

Kartometrické analýzy starých map.

Kartometrie. Srážka mapy. Měření vzdáleností, úhlů, ploch.
Stanovení měřítkového čísla mapy. Lokální změny měřítka/stočení.
Polohová přesnost mapy.

Tomáš Bayer | bayertom@natur.cuni.cz

Katedra aplikované geoinformatiky a kartografie, Přírodovědecká fakulta UK.

Obsah přednášky

- 1 Kartometrie
- 2 Srážka mapového listu
 - Podélná a příčná srážka
 - Srážka v obecném směru
- 3 Přehled kartometrických analýz
 - Měření vzdáleností, úhlů, ploch
 - Stanovení měřítkového čísla mapy
 - Lokální změna měřítka
 - Lokální změna stočení
 - Polohová přesnost mapy

1. Úvod

Mapa = zmenšený, zevšeobecněný, konvencionální model zemského povrchu.

Mezi obrazem mapy (modelem) a skutečností existují matematické vztahy.
Dány zejména zobrazovacími rovnicemi a měřítkem.

Kartometrie:

Odměřování parametrů mapy/plánu/glóbů (obsahové/konstrukční prvky).

Výsledky ovlivněny řadou faktorů: typ, měřítko mapy, zobrazení, materiál, stáří...

Hodnocení kartografického díla z kartometrického pohledu:

- kartografické parametry,
- matematických parametry,
- geometrické parametry.

Rozvoj díky pokroku v informatice, matematice, statistice.

Vznik složitých modelů (přesnost).

2. Určované/měřené parametry

Týkají se obsahových/konstrukčních prvků/mapy jako celku.

- 1 *Geometrické parametry:*
Vzdálenosti, délky, úhly, souřadnice, plochy, azimuty, směry.
- 2 *Kvalitativní/kvantitativní parametry:*
Hodnoty jevů, vlastnosti (výška, velikost,).
Analýza kartografických znaků v mapách.
- 3 *Kartografické parametry:*
Kartografické zobrazení, zkreslení, zaplněnost.
- 4 *Matematické parametry:*
Měřítko, stočení, rozměry mapového listu.
- 5 *Přesnost mapy:*
Polohová přesnost, deformace.

Výsledné parametry ovlivněny řadou faktorů.

3. Faktory v kartometrii

Přehled faktorů ovlivňujících výsledek:

- Přesnost měřických postupů.
- Vliv kartografických postupů (generalizace).
- Typ mapy (topografická vs. tematická).
- Měřítko mapy (přesnost vs. obsah).
- Kartografické zobrazení (délkojevná, úhlojevná, plochojevná, vyrovnávací).
- Počet analyzovaných prvků.
- Rozložení analyzovaných prvků (pravidelné).
- Stáří mapy (absence geometrických základů).
- Srážka mapového listu (staré mapy, papír).
- Vstupní prvky (mapová kresba vs. konstrukční prvky).

Metody používané v kartometrii:

- a) Přímé: přímé měření údajů (délky, úhly, plochy).
- b) Nepřímé: zprostředkující hodnoty (souřadnice).

4. Určení rozměrů rastru

Před započítím analýz nutné určit skutečné rozměry rastru.

Počet pixelů m, n , rozlišení DPI , $1'' \doteq 25.4$ mm.

Velikost pixelu [m]

$$\varphi = \frac{1''}{DPI} = \frac{25.4}{1000 \cdot DPI}$$

Rozměry mapového listu [m]

$$D' = n \cdot \varphi, \quad V' = m \cdot \varphi.$$

Pixelové souřadnice (m, i, j):

Počátek v levém horním rohu.

Opačná orientace i oproti y .

Pravouhlé souřadnice ($0, x, y$):

Počátek v levém dolním rohu.

Konverze (i, j) na (x, y)

$$x = j \cdot \varphi, \quad y = (m - i) \varphi.$$

5. Srážka mapového listu

Mapový list vlivem stárí, změny teploty, vlhkosti mění rozměry.
Změna probíhá zpravidla v obou směrech (příčná vs. podélná).

Má systematický (především) ale i náhodný charakter.
Významný faktor, ovlivňuje údaje odměřené z mapy.
Srážku ΔP nutno matematicky korigovat před měřením.

Skutečná délka D a měřená délka D' map. listu.

Skutečná výška V a měřená výška V' map. listu.

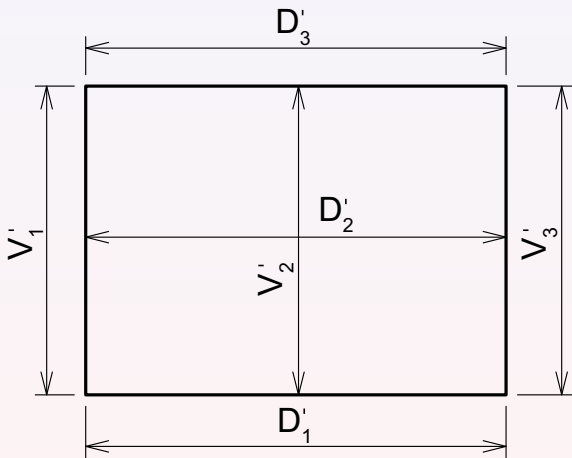
Rozdíly:

$$d = D - D', \quad v = V - V'.$$

D' , V' určovány na 6 místech mapového listu:

Horní/dolní, levý/pravý rám, střední příčka, hodnoty D'_1, D'_2, D'_3 a V'_1, V'_2, V'_3 .

6. Určení hodnot d , v



Absolutní podélná srážka d , absolutní příčná srážka v váženým průměrem

$$d = \frac{d_1 + 2d_2 + d_3}{4}, \quad v = \frac{v_1 + 2v_2 + v_3}{4}.$$

7. Plošná srážka

Skutečná plocha mapového listu

$$P = DV.$$

Měřená plocha mapového listu

$$\begin{aligned} P' &= D'V', \\ &= (D - d)(V - v), \\ &= DV - dV - vD + dv, \\ &= P - dV - vD + dv. \end{aligned}$$

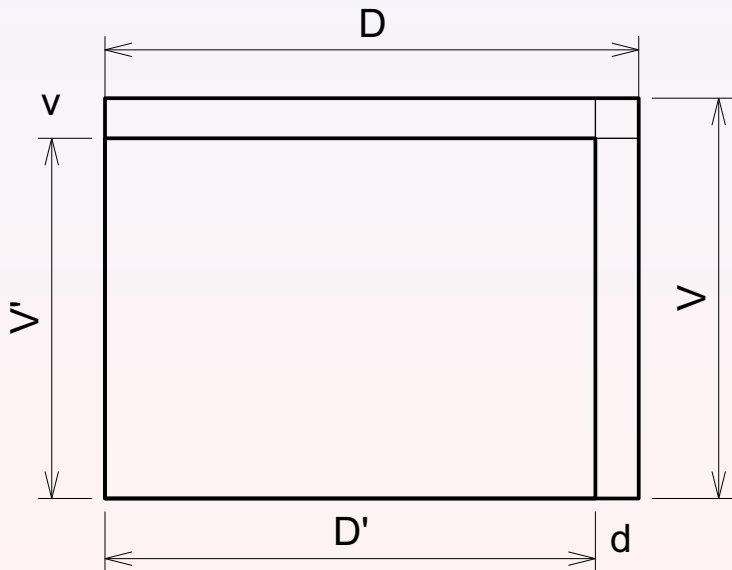
Absolutní plošná srážka mapového listu ΔP

$$\begin{aligned} \Delta P &= P - P', \\ &= dV + vD - dv, \\ &\doteq dV + vD. \end{aligned}$$

Rozdíl mezi skutečnou a změřenou plochou mapového listu.

Poslední člen malý, lze zanedbat.

8. Ukázka plošné srážky



9. Relativní podélná a příčná srážka

Hodnocení délkové srážky ve dvou kolmých směrech.

Relativní podélná srážka q , relativní příčná srážka r

$$q = \frac{d}{D} 100, \quad r = \frac{v}{V} 100.$$

Relativní plošná srážka

$$p = q + r.$$

Vztah mezi absolutní a relativní plošnou srážkou

$$\begin{aligned} p &= 100\left(\frac{d}{D} + \frac{v}{V}\right), \\ \frac{p}{100} &= \frac{dV + vD}{P}, \\ &\doteq \frac{P - P'}{P}, \\ &\doteq \frac{P - P'}{P'}. \end{aligned}$$

Pak

$$\frac{pP'}{100} = P - P' \Rightarrow P = P' \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Udává chybu v m^2 na $100 m^2$.

Matematicky lze eliminovat také afinní transformací.

10. Srážka v obecném směru α

Relativní podélná/příčná srážka funkcí souřadnicových rozdílů

$$q = \frac{d}{D} = \frac{d}{\Delta x}, \quad r = \frac{v}{V} = \frac{v}{\Delta y}, \quad D \equiv \Delta x, V \equiv \Delta y.$$

Absolutní srážka délky v obecném směru α

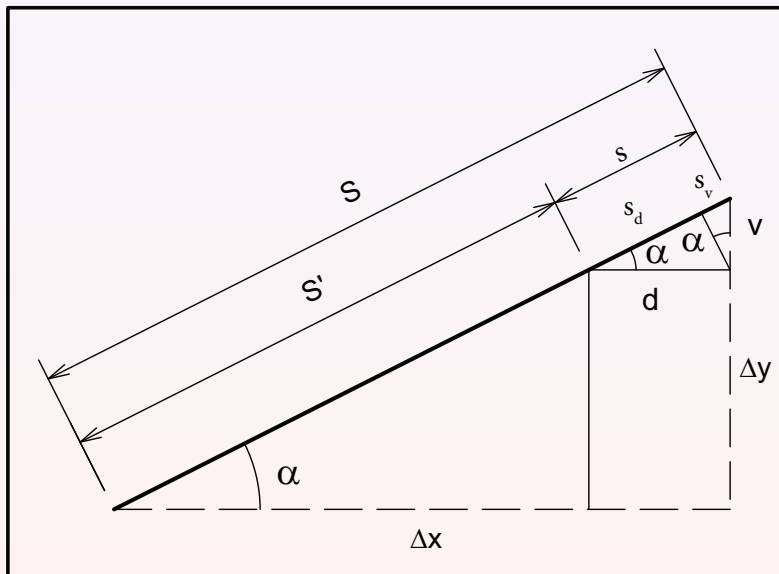
$$\begin{aligned} s_\alpha &= S - S', & \cos \alpha &= \frac{S_d}{d}, & \sin \alpha &= \frac{S_v}{v}, \\ &= S_d + S_v, \\ &= d \cos \alpha + v \sin \alpha, \\ &= q \Delta x \cos \alpha + r \Delta y \sin \alpha. \end{aligned}$$

Rozdíl mezi skutečnou a měřenou délkou.

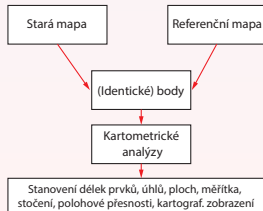
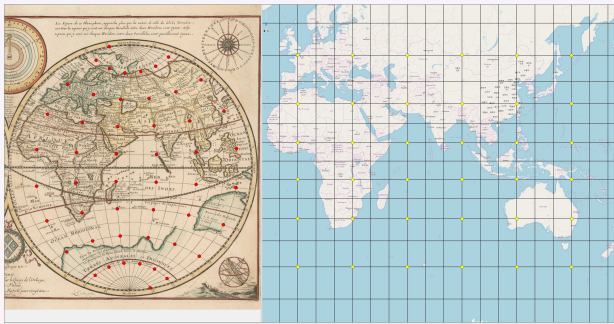
Relativní srážka délky v obecném směru α

$$\begin{aligned} o_\alpha &= \frac{S_\alpha}{S}, \\ &= \frac{q \Delta x \cos \alpha + r \Delta y \sin \alpha}{S}, \\ &= \frac{q \Delta x \cos \alpha}{\frac{\Delta x}{\cos \alpha}} + \frac{r \Delta y \sin \alpha}{\frac{\Delta y}{\sin \alpha}}, \\ &= q \cos^2 \alpha + r \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

11. Ukázka srážky v obecném směru



12. Princip kartometrických analýz



13. Odměřování údajů z mapy

Přípravné kroky:

- Odstranění vlivu srážky/ transformace.
- Odstranění vlivu kartografického zobrazení (velká území).
- Stanovení měřítka mapy.

Vliv chyb měřených údajů na hodnotu $y = f(x_1, \dots, x_n)$, **zákon hromadění středních chyb:**

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2.$$

Měření délek prvků:

Odměřování pixelových souřadnic koncových bodů $P_1 = [x_1, y_1]$, $P_2 = [x_2, y_2]$:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Aplikace zákona hromadění středních chyb

$$\frac{\partial d}{\partial x_1} = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \frac{\partial d}{\partial x_2} = \frac{x_1 - x_2}{d}, \quad \frac{\partial d}{\partial y_1} = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \frac{\partial d}{\partial y_2} = \frac{y_1 - y_2}{d}.$$

Pak

$$\begin{aligned} \sigma_d^2 &= \frac{\Delta x^2}{d^2} \sigma_{x_1}^2 + \frac{\Delta x^2}{d^2} \sigma_{x_2}^2 + \frac{\Delta y^2}{d^2} \sigma_{y_1}^2 + \frac{\Delta y^2}{d^2} \sigma_{y_2}^2 \doteq 2 \frac{\Delta x^2}{d^2} \sigma_x^2 + 2 \frac{\Delta y^2}{d^2} \sigma_y^2 \doteq 2 \frac{\sigma_{xy}^2}{d^2} (\Delta x^2 + \Delta y^2), \\ &\doteq 2 \sigma_{xy}^2. \end{aligned}$$

Skutečná vzdálenost v mapě s měřítkovým číslem M

$$D_M = Md.$$

14. Měření směrů, úhlů

Veličiny nezávislé na měřítkovém čísle M mapy.

Úhel mezi přímkami $p(P_1, P_2)$, $q(P_3, P_4)$

$$\omega = |\sigma_p - \sigma_q| = \left| \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \arctan \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} \right|.$$

Pro odměřování používat konformní zobrazení, ekvivalentní extrémně zkreslují úhly.

Aplikace zákona hromadění středních chyb

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial x_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2} = \frac{-\Delta y_{12}}{d_{12}^2}, \quad \frac{\partial \sigma_p}{\partial y_1} = \frac{-1}{x_2 - x_1} \frac{1}{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2} = \frac{-\Delta x_{12}}{d_{12}^2}.$$

Pak

$$\begin{aligned} \sigma_\omega^2 &= 2 \left(\frac{\Delta y_{12}^2}{d_{12}^4} + \frac{\Delta x_{12}^2}{d_{12}^4} \right) \sigma_{xy}^2 + 2 \left(\frac{\Delta y_{34}^2}{d_{34}^4} + \frac{\Delta x_{34}^2}{d_{34}^4} \right) \sigma_{xy}^2 \doteq 2 \left(\frac{1}{d_{12}^2} + \frac{1}{d_{34}^2} \right) \sigma_{xy}^2, \\ &\doteq \frac{4}{d^2} \sigma_{xy}^2. \end{aligned}$$

Chyba v úhlu nepřímo úměrná délce jeho ramene.

15. Měření ploch

Plocha funkcí měřítkového čísla M mapy.

Odstranění vlivu plošné srážky a kartografického zobrazení.

Výpočet plochy oblasti tvořené lomenou čarou (LH vzorec)

$$2P = \left| \sum_{i=1}^n x_i(y_{i+1} - y_{i-1}) \right|,$$

$$= |x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + \dots + x_{n-1}(y_n - y_{n-2}) + x_n(y_1 - y_{n-1})|.$$

Aplikace zákona hromadění středních chyb

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{4} \left[(y_2 - y_n)^2 \sigma_{x_1}^2 + (x_n - x_2)^2 \sigma_{y_1}^2 + \dots + (y_1 - y_{n-1})^2 \sigma_{x_n}^2 + (x_{n-1} - x_1)^2 \sigma_{y_n}^2 \right],$$

$$\doteq \frac{1}{4} \left[d_{2,n}^2 \sigma_{xy_1}^2 + \dots + d_{n-1,1}^2 \sigma_{xy_n}^2 \right] = \frac{1}{4} \sigma_{xy}^2 \sum_{i=1}^n d_{i+1,i-1}^2.$$

Chyba roste s obvodem oblasti.

Skutečná plocha v mapě s měřítkovým číslem M

$$P_M = PM^2.$$

Konformní zobrazení: extrémně zkreslují plochy.

16. Vliv zobrazení na plochu: Švédsko



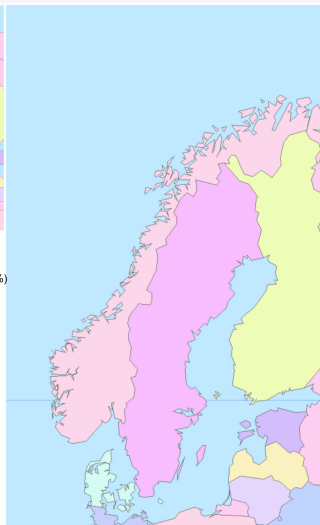
Válcové ekvivalentní

A = 442 246 km²



Válcové ekvidistanční

A = 446 347 km² (+0.93%)



Válcové konformní

A = 2 155 932 km² (+387.5%)

17. Měřítkové číslo mapy

Měřítko mapy: důležitý matematicko-konstrukční prvek.

Vyjádřeno měřítkovým číslem M

$$M = \frac{s}{S},$$

poměr délky s ve skutečnosti k *nezkreslené délce* S v mapě.

Měřítkové číslo lze určit několika různými postupy:

- 1 Z číselného/grafického měřítka (přepočít).
- 2 Měřením mapového rámu.
- 3 Porovnáním délek mezi identickými body v analyzované/referenční mapě.
- 4 Využití transformace (podobnostní, afinní).
- 5 Analýzou kartografického zobrazení.

Pro mapu nutné alespoň *dvojit nezavisle* určení.

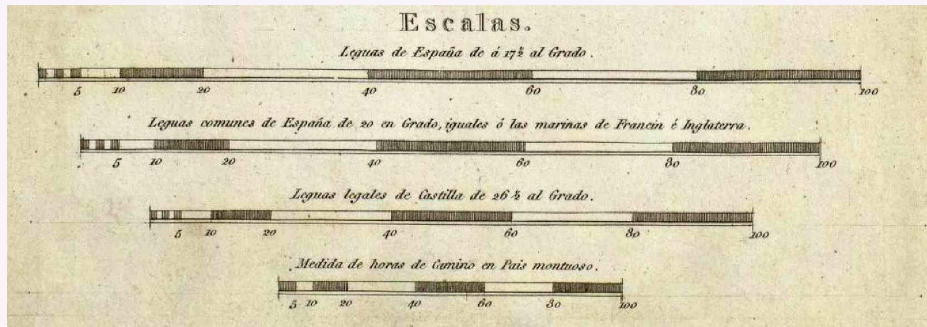
18. Formy měřítka

Vyjádření měřítka na mapě:

- *Textová forma*
Nejstarší forma, předchůdce číselného.
Přibližné vs. přesné vyjádření (1 palec čtverečný \approx 1 jitro rakouské).
V mnohých případech nejde přesně převést do číselného.
- *Grafická forma*
Jak dlouhý úsek v mapě odpovídá dekadické vzdálenosti ve skutečnosti.
Z důvodu nejednoznačnosti vyjadřováno k několika délkovým jednotkám.
Např. míle, loket (národně specifické), či přesně nedefinované (stádie).
- *Číselná forma*
Používání od konce 18. století.
Uváděno ve tvaru 1 : M .

U některových map kombinace různých forem měřítka.

19. Ukázka grafického měřítka



20. Měřítkové číslo a zkreslení

Měřítkové číslo M v mapě lokálně proměnlivé.

Závislost na hodnotě *kartografického zkreslení*.
Obecně funkcí polohy a azimutu.

Uváděné měřítko “platí” v nezakreslených oblastech:

- nezakreslená rovnoběžka,
- rovník (ne vždy),
- centrální poledník (ne vždy).

Pro stanovení *lokálního měřítkového čísla* nutná znalost kartografického zobrazení.

Konformní zobrazení: zkreslení pouze funkcí polohy.

Ekvidistantní zobrazení: zkreslení pouze funkcí azimutu.

Ostatní zobrazení: zkreslení funkcí polohy i azimutu.

21. Vztah měřítka mapy a zkreslení

Měřítkové číslo mapy $M(\varphi, \lambda)$ funkcí polohy.

Poměr diferenciálních elementů délky ve skutečnosti ds (na sféře) a na mapě $dS(\varphi, \lambda)$.

Hodnota $dS(\varphi, \lambda)$ funkcí polohy.

$$M(\varphi, \lambda) = \frac{ds}{dS(\varphi, \lambda)}.$$

Mapa zmenšeným obrazem.

Použité kartografické zobrazení má proporčně zmenšený poloměr sféry

$$R' = \frac{R}{M}.$$

Měřítka kartografické $m(\varphi, \lambda)$ (poměr diferenciální délky v mapě a na "zmenšené" sféře $R' \ll R$)

$$m(\varphi, \lambda) = \frac{dS(\varphi, \lambda)}{ds/M} \Rightarrow dS(\varphi, \lambda) = \frac{m(\varphi, \lambda)}{M} ds.$$

Měřítkové číslo mapy

$$M(\varphi, \lambda) = \frac{Mds}{m(\varphi, \lambda)ds} = \frac{M}{m(\varphi, \lambda)}.$$

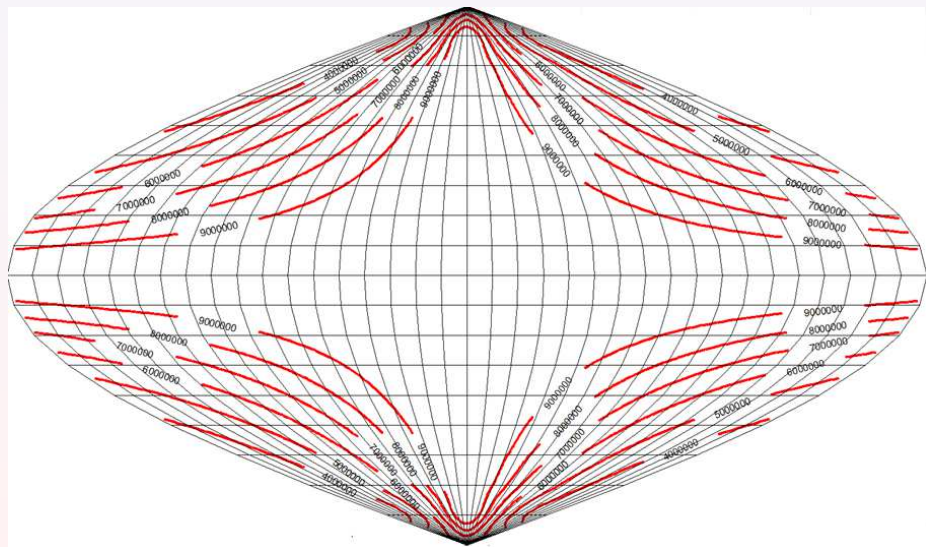
Proměnlivá veličina, může se měnit o desítky/stovky procent.

Díky zkreslení se směrem okrajům délky zkreslují (zvětšují, $m > 1$).

Pozor při odměřování vzdáleností z map !!!

22. Měřtkové číslo jako funkce polohy

Sansonovo zobrazení: $M = 100\,000\,000$, okraje $M(\varphi, \lambda) = 40\,000\,000$.



23. Určení M ze slovního měřítka

Přepočet nemetrických měř do SI soustavy.

Nevýhodou nejednotnost definice: stádie, míle, loket.

Hodnoty se mohou výrazně lišit.

Nutno znát vzájemné poměry a převodní vztahy mezi jednotkami.

1 Wiener Zoll gleich 2000 Wiener Klafter, oder 1 : 144000 der natürlichen Größe bekannt.

1 Wiener Klafter (sáh, 1.896 m) = 72 Wiener Zollen (palec, 2.63 cm)

1 Wiener Zoll \equiv 2000 Wiener Klafter (na mapě).

$$M = \frac{2000 \cdot 72}{1} = 144000.$$

Analogicky byla odvozena i měřítka 1:28800/1:2880:

1 Wiener Klafter (sáh, 1.896 m) = 72 Wiener Zollen (palec, 2.63 cm)

1 Postmeile (poštovní míle, 7578.5 m) = 4000 Wiener Klafter.

1 Wiener Zoll \equiv 1 Postmeile

$$M = 4000 \cdot 72 = 288000.$$

1 Wiener Zoll \equiv 40 Wiener Klafter

$$M = 40 \cdot 72 = 2880.$$

Alternativně 1 Quadratzoll \equiv 1 niederösterreichisches Joch (40 x 40 Quadratklaffer)

24. Určení M z grafického měřítka

Přepočet délky grafického měřítka do metrického systému.

Mapa může obsahovat více grafických měřítek.

V takovém případě výsledkem průměrná hodnota.

Lieues Marines de 20 au degré (20 na 1°).

Lieues Communes de 25 au degré (25 na 1°).

Milles de 15 au degré (15 na 1°).

Milles de 60 degré (60 na 1°).

Lieues Marines: (1/20 stupně) 5556 m.

Lieues Communes: 2282 fr. sáhů = 4444 m.

Mille: 1000 sáhů = 1949.04 m.

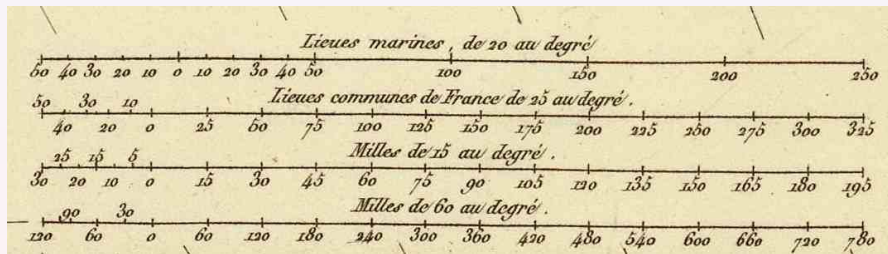
Velikost pixelu $\varphi = 0.127$ mm.

$$M_1 = s_1/S_1 = (250 \cdot 5556)/0.291 = 4773196.$$

$$M_2 = s_2/S_2 = (325 \cdot 4444)/0.304 = 4750987.$$

$$M_3 = s_3/S_3 = (780 \cdot 1949)/0.307 = 4951856. \text{ (Jaká míle??)}$$

25. Ukázka grafického měřítka



26. Určení M interpolací na mapovém rámu

Použití u topografických map velkých/středních měřítek.

Na mapovém rámu rysky zeměpisné či souřadnicové sítě.

Proměřeny vzdálenosti s_φ , s_λ mezi všemi ryskami v obou směrech.

Odpovídající vzdálenosti na sféře (ve směru poledníků/rovnoběžek):

$$S_\varphi = r\Delta\lambda, \quad S_\lambda = R\Delta\varphi, \quad r = R \cos \varphi.$$

Měřítkové číslo ve 2 směrech

$$M_\varphi = \frac{S_\varphi}{s_\varphi}, \quad M_\lambda = \frac{S_\lambda}{s_\lambda}.$$

Měřítkové číslo mapy – geometrický průměr

$$M = \sqrt{M_\varphi M_\lambda}.$$

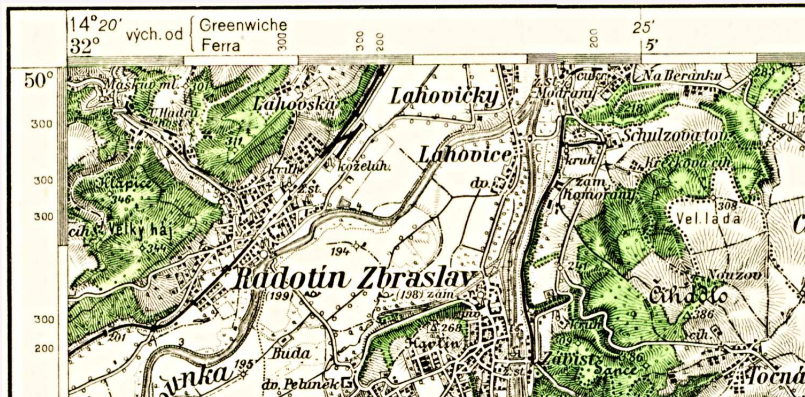
Obdobně lze pracovat např. s křížky hektometrické sítě.

Jsou-li vyneseny souřadnice, lze odečítat souřadnicové rozdíly.

Pak $D_\varphi \approx \Delta y$ a $D_\lambda \approx \Delta x$ (dle orientace souř. systému).

27. 3. vojenské mapování (1:25 000)

SZ roh.



28. 3. vojenské mapování (1:25 000)

SV roh.



29. Určení M z prvků mapové kresby

Mapová kresba méně přesná než matematicko-konstrukční prvky.

Absence geometrického základu (u starých map do 18. stol).

Čím starší mapa, tím nižší spolehlivost odhadu měřítka.

Kresba ovlivněna generalizací.

Větší počet zprostředkujících prvků \Rightarrow vyrovnání MNČ.

Volba prvků mapové kresby:

- Použity dobře identifikovatelné body (stará/současná mapa).
- Rovnoměrné rozmístění po celé ploše mapy.
- Poloha bodů se v čase příliš nemění.

Příklady: hrady, kostely, kláštery, náměstí, historická centra, soutoky řek.

Měřítka lokálně proměnné díky chybám v zákresu prvků.

Lze následně analyzovat a vizualizovat (izočáry).

Výsledek závislý na počtu a rozložení identických bodů a jejich přesnosti.

30. Ukázka umístění identických bodů



31. Metody určení M z mapové kresby

Dvě základní metody určení M :

- Měření vzdálenosti mezi n dvojicemi bodů.
- Určení měřítka s využitím transformace.

Určení M měřením vzdálenosti mezi n dvojicemi bodů

V analyzované/referenční mapě vybráno n vhodných délek mezi identickými body

Identické body voleny v různých částech mapy, vzdálenosti mezi nimi dostatečně velké.

Měřítkové číslo M_i (pro každou délku) mezi 2 identickými body

$$M_i = \frac{S_i}{S_i'}$$

poměrem poměrem skutečné délky S_i a délky v analyzované mapě s_i .

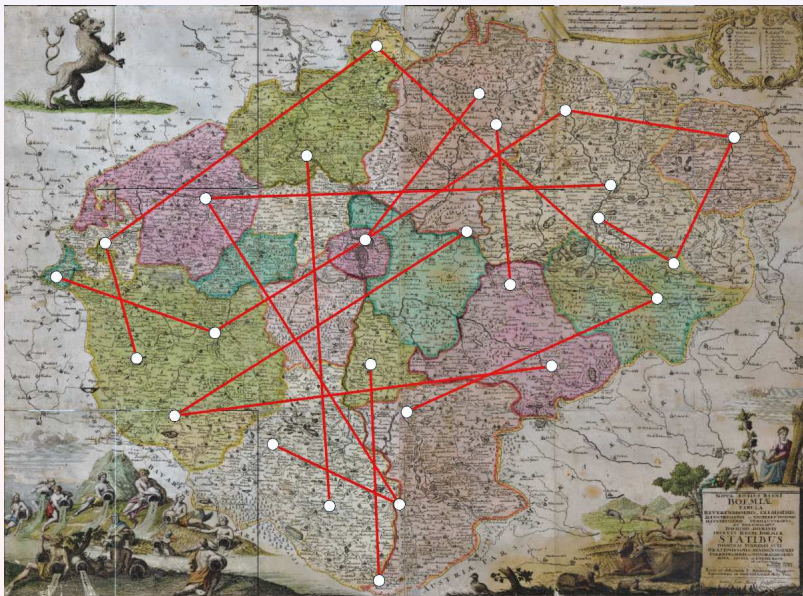
Porovnání analyzované a referenční mapy s měřítkovým číslem M_r

$$M_i = \frac{s_i' M_r}{S_i}$$

Výsledkem střední hodnota

$$M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i.$$

32. Určení M měřením mezi n dvojicemi



33. Určení M transformací

Nejpoužívanější metoda určení M .

Měřítkové číslo M jedním z parametrů transformace mezi analyzovanou/referenční mapou.
Zohlednění rotace, srážky mapového listu.

V rámci transformace provedeno vyrovnání \Rightarrow spolehlivější výsledek..

Nejčastěji používané transformace:

- Podobnostní transformace (s nadbyt. počtem bodů, Helmertova).
- Afinní transformace, M geometrickým průměrem

$$M = \sqrt{M_x M_y}.$$

- Polynomické transformace vyšších řádů.

Polynomické transformace vyšších řádů zpravidla nepoužíváme.

Dochází k deformacím mapové kresby (zkroucení).

Globální systém $[0, X, Y]$ referenční mapa.

Lokální systém $[0, x, y]$ analyzovaná mapa.

34. Určení M s využitím podobnostní transformace

1x rotace Ω , 2x posun Δ , 1x měřítko q . Konformní. Neopravuje srážku.

$$\begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix}.$$

Podobnostní transformace pro nadbytečný počet bodů (Helmertova), $v^T v = \min$

$$v = A\lambda - I, \quad A_k = \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & -y_n & 1 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & x_n & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}.$$

Řešení

$$\lambda = (A^T A)^{-1} A^T I, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix}.$$

Měřítko a stočení

$$M = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \quad \Omega = \arctan \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

35. Určení M s využitím afinní transformace

2x rotace Ω_x, Ω_y , 2x posun Δ , 2x měřítko q_x, q_y . Eliminuje srážku.

$$\begin{bmatrix} \hat{Y} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x \cos \Omega_x & -q_y \sin \Omega_y \\ q_x \sin \Omega_x & q_y \cos \Omega_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}.$$

Afinní transformace pro nadbytečný počet bodů, $v^T v = \min$

$$v = A\lambda - I, \quad A_k = \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & -y_n & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & x_1 & y_1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & x_n & y_n & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}.$$

Řešení

$$\lambda = (A^T A)^{-1} A^T I, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}.$$

Měřítko a stočení

$$M_x = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \quad M_y = \sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}, \quad \Omega_x = \arctan \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \Omega_y = \arctan \frac{\lambda_4}{\lambda_3}.$$

36. Identické body, analyzovaná mapy

Voleny v místech, která se v čase málo mění.

Historická centra měst, náměstí, hrady, zámky, kláštery, kostely, soutoky řek.

Detailní kartometrická analýza: přibližně 100 bodů.

Rovnoměrné rozmístění nad celým mapovým polem.



37. Opravy na identických bodech

Ilustrují polohovou přesnost bodů.

Důležitá jejich velikost a distribuce (náhodná nebo nějaké systematické?).

Hrubé chyby v identických bodech

$$v_i = \|\hat{Q}_i - Q_i\|_2 > 3\sigma_0.$$

V praxi nutné použití robustní statistiky: M -odhady.



38. Lokální změna měřítka

Měřítkové číslo M se nad analyzovanou mapou mění: $M(\varphi, \lambda)$.

Faktory změny měřítka:

- *Vliv kartografického zobrazení*
Délkové zkreslení, lze exaktně vyjádřit jako funkci φ, λ .
Umíme matematicky odstranit, pro každé zobrazení specifické.
- *Chyby v mapové kresbě*
Mají náhodný/systematický charakter, občas hrubé chyby.
Absence geometrických a polohových základů.
Spíše lokální charakter.
- *Kartografické faktory*
Generalizace (kresba přes míru, odsuny).
Náhodný charakter.
- *Srážka papíru*
Lineární průběh.
Lze matematicky odstranit: eliminace srážky, afinní transformace.
Změny M lze vizualizovat, např. formou izočar.

Mohou být značně velké, desítky až stovky %.

Pozor na odměřování vzdáleností v těchto místech z mapy.

39. Princip analýzy změny měřítka (1/2)

Analyzovaná/referenční mapa, identické body: $P = \{p_i\}_{i=1}^n$, $Q = \{q_i\}_{i=1}^n$.

Mezi kterými body měřit vzdálenosti?

Analýza lokálních vlastností mapy, použití blízkých bodů.

Pro každý identický bod p_i hledáme nejbližší bod $\langle k, \underline{p}_k \rangle$ a jeho index k

$$\underline{p}_k = \arg \min_{\forall p_j \in P} \|p_i - p_j\|_2, \quad p_j \neq p_i,$$

Lokální hodnota měřítkového čísla mezi p_i a nejbližším sousedem p_k

$$M(x_{i,k}, y_{i,k}) = \frac{\|q_i - q_k\|_2}{\|p_i - \underline{p}_k\|_2},$$

vztažena ke střednímu bodu $p_{i,k} = 0.5(p_i + p_k)$

$$x_{i,k} = \frac{1}{2}(x_i + x_k), \quad y_{i,k} = \frac{1}{2}(y_i + y_k).$$

Alternativně **transformace na 2 identické body**: p_i, \underline{p}_k a odpovídající $q_i, q_k \Rightarrow M \equiv M(x_{i,k}, y_{i,k})$.

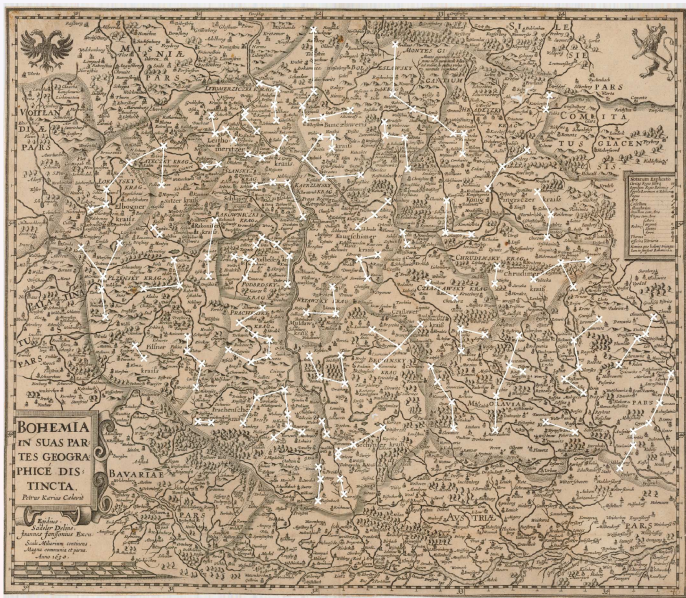
Interpolace izočar nad množinou

$$\{x_{i,k}, y_{i,k}, M(x_{i,k}, y_{i,k})\},$$

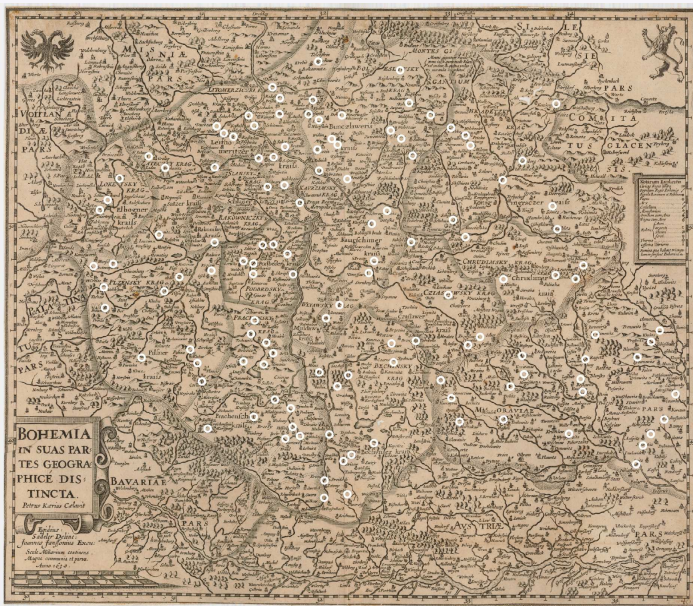
alternativně odchylky od určeného měřítkového čísla

$$\{x_{i,k}, y_{i,k}, \Delta M\}, \quad \Delta M = M - M(x_{i,k}, y_{i,k}).$$

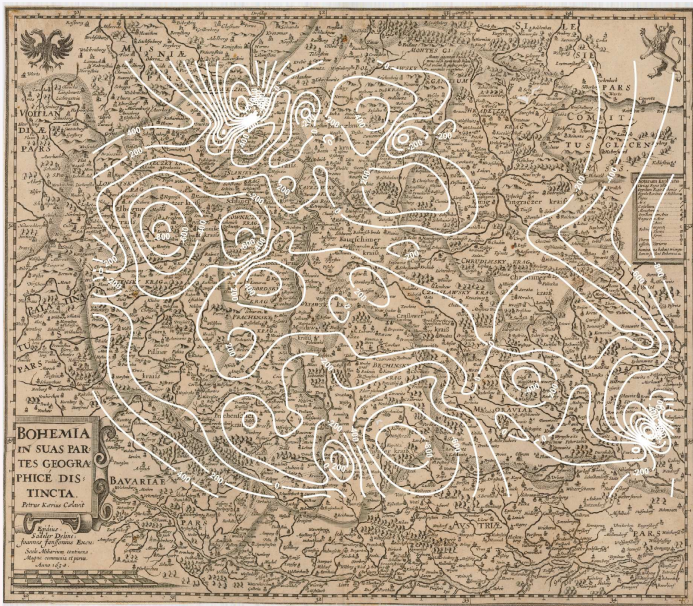
40. Identické body a jejich NN



41. Metoda NN, body M_i



42. Metoda NN, izočáry ΔM



43. Lokální změna stočení

Stočení Ω se nad analyzovanou mapou mění: $\Omega(\varphi, \lambda)$.

Podobné faktory jako u změny měřítka.

Nejvýraznější roli hrají chyby v mapové kresbě, typické pro staré mapy.

Blízké body vybírány metodou NN, MST, DT, ...

Lokální změna hodnota stočení

$$\Omega(x_{i,k}, y_{i,k}) = \sigma'_i - \sigma_i, \quad \tan \sigma'_i = \frac{Y_k - Y_i}{X_k - X_i}, \quad \tan \sigma_i = \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i},$$

vztažena ke střednímu bodu $p_{i,k} = 0.5(p_i + p_k)$

$$x_{i,k} = \frac{1}{2}(x_i + x_k), \quad y_{i,k} = \frac{1}{2}(y_i + y_k).$$

Alternativně **transformace na 2 identické body**: p_i, \underline{p}_k a odpovídající $q_i, q_k \Rightarrow \Omega \equiv \Omega(x_{i,k}, y_{i,k})$.

Interpolace izočar nad množinou

$$\{x_{i,k}, y_{i,k}, \Omega(x_{i,k}, y_{i,k})\}.$$

Největší hodnoty Ω v místech s lokální změnou M .

Ω může nabývat značných hodnot, až desítky $^\circ$.

Pozor při odměřování úhlů z map.

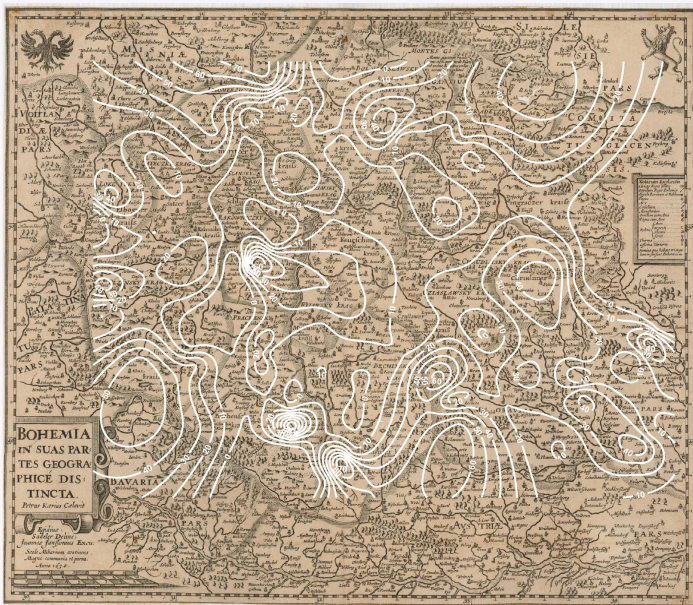
44. Princip analýzy

Ω měřen mezi spojnicemi odpovídajících identických bodů.

Opět vybírány blízké body.



45. Lokální změna stočení, izočáry Ω



46. Polohová přesnost mapy

Dána velikostí/orientací vektorů oprav $v_i = \hat{Q}_i - Q_i$ na identických bodech.

$$\|v_i\|_2 = \|\hat{Q}_i - Q_i\|_2 = \sqrt{(\hat{X}_i - X_i)^2 + (\hat{Y}_i - Y_i)^2}.$$

Chyby v mapové kresbě mají náhodný/systematický charakter.

Chybně zadaný identický bod

$$\|v_i\|_2 > 3\sigma_0.$$

MNČ není robustní, jedna hrubá chyba může ovlivnit výsledek: M - odhady.

Střední polohová chyba (RMSE), charakterizuje geometrickou přesnost mapy jako celku

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{X}_i - X_i)^2}{n}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y_i)^2}{n}}, \quad \sigma_{xy} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$

Jednotková střední chyba, charakterizuje přesnost 1 měření

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{X}_i - X_i)^2 + (\hat{Y}_i - Y_i)^2}{2n - k}},$$

kde:

k je počet určovaných parametrů (podobnostní $k = 4$, afinní $k = 6$).

\hat{X}_i, \hat{Y}_i transformované (vyrovnané) souřadnice,

X_i, Y_i souřadnice v globálním systému (referenční mapě).

47. Polohová přesnost starých map

Výrazně se mění v čase.

Klíčovým faktorem geometrické a polohové základy při konstrukci map.

Důležitou roli hraje i měřítko mapy.

Staré mapy bez geometrického základu:

Hodnoty σ_{xy} v řádech km/desítek km.

Kaeriova mapa: $\sigma_{xy} = 8.4$ km, Vogtova mapa: $\sigma_{xy} = 5.8$ km.

Historická topografická mapování:

O 2-3 řády přesnější (polohové a geometrické základy).

I. vojenské mapování: σ_{xy} v řádech desítek m.

II. vojenské mapování: $\sigma_{xy} = 8.8$ m.

III. vojenské mapování: $\sigma_{xy} = 12.1$ m (zhoršení oproti II.).

Současné státní mapové dílo:

Vysoká polohová přesnost, o další 3 řády přesnější.

Hodnoty σ_{xy} v řádech cm, dle měřítka.