Metoda nejmenších čtverů.

MNČ. Vyrovnání měření přímých. Vyrovnání měření zprostředkujících.

Tomáš Bayer | bayertom@natur.cuni.cz

Přírodovědecká fakulta Univerzity Karlovy v Praze, Katedra aplikované geoinformatiky a kartografie.

Obsah přednášky

1. Metoda nejmenších čtverců
2. Vyrovnání měření přímých
3. Vyrovnání měření zprostředkujících

1. Metoda nejmenších čtverců

Autorem Carl Friedrich Gauss (1795) ve věku 18 let.

Používána při zpracování dat zatížených chybou pro nalezení nejvhodnějšího odhadu.

Odhad splňuje podmínku MNČ, minimalizuje sumu kvadrátů odchylek vstupních hodnot.

Jedna z nejčastěji používaných technik, nevýhodou malá robustnost vůči chybám vstupních veličin

Vhodná v případech, kdy jsou chyby vzájemně nezávislé, nekorelované, tj. $E(\Delta) = 0$

Pro tyto případy je metoda nejvhodnějším existujícím odhadem: Gauss-Markovův teorém.

2. Princip MNČ

Na intervalu $\langle a, b\rangle$ n diskrétních hodnot $x_0, ..., x_n$ a funkce $y = f(x_0, ..., x_n)$.

Předpoklad: hodnoty jsou nekorelované.

Hledáme nejlepší aproximaci f označenou jako $\tilde{f}$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x), \qquad a_i \epsilon \mathbb{R}.$$

Odchylka $\rho(a_1, ..., a_n)$ od aproximační funkce

$$\rho(a_{10}, ..., a_n) = (\tilde{f}(x) - f).$$

Hledáme $a_1, ..., a_n$ tak, aby

$$\rho^2(a_0, ..., a_n) = (\sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) - f)^2 = \min. \tag{1}$$

byla minimalizována suma kvadrátů odchylek, tj. minimalizovala odchylku ρ od funkce f.

3. Odvození MNČ klasicky (1/3)

Platí

$$
\begin{aligned}
\rho^2 &= (\widetilde{f}(x) - f)^2 = \widetilde{f}(x) \cdot \widetilde{f}(x) - 2f \cdot \widetilde{f}(x) + f \cdot f) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x) - 2f \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x) + f \cdot f.
\end{aligned}
$$

Hledáme extrém této funkce, minimum, s využitím parc. derivací

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho^2(a_1, \ldots, a_n)}{\partial a_1} &= 0 \\
\ldots \quad \ldots &\quad \ldots \\
\frac{\partial \rho^2(a_0, \ldots, a_n)}{\partial a_n} &= 0
\end{aligned}
$$

Pak

$$
\frac{\partial \rho^2(a_0, \ldots, a_n)}{\partial a_j} = 2\sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x) - 2f \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_j(x) = 0
$$

4. Odvození MNČ klasicky (2/3)

Platí

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) \varphi_j(x_i) = f \sum_{i=0}^{n} \varphi_j(x_i) \tag{2}$$

Rozepsáním výrazu dostaneme

$$\begin{aligned}
a_0\varphi_0 \cdot \varphi_0 + a_1\varphi_0 \cdot \varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_0 \cdot \varphi_n &= f \cdot \varphi_0 \\
a_0\varphi_1 \cdot \varphi_0 + a_1\varphi_1 \cdot \varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_1 \cdot \varphi_n &= f \cdot \varphi_1 \\
\\
a_0\varphi_m \cdot \varphi_0 + a_1\varphi_m \cdot \varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_m \cdot \varphi_n &= f \cdot \varphi_m
\end{aligned}$$

soustavu **normálních rovnic** s neznámými a_i s Grammovým determinantem.

Ověření minima

$$\frac{\partial \rho^2(a_0, \ldots, a_n)}{\partial a_j^2} = 2 \sum_{i=1}^{n} \varphi_j(x) \cdot \varphi_j(x) > 0 \qquad \forall a_i.$$

5. Odvození MNČ klasicky (3/3)

Skalární součin funkcí $f \cdot g$

$$f \cdot g = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) g(x_k).$$

Normální rovnice přejdou do tvaru

$$\begin{aligned}
a_0 \sum_{k=0}^{n} \varphi_0(x_k)\varphi_0(x_k) + a_1 \sum_{k=0}^{n} \varphi_0(x_k)\varphi_1(x_k) + \ldots + a_n \sum_{k=0}^{n} \varphi_0(x_k)\varphi_n(x_k) &= \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\varphi_0(x_k). \\
a_0 \sum_{k=0}^{n} \varphi_1(x_k)\varphi_0(x_k) + a_1 \sum_{k=0}^{n} \varphi_1(x_k)\varphi_1(x_k) + \ldots + a_n \sum_{k=0}^{n} \varphi_1(x_k)\varphi_n(x_k) &= \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\varphi_1(x_k). \\
a_0 \sum_{k=0}^{n} \varphi_m(x_k)\varphi_0(x_k) + a_1 \sum_{k=0}^{n} \varphi_m(x_k)\varphi_1(x_k) + \ldots + a_n \sum_{k=0}^{n} \varphi_m(x_k)\varphi_n(x_k) &= \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\varphi_m(x_k).
\end{aligned}$$

6. Příklad (1/2)

Aproximace dat polynomem prvního stupně: $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$. Aproximační funkce má tvar $f(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 x$. Hodnoty dány tabulkou, k=2

x_k	1	2	5
$f(x_k)$	1.1	1.9	5.2

$$\sum_{k=0}^{2} 1 \cdot 1 = 3 \qquad \sum_{k=0}^{2} 1 \cdot x_k = 8 \qquad \sum_{k=0}^{2} 1 \cdot f(x_k) = 8.2 \qquad \sum_{k=0}^{2} x_k x_k = 30 \qquad \sum_{k=0}^{2} x_k \cdot f(x_k) = 30.9$$

$$\begin{aligned}
a_0 \sum_{k=0}^{2} \varphi_0(x_k)\varphi_0(x_k) + a_1 \sum_{k=0}^{2} \varphi_0(x_k)\varphi_1(x_k) &= \sum_{k=0}^{2} f(x_k)\varphi_0(x_k). \\
a_0 \sum_{k=0}^{2} \varphi_1(x_k)\varphi_0(x_k) + a_1 \sum_{k=0}^{2} \varphi_1(x_k)\varphi_1(x_k) &= \sum_{k=0}^{2} f(x_k)\varphi_1(x_k).
\end{aligned}$$

7. Příklad (2/2)

Normální rovnice přejdou na tvar

$$\begin{aligned} 3a_0 + 8a_1 &= 8.2. \\ 8a_0 + 30a_1 &= 30.9. \end{aligned}$$

Řešení soustavy:

$$a_0 = -0.0462, a_1 = 1.0423.$$

Hledaná aproximace $\widetilde{f}(x)$ funkce $f(x)$

$$\widetilde{f}(x) = -0.0462 + 1.0423x.$$

8. Maticový zápis MNČ (1/2)

Na intervalu $\langle a, b \rangle$ n diskrétních hodnot $x_1, ..., x_n$ a funkce $\mathbf{F}$.

Hledaná aproximace $\widetilde{\mathbf{F}}$ funkce $\mathbf{F}$:

$$\widetilde{\mathbf{F}} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Rezidua $\boldsymbol{\rho}$ (tzv. fitting problem)

$$\varrho = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{F}. \tag{3}$$

Aplikujeme podmínku MNČ

$$\begin{aligned} \varrho^T \boldsymbol{\rho} &= (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{F})^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{F}) = (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T - \mathbf{F}^T)(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{F}) = \min. \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{F}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \mathbf{F} \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^\mathbf{T} \mathbf{A}^\mathbf{T} \mathbf{F} + \mathbf{F}^\mathbf{T} \mathbf{F}. \end{aligned}$$

9. Maticový zápis MNČ (2/2)

Hledáme minimum funkce funkce

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}^T \boldsymbol{\rho}}{\partial x} = 0.$$

Pak

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}^T \boldsymbol{\rho}}{\partial x} = 2\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - 2\mathbf{A}^T\mathbf{F} = 0.$$

Platí

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \quad = \quad \mathbf{F}^T\mathbf{A}.$$

Výsledný vztah

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{F}. \tag{4}$$

10. Další možnosti minimalizace ρ

Vážená metoda nejmenších čtverců

$$[w\rho\rho] = \min .$$

Použití u vstupních hodnot nestejné přesnosti.

Každá hodnota disponuje váhou w.

Minimalizace L_1 normy

$$[|\rho|] = \min .$$

Lépe reaguje na přítomnost hrubých chyb v datech.

Výrazně složitější výpočet.

11. Vyrovnání měření přímých (1/2)

Měřená veličina určena opakovaně a nezávisle.

Jednotlivá měření $\mathbf{l} = \{l_1, ..., l_n\}$ s vahami $\mathbf{w} = \{w_1, ..., w_n\}$.

Pokud $w_i = 1$, pak aplikace MNČ, jinak vážená MNČ.

Opravy ∼odchylky

$$\mathbf{v} = \mathbf{E}\bar{\mathbf{l}} - \mathbf{l}, \quad \mathbf{E}{=}1. \tag{5}$$

Aplikujeme podmínku MNČ

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^T\mathbf{W}\mathbf{v} &= (\mathbf{E}\bar{\mathbf{l}} - \mathbf{l})^T\mathbf{W}(\mathbf{E}\bar{\mathbf{l}} - \mathbf{l}) = \min . \\
&= (\bar{\mathbf{l}}^T\mathbf{E}^\mathbf{T}\mathbf{W} - \mathbf{l}^\mathbf{T}\mathbf{W})(\mathbf{E}\bar{\mathbf{l}} - \mathbf{l}) \\
&= \bar{\mathbf{l}}^T\mathbf{E}^\mathbf{T}\mathbf{W}\mathbf{E}\bar{\mathbf{l}} - \mathbf{l}^T\mathbf{W}\mathbf{E}\bar{\mathbf{l}} - \bar{\mathbf{l}}^T\mathbf{E}^\mathbf{T}\mathbf{W}\mathbf{l} + \mathbf{l}^\mathbf{T}\mathbf{W}\mathbf{l}.
\end{aligned}$$

Pak

$$\frac{\partial \mathbf{v}^T\mathbf{W}\mathbf{v}}{\partial \bar{\mathbf{l}}} = 2\mathbf{E}^\mathbf{T}\mathbf{W}\mathbf{E}\bar{\mathbf{l}} - \mathbf{l}^T\mathbf{W}\mathbf{E} - \mathbf{E}^\mathbf{T}\mathbf{W}\mathbf{l} = 0.$$

12. Vyrovnání měření přímých (2/2)

Platí

$$\mathbf{E^TWE\bar{l}=E^TWl} \Rightarrow \mathbf{\bar{l}} = (\mathbf{E^TWE})^{-1}\mathbf{E^TWl}. \tag{6}$$

Vzorec lze přepsat do tvaru

$$\mathbf{\bar{l}} = \frac{\mathbf{E^TWl}}{\mathbf{E^TWE}}$$

představujícího vážený průměr

$$\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i l_i}{\sum_{i=1}^{n} l_i}. \tag{7}$$

Aritmetický průměr pro $w_i = 1$

$$\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{\sum_{i=1}^{n} n}. \tag{8}$$

13. Střední chyba aritmetického průměru

Aplikujeme zákon hromadění středních chyb

$$\overline{m}_l^2 = \left(\frac{\partial \bar{l}}{\partial l_1}\right)^2 m_{l_1}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \bar{l}}{\partial l_n}\right)^2 m_{l_n}^2.$$

Pak

$$\begin{aligned}\overline{m}_l^2 &= \left(\frac{w_1}{\sum_{i=1}^n w_i}\right)^2 m_{l_1}^2 + \ldots + \left(\frac{w_n}{\sum_{i=1}^n w_n}\right)^2 m_{l_n}^2 \\ &= \frac{1}{(\sum_{i=1}^n w_i)^2}(w_1^2 m_{l_1}^2 + \ldots + w_n^2 m_{l_n}^2).\end{aligned}$$

Všechna měření se stejnou chybou $m_{l_i}^2 = m_0^2$. Pak

$$\overline{m}_l^2 = \frac{m_0^2 \sum_{i=1}^n w_i}{(\sum_{i=1}^n w_i)^2} = \frac{m_0^2}{\sum_{i=1}^n w_i}. \tag{9}$$

Nevážená varianta

$$\overline{m}_l^2 = \frac{m_0^2}{n}. \tag{10}$$

14. Výpočet empirické střední chyby (1/2)

Nelze použít vzorec $m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_i}{n}}$, hodnoty ε neznámé. Platí

$$\begin{aligned} \varepsilon &= L - l, \\ v &= \bar{l} - l. \end{aligned}$$

Pak

$$\varepsilon - v = L - \bar{l} = \varepsilon_{\bar{l}} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_{\bar{l}} + v.$$

Umocnění

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_{\bar{l}}^2 + 2v\varepsilon_{\bar{l}} + v^2.$$

Sumace

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2 &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{\bar{l}}^2 + \sum_{i=1}^{n} 2v_i\varepsilon_l + \sum_{i=1}^{n} v_i^2. \\ &= n\varepsilon_{\bar{l}}^2 + \sum_{i=1}^{n} v_i^2. \end{aligned}$$

Použijeme

$$\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{n} \qquad \varepsilon_{\bar{l}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i}{n},$$

15. Výpočet empirické střední chyby (2/2)

Pak

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i}{n}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} v_i^2.$$

Aplikujeme střední hodnotu E, přejdeme ke středním chybám

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2\right) &= \frac{E\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right)^2}{n} + E\left(\sum_{i=1}^{n} v^2\right). \\ n\overline{m}^2 &= \overline{m}^2 + n\overline{m}_v^2. \end{aligned}$$

Platí

$$\overline{m}^2 = \frac{n}{n-1}\overline{m}_v^2.$$

Zavedeme $\varepsilon \approx v$, vztah $m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_i}{n}}$ přejde na

$$\overline{m}_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i v_i}{n}},$$

Empirická střední chyba, ve jmenovateli počet nadbytečná měření

$$\overline{m} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i v_i}{n-1}}. \quad (11)$$

16. Vlastnosti vyrovnané veličiny

1. jednoznačnost (metoda je konvexní),
2. "snadný" výpočet,
3. splňuje fyzikální zákony, $\sum Wvv \sim$ zákon setrvačnosti,
4. Vyrovnaná hodnota má největší pravděpodobnost,
5. Ze všech odhadů nejmenší střední chyba.

Pozor na hrubé chyby, jedna detekovatelná, více chyb obtížně, ovlivňují negativně vyrovnanou veličinu.

17. Vyrovnání měření zprostředkujících (1/3)

Nejčastěji používaná varianta vyrovnání.

Neznámé veličiny se nedají měřit přímo, určují se z měřených pomocí funkčních vztahů.

Předpokládáme, že vstupní hodnoty $\mathbf{l}$ nekorelované.

Vyrovnaná hodnota funkcí n proměnných

$$\bar{\mathbf{l}} = F(\mathbf{x}) \tag{12}$$

Oprava

$$\mathbf{v} = F(\mathbf{x}) - \mathbf{l}.$$

F obecně nelineární (x se nevyskytují v první mocnině), provedena linearizace

$$F(\mathbf{x}) \doteq F(\mathbf{x^0}) + \Delta\mathbf{x}.$$

18. Vyrovnání měření zprostředkujících (2/3)

Pak

$$\mathbf{v} = F(\mathbf{x}^0) + \triangle\mathbf{x} - \mathbf{l}.$$

Aplikace Taylorova rozvoje

$$\mathbf{v} = F(\mathbf{x^0}) + \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big/_{x=x_0} d\mathbf{x} - \mathbf{l}.$$

Zavedeme redukovanou vstupní hodnotu

$$\mathbf{l}' = F(\mathbf{x^0}) - \mathbf{l}.$$

Upravený tvar normálních rovnic

$$\mathbf{v} = \mathbf{l}' + \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big/_{x=x^0} d\mathbf{x} \ . \tag{13}$$

19. Vyrovnání měření zprostředkujících (3/3)

Platí

$$\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big/_{x=x_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_{n1}(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \Big/_{x=x^0} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$

Matice **A** je Jakobián soustavy.

Výsledný tvar normálních rovnic

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{dx} + \mathbf{l}'. \tag{14}$$

Nebo

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \dots \\ dx_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix}. \tag{15}$$

20. Aplikace podmínky MNČ

Podmínka

$$\mathbf{v}^T\mathbf{W}\mathbf{v} = \min .$$

Pak

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\mathbf{dx} + \mathbf{l}')^T\mathbf{W}(\mathbf{A}\mathbf{dx} + \mathbf{l}') &= (d\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{W} + (\mathbf{l}')^T\mathbf{W})(\mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{l}') = \min \\ &= d\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{A}d\mathbf{x} + (\mathbf{l}')^T\mathbf{W}\mathbf{A}d\mathbf{x} + d\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{l}' + (\mathbf{l}\end{aligned}$$

Hledáme extrém funkce

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}^T\mathbf{W}\mathbf{v}}{\partial} &= 2\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{A}d\mathbf{x} + (\mathbf{l}')^{\mathbf{T}}\mathbf{W}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{l}' = 0 \\ &= \mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{l}' = 0.\end{aligned}$$

Řešení normálních rovnic

$$d\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{l}' = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{l}'. \qquad (16)$$

21. Určení vyrovnaných veličin

Určení neznámých

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + d\mathbf{x}. \tag{17}$$

Výpočet oprav

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{l}'. \tag{18}$$

Určení vyrovnaných veličin

$$\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v}. \tag{19}$$

Kontroly

$$\begin{aligned} [\mathbf{Wvv}] &= \left[\mathbf{Wvl}'\right], \\ [\mathbf{Wvv}] &= \left[\mathbf{Wvl}' \cdot k\right]. \end{aligned}$$

22. Střední chyby

Empirická střední chyba

$$\overline{m}_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} W_i v_i v_i}{n-k}}, \tag{20}$$

kde $n-k$ je počet nadbytečných měření (k nutných k určení vyrovnané veličiny).

Střední chyby vyrovnaných veličin

$$m_{x_i} = m_0 \sqrt{Q_{i,i}}, \tag{21}$$

Kovariační matice $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1}, \tag{22}$$

kde

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & \dots & Q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ Q_{n1} & \dots & Q_{nn} \end{pmatrix} \tag{23}$$

23. Příklad, bez linearizace

Aproximace dat polynomem prvního stupně, aproximační funkce má tvar $y = a_0 \cdot 1 + a_1 x$. Hodnoty dány tabulkou, k=2

x_k	1	2	5
$y(x_k)$	1.1	1.9	5.2

Řešení bez linearizace, koeficienty a_0, a_1 v první mocnině.

$$\begin{aligned} v_1 &= a_0 + a_1 x_1 - y_1, \\ v_2 &= a_0 + a_1 x_2 - y_2 \Rightarrow \\ v_3 &= a_0 + a_1 x_3 - y_3, \end{aligned}$$

resp.

$$v = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.9 \\ 5.2 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T L = \begin{pmatrix} -0.0462 \\ 1.0423 \end{pmatrix}$$

24. Příklad, s linearizací 1/2

Určíme přibližné hodnoty konstant

$$a_0^0 = 0, \qquad a_1^0 = 1 \rightarrow a^0 = [0, 1]$$

Platí

$$y = a_0 \cdot 1 + a_1 x.$$

Linearizace, Taylorův rozvoj 1. stupně

$$\begin{aligned} y(a) \doteq y(a^0) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial y}{\partial a_i} da_i \Big\rfloor_{a^0} &= y(a^0) + 1\rfloor_{a^0} da_0 + x\rfloor_{a^0} da_1, \\ &= x + 1 \cdot da_0 + x \cdot da_1. \end{aligned}$$

Opravy

$$v = x + 1 \cdot da_0 + x \cdot da_1 - y = da_0 + x \cdot da_1 + (x - y).$$

25. Příklad, s linearizací 2/2

Jakobiho matice a vektor oprav

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} \qquad L' = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 \end{pmatrix}, \\ da &= -\left(A^T A\right)^{-1} A^T L'. \end{aligned}$$

Numericky

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad L' = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \\ -0.2 \end{pmatrix} \qquad da = \begin{pmatrix} -0.0462 \\ 0.0423 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$a = a^0 + da = \begin{pmatrix} -0.0462 \\ 1.0423 \end{pmatrix}.$$

26. Příklad (1/3)

Na stanovisku P měřeny 3 úhly:
$\angle APB = 90.51^\circ, \angle BPC = 89.52^\circ, \angle CPA = 180.10^\circ$. Určete vyrovnané hodnoty úhlů.

Z obrázku plyne, že $k = 2$.

27. Příklad (2/3)

Sestavení funkčních vztahů:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= x_1. \\
F_2 &= x_2. \\
F_3 &= 360^\circ - (x_1 + x_2).
\end{aligned}
$$

Jakobián $\mathbf{A}$ a přírůstky $\mathbf{l}'$

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{l}' = \begin{pmatrix} x_1^0 - l_1 \\ x_2^0 - l_2 \\ 360^\circ - x_1 - x_2 - l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.13 \end{pmatrix}.
$$

$$
W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

28. Příklad (3/3)

Výpočet $d\mathbf{x}$

$$
\begin{aligned}
d\mathbf{x} &= -(\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{l}' \\
d\mathbf{x} &= -\begin{pmatrix} 0.0433 \\ 0.0433 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Výpočet oprav $\mathbf{v}$

$$
\mathbf{v} = \mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{l}' = -\begin{pmatrix} 0.0433 \\ 0.0433 \\ 0.0433 \end{pmatrix}
$$

Výpočet vyrovnaných hodnot

$$
\bar{\mathbf{l}} = \begin{pmatrix} 90.51 \\ 89.52 \\ 180.10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.0433 \\ 0.0433 \\ 0.0433 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90.4667 \\ 89.4767 \\ 180.0567 \end{pmatrix}.
$$