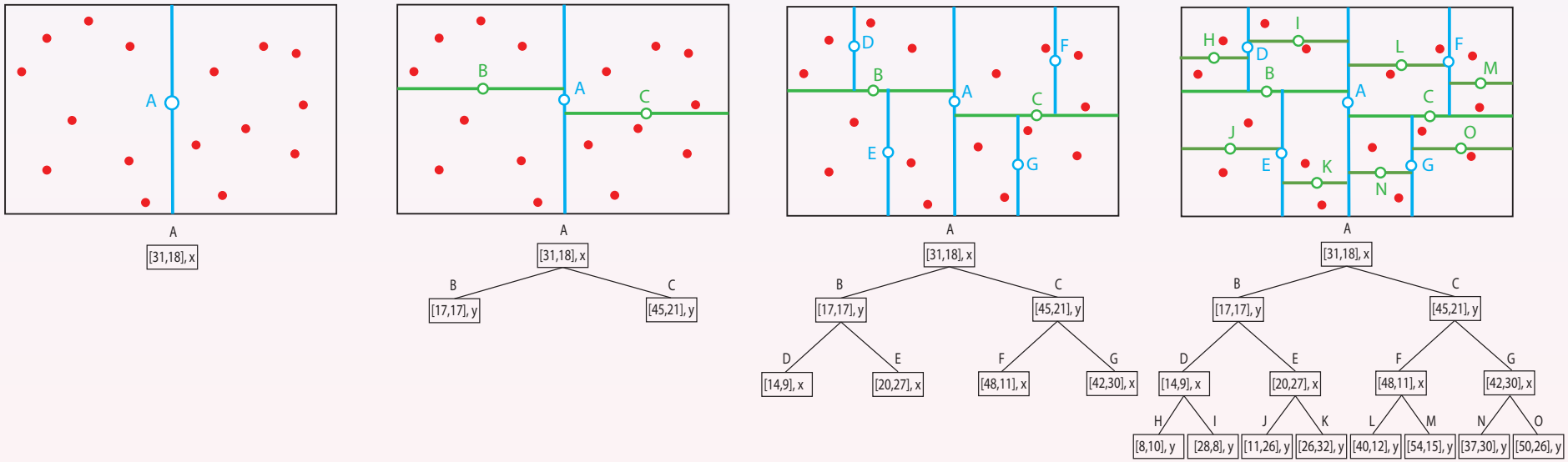
- Výpočetně složitější konstrukce.
- Nejsou vyvážené.

23. Princip k-D Tree

Modifikace Binary Search Trees, podpora multidimenzionálních klíčů.
Vnitřní uzly pouze pro orientaci, data uchovávána v listech.

Discriminator δ: Pomocný klíč, ukládá informaci o tom, ve kterém směru dělení probíhá

$$\delta = i\%k, \qquad i = 0, \ldots, k-1.$$



Dvoudimenzionální strom ($k = 2$, $\delta = 0, 1$):
Oblast σ k-D Tree obdélníková, dělena na levou část σ_l a pravou část σ_r.
Určen medián M souřadnic všech bodů σ.
Dělící nadrovina prochází M, pro $\delta = 0$ resp. $\delta = 1$ rovnoběžná s osou y resp. s x.
Body v σ_l resp. v σ_r vlevo resp. vpravo od M vzhledem k x resp. y.

Třidimenzionální strom ($k = 3$, $\delta = 0, 1, 2$):
3D varianta stromu důležitá při práci s bodovými mračny.

24. Implementace k-D Tree

Implementace uzlu v progrmovacím jazyce Python:

```
class kDNode:
    def __init__(self, discr, med, points>):
        self.discr = discr
        self.med = med
        self.left = None
        self.right = None
        self.points = points
```

Konstrukce k-D Tree nad P (2D):

Max. počet bodů n_{max} v σ, $k = 2$.

1] Pokud $||P|| < n_{max}$, ukonči proceduru.

2] Urči discriminator $\delta = i\%k$.

3] Spočti medián

$$\delta = 0 : x_m = med(x_i), \qquad \delta = 1 : y_m = med(y_i).$$

4] Rozděl P na P_l a P_r, pro každý $p = [x, y]$

$$P_l = \{p, \delta = 0 \wedge x < x_m \vee \delta = 1 \wedge x < y_m\}, \quad P_r = \{p, \delta = 0 \wedge x > x_m \vee \delta = 1 \wedge x > y_m\}.$$

Podmnožina P_l levým podstromem P, podmnožina P_r pravým podstromem P.

5] Inkrementuj $i = i + 1$.

6] Opakuj rekurzivně 1-6 nad P_l a P_r.

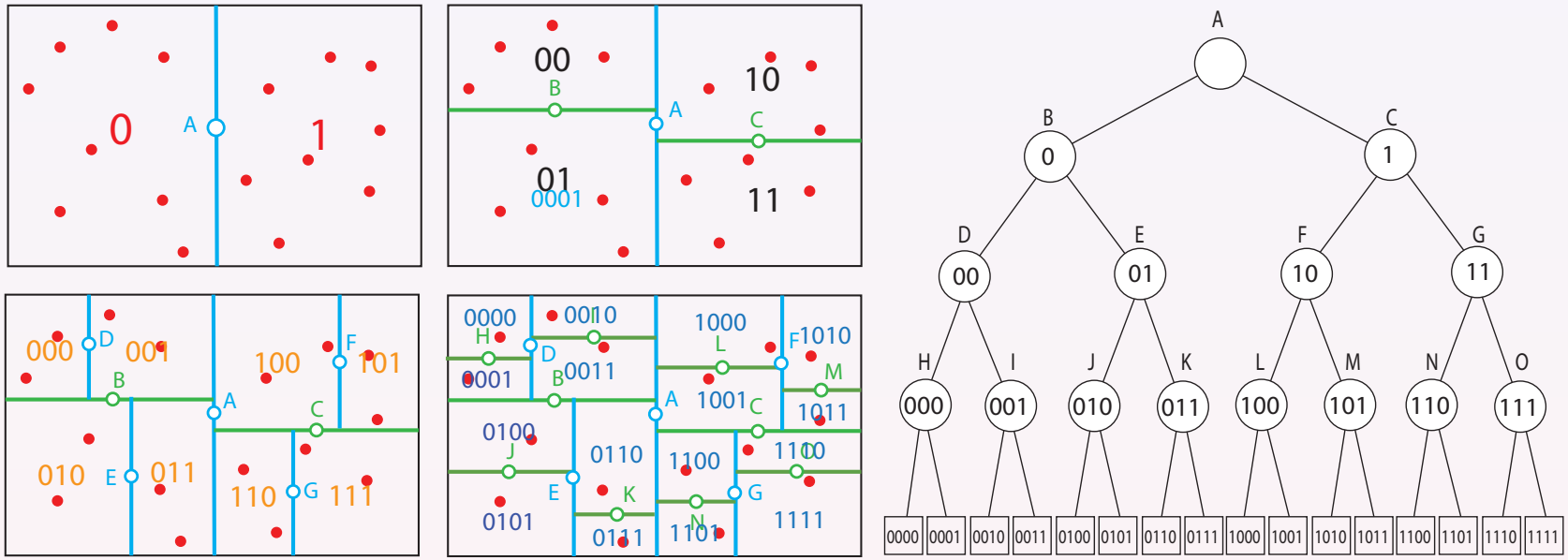
Hledání oblasti σ obsahující p:

Procházení k-D Tree od kořenu k listů.

Dle hodnot x resp. y přecházíme do levého resp. pravého podstromu.

25. k-D Tree, prostorová indexace

Podobný princip jako u Quad-Tree, využívá binárního indexu



k-D Tree index:

Identifikátory kvadrantů v binárním tvaru:

```
Level 1: 0, 1.
Level 2: 0, 1.
```

Index kvadrantu: kombinace identifikátorů kvadrantů z úrovní Level 1 až Level k.

```
Level 1 + Level 2: 00, 01, 10, 11.
Level 1 + Level 2 + Level 3: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.
```

Velmi používaný prostorový index.

- Pro vysoké stromy k-D-Tree indexy dlouhé.

26. R-Tree

Nejčastěji používaná struktura pro indexaci prostorových dat.

Jiná koncepce, oblasti σ nejsou disjunktní (mohou se vzájemně překrývat, avšak jen málo).

Objekty, které jsou vzájemně blízké, jsou seskupeny do uzlů.

Lze použít pro libovolné entity, generalizace do vyšších dimenzí.

Objekty uchovávány v listech, vnitřní uzly pro orientaci.

Jsou vyvážené (na rozdíl od předchozích), nižší výška stromu.

Výška nezávisí na vstupních datech.

Vnitřní uzly reprezentovány min-max boxy.

Několik praktických problémů:

- Vnitřní uzly se by měly co nejméně překrývat.
- Neměly by obsahovat příliš volného místa.
- Blízké objekty by měly ležet v blízkých vnitřních uzlech.

\+ Výborné výkonnostní parametry: NN Search.

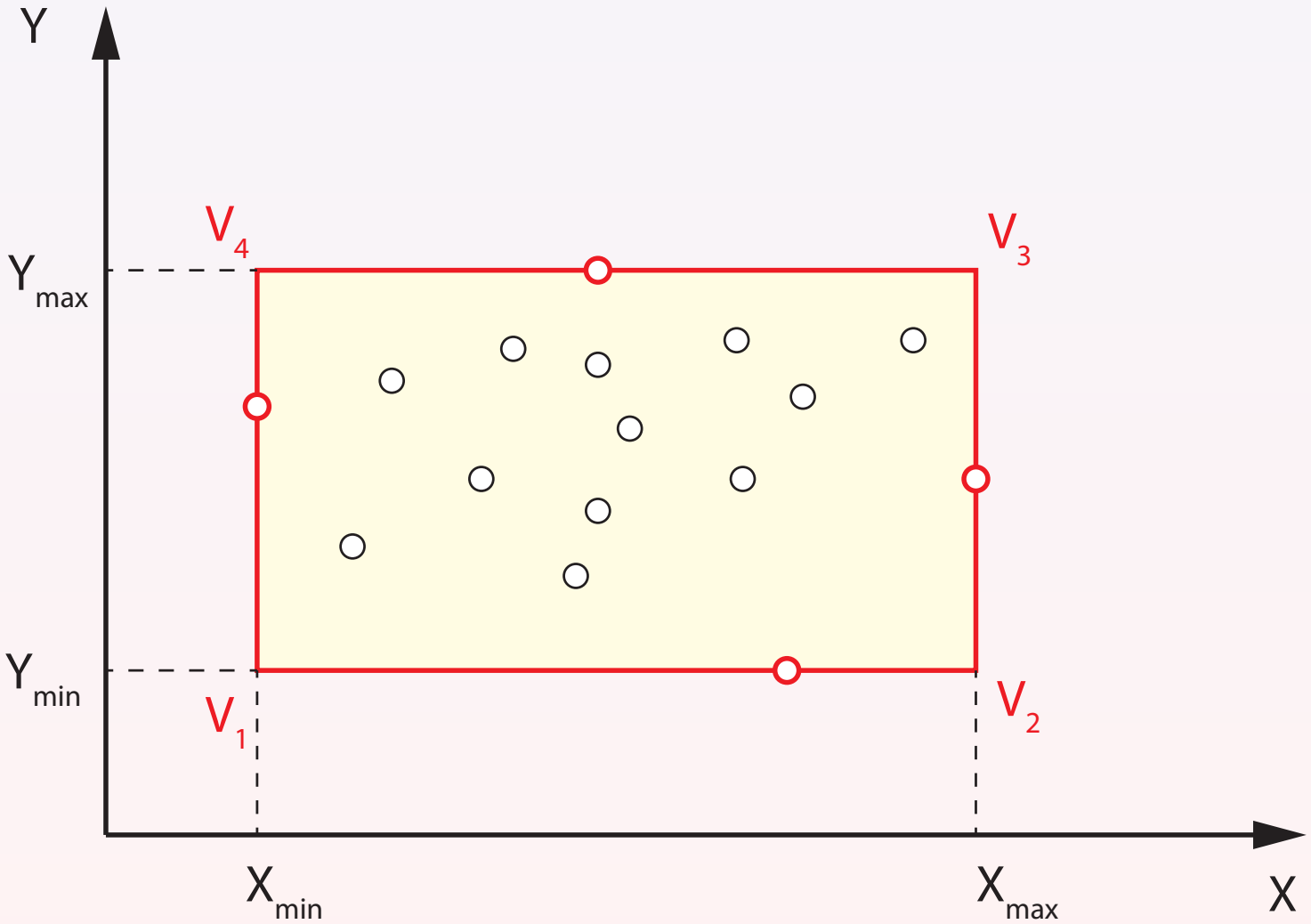
\+ Efektivní pro 1D/2D entity.

\- Horší parametry: Interval Search.

\- Objekt se může nacházet ve více uzlech (překrývají se).

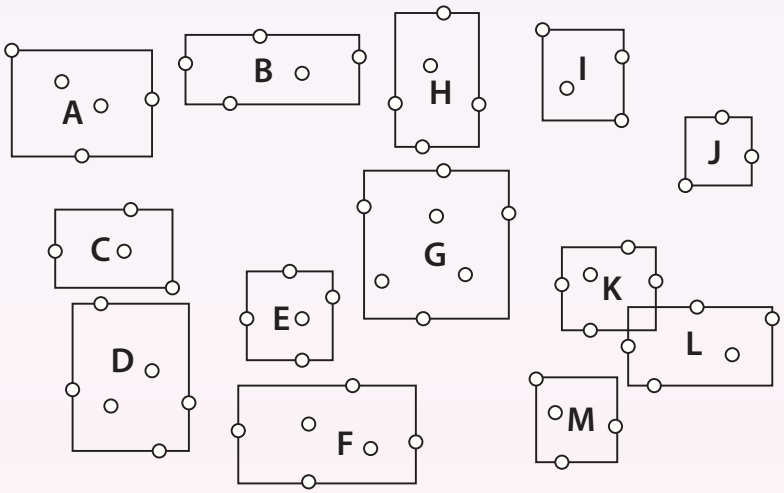
\- Obtížnější implementace.

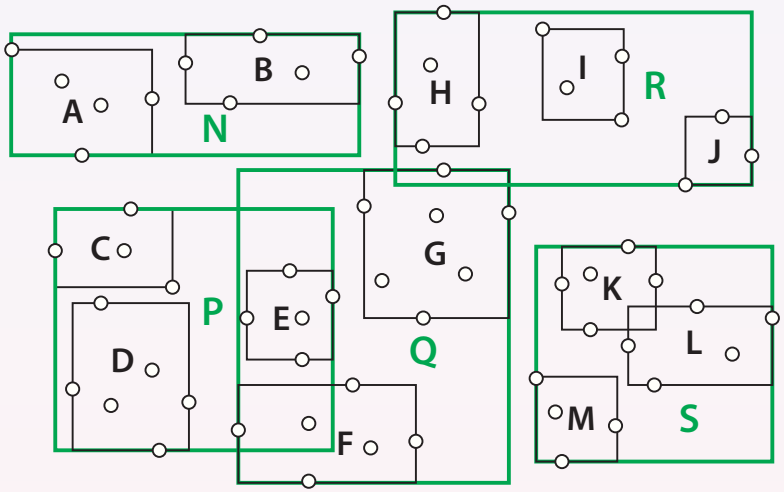
27. Min-max box

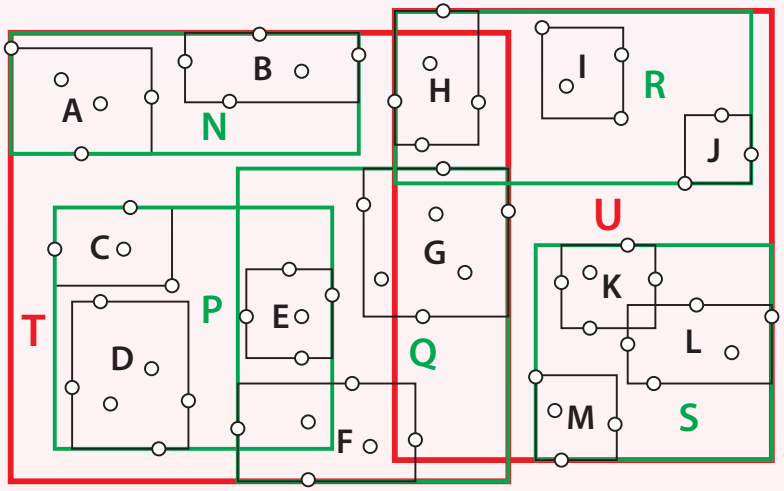


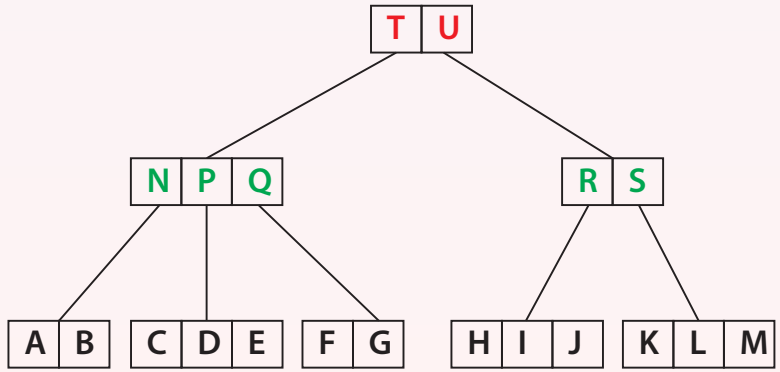
28. Princip konstrukce R-Tree

Hierarchická dekompozice scény zdola nahoru.









29. Vlastnosti $R-$ Tree

Délkově vyvážený strom.

Uzel má nejvýše k potomků (počet proměnlivý).

Interní uzly obsahují min-max boxy.

Seznam objektů (0D-3D) uchováván v listech.

Každý uzel obsahuje $[m, M]$ prvků, M maximální počet objektů uvnitř min-max boxu

$$m \leq \frac{M}{2}.$$

Výška R-Tree s n záznamy (nezávisí na struktuře vstupních dat)

$$h \leq \log_m n.$$

Implementace třídy R-Tree Node:

```
class RNode:
    def __init__(self, left, right, children = None, data = None):
        self.low_left = rect
        self.high_right = rect
        self.children = children
        self.data = data
```

Efektivní struktura pro **Range Search**.

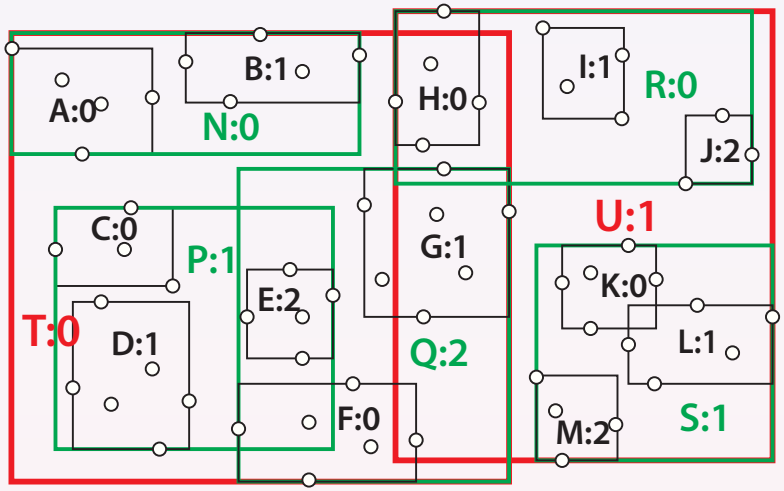
Vyhledání všech objektů min-max boxů kolidujících se vstupním obdélníkem.

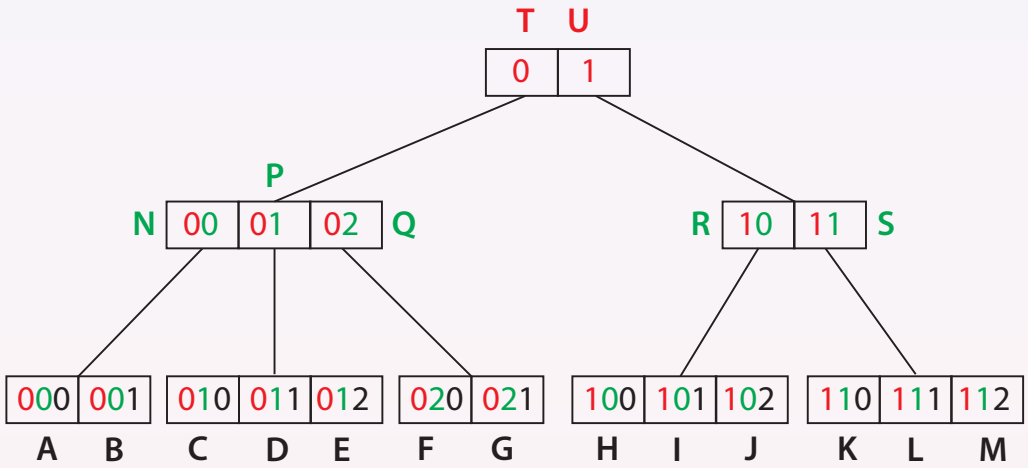
R-Tree procházen od kořene, hledáme kolidující min-max boxy.

V každém listu vybereme objekty uvnitř obdélníku, výsledek může ležet v různých podstromech.

30. Prostorová indexace s R-Tree

Využívá celočíselného indexu min-max boxů





R-Tree index:

Identifikátory min-max boxů v celočíselném tvaru:

```
Level 1: 0, 1, ..., k1.
Level 2: 0, 1, ..., k2.
```

Index kvadrantu: kombinace identifikátorů min-max boxů od úrovně 1:

```
Level 1 + Level 2: 0.0, 0.1, 0.2, 1.0, 11.
Level 1 + Level 2 + Level 3: 0.0.0, 0.0.1, 0.1.0, 0.1.1, 0.1.2, 0.2.0, ...
```

Velmi používaný prostorový index (PostGIS, Oracle).

Efektivní pro prostorové operace.

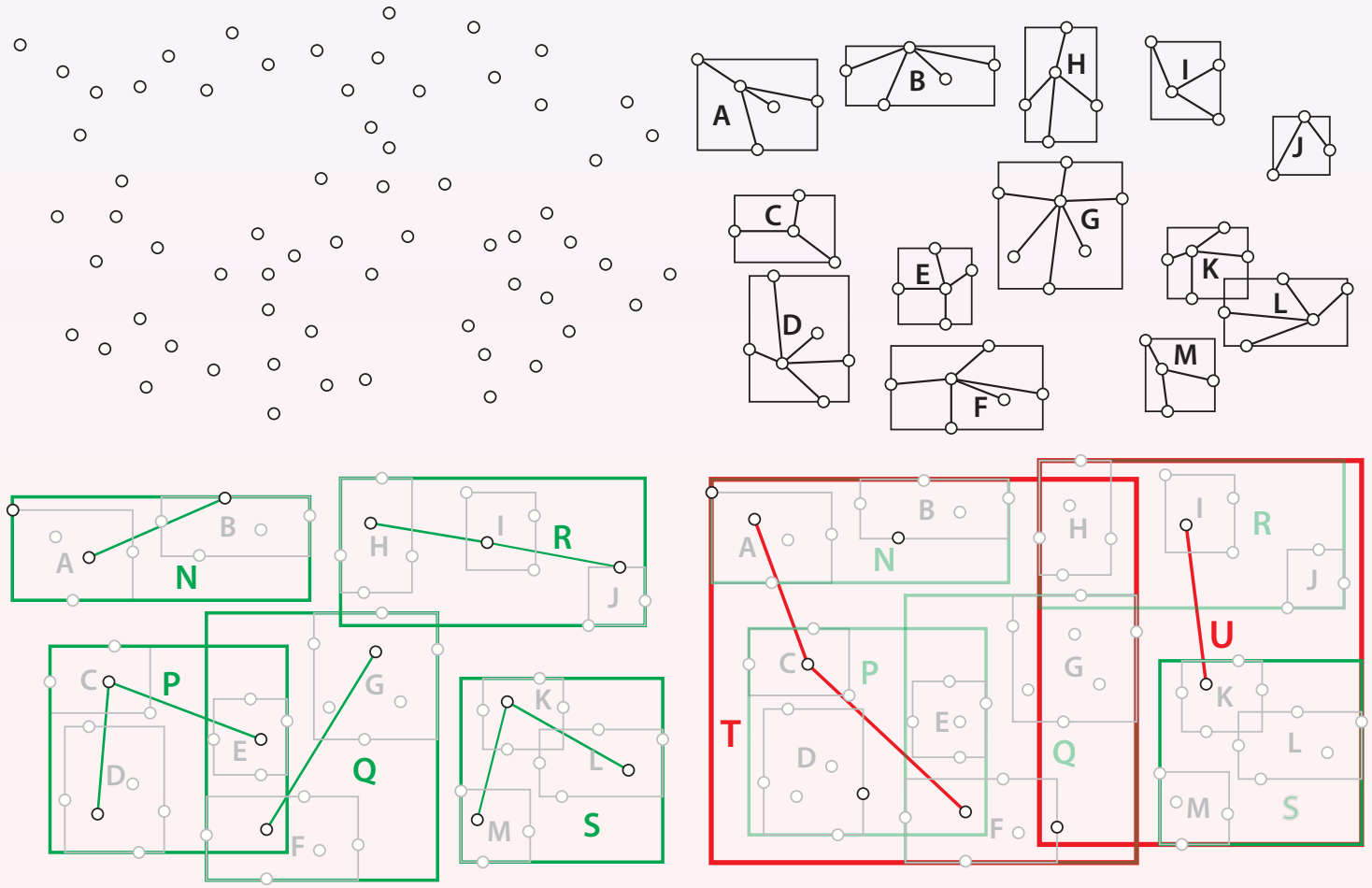
31. Hierarchická dekompozice vstupních dat

Specializované metoda, využívají pokročilé heuristiky.

Minimalizace překrytů a hluchých míst.

Netriviální implementace.

Alternativně, hierarchická clusterizace: opakovaná clusterizace datasetu.

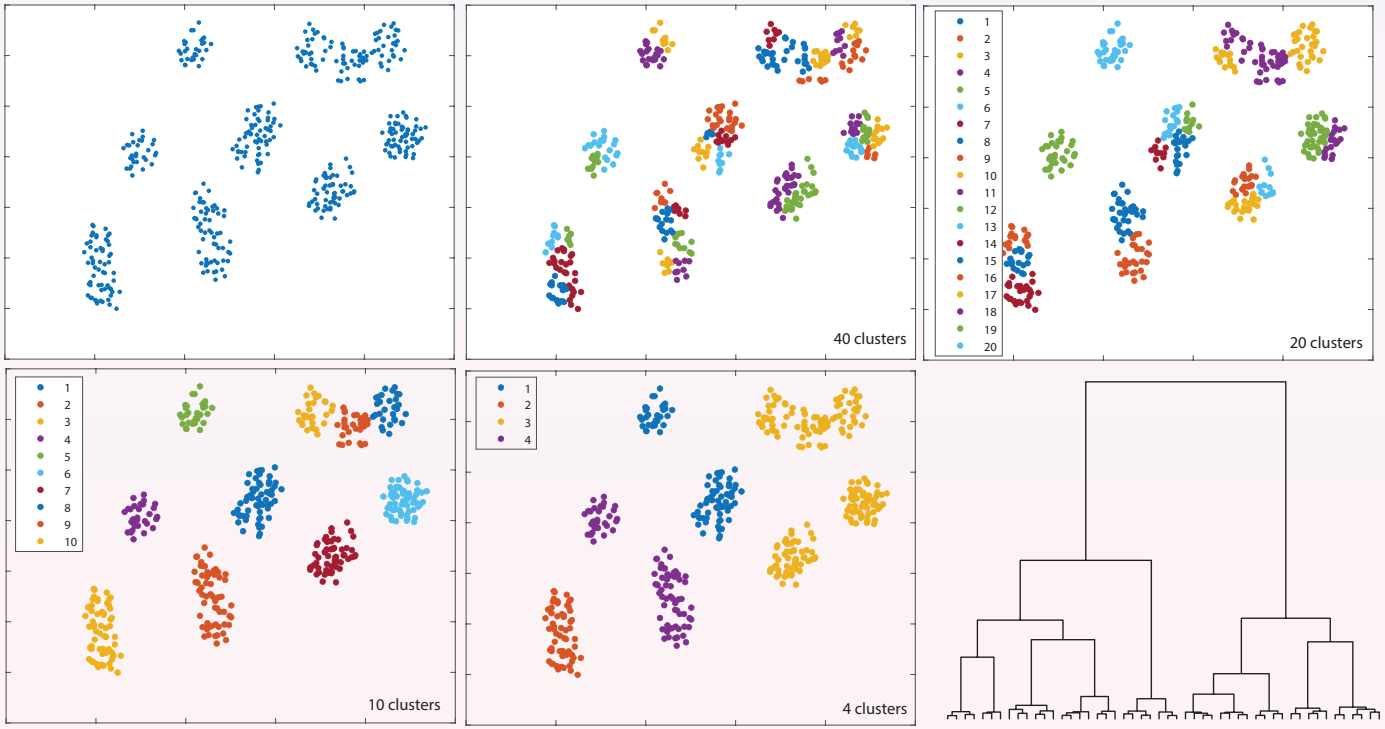


32. Hierarchická clusterizace

Shlukování blízkých objektů na základě geometrických parametrů do clusterů.

Každý cluster má centroid.

Clusterizace dle různých metrik / pseudometrik, nejčastěji používána *L2* norma.



Hierarchická clusterizace:

Opakování postupu v několika iteracích.

V následujícím kroku clusterizovány centroidy shluků.

Hierarchie clusterizace znázorněna dendrogramem.

\+ Efektivní metoda, adaptivní vzhledem ke vstupním datům.

\- Konstrukce clusterizace časově náročná.

33. Prostorová indexace, hierarchická clusterizace

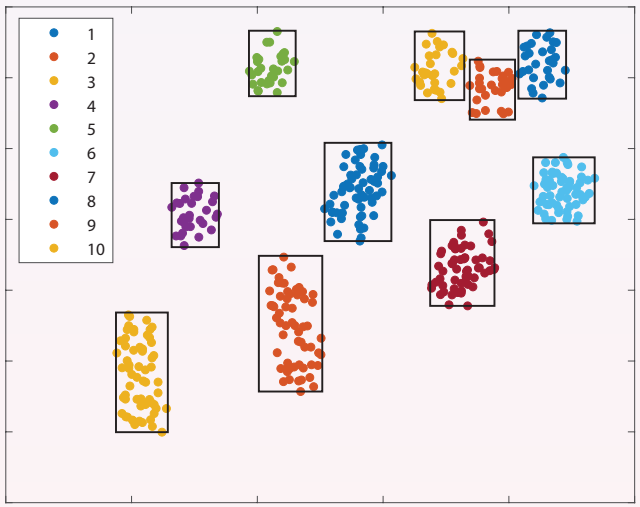
Dendrogram strom stupně 2 (binární).

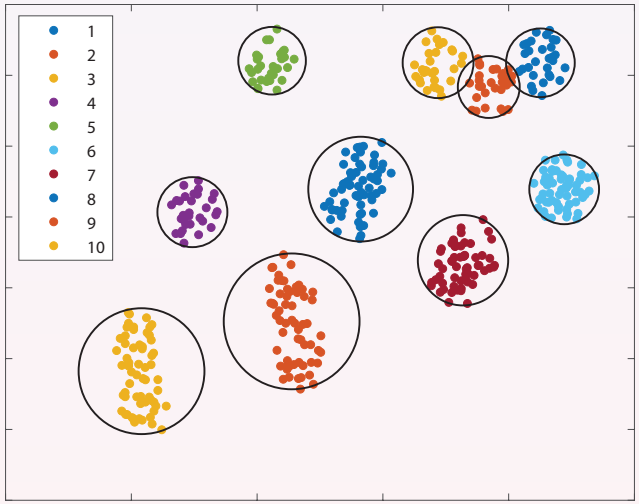
Využívá binárního indexu.

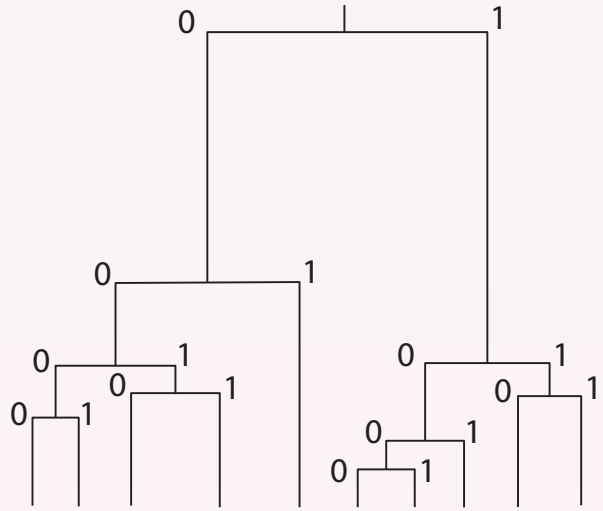
Oblasti vymezené clustery nekonvexní.

Aproximace min-max boxy nebo kružnicemi, částečně se překrývají.

Indexovaný bod padne do nejbližšího min-max boxu, kružnice.







Spatial index:

Identifikátory clusterů v binárním tvaru:

```
Level 1: 0, 1.
Level 2: 0, 1.
```

Index clusteru: kombinace identifikátorů kvadrantů z úrovní Level 1 až Level k.

```
Level 1 + Level 2: 0, 1
Level 2 + Level 2: 00, 01, 10, 11
Level 1 + Level 2 + Level 3: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.
```

Varianta s min-max boxy využívá R-Tree.

34. Porovnání metod prostorové indexace

Index Type	Data Structure	Best For	Efficiency	Supported Data Types	Main Advantages
R-tree	Hierarchical (Tree-based)	Datasets with varying object sizes, shapes, and dimensions	Good	Points, Lines, Polygons	Good for overlapping regions, adaptable, handles various data types
Quadtree	Hierarchical (Tree-based)	2D datasets with varying density, adaptability to Octree for 3D	Good	Points, Polygons	Space partitioning, efficient for sparse datasets
Geohash	Grid-based (string)	Approximate nearest-neighbor queries, simple grid indexing	Moderate	Points	Easy to implement, compact representation
KD-tree	Binary tree	Point data in multi-dimensional spaces	High	Points	Efficient for point data, handles high-dimensional data

35. Aplikace prostorové indexace

Bing Maps Tile System: aplikace Quad-Tree.