# Zákony hromadění chyb.

## Zákon hromadění skutečných chyb. Zákon hromadění středních chyb.

Tomáš Bayer | bayertom@natur.cuni.cz

Přírodovědecká fakulta Univerzity Karlovy v Praze, Katedra aplikované geoinformatiky a kartografie.

# Obsah přednášky

# 1. Úvod

V přírodních vědách nás zajímají jak kvalitativní tak kvantitativní charakteristiky.

Kvantitativní charakteristiky zpravidla určovány měřením: délka, úhel, čas, odrazivost...

Při opakovaném měření získáme různý výsledek $\Rightarrow$ rušivé vlivy.

Zvýšení přesnosti: lepší metodika, přesnější přístroj, snížení vlivu okolních chyb.

Výsledek měření náhodnou veličinou.

Cílem vyrovnání nalezení nejspolehlivější hodnoty (střední hodnota) a stanovení meze spolehlivosti (chyba).

# 2. Veličina a její chyba

Přibližná $x$ (měřená) a skutečná $X$ (neznámá)

Skutečná chyba $\varepsilon$

$$\varepsilon = X - x \qquad \varepsilon > 0 \Leftrightarrow X > x | \varepsilon < 0 \Leftrightarrow X < x.$$

Určení skutečné hodnoty

$$X = x + \varepsilon.$$

Odhad skutečné chyby $\varepsilon_X$

$$|\varepsilon| = |X - x| \leq \varepsilon_X.$$

Platí

$$x - \varepsilon_X \leq X \leq x + \varepsilon_X \Rightarrow X = x \pm \varepsilon_X.$$

# 3. Veličina a její chyba

Jedno měření = žádné měření

$$x_1 = X - \varepsilon_1, x_2 = X - \varepsilon_2, ..., x_n = X - \varepsilon_n$$

Skutečná chyba

$$\varepsilon_i = X - x_i. \tag{1}$$

Skutečná hodnota

$$X = x_i + \varepsilon_i.$$

$X$ nebývá známa, místo ní zavádíme vyrovnanou hodnotu $\overline{x}$.

Oprava

$$v_i = \overline{x} - x_i. \tag{2}$$

Relativní chyba

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{|X|}. \tag{3}$$

# 4. Typy chyb

Existují čtyři základní skupiny chyb:

1. *Omyly*
   Špatná metodika, nesprávný postup, omyl.
2. *Hrubé chyby*
   Měření za nepříznivých okolností.
   Odstranění opakovaným měřením, možno detekovat v datech.
   Každá metoda a postup má stanovenu přesnost: chyby v mezích jsou nevyhnutelné, nad tyto meze hrubé.
3. *Náhodné chyby* $\Delta$
   Náhodné hodnoty, vzájemně nezávislé.
4. *Systematické chyby* $c$
   Podobné hodnoty, vzájemně závislé.

Náhodné a systematické chyby patří mezi **nevyhnutelné chyby**, nelze je eliminovat žádnou měřickou technikou.

# 5. Náhodné a systematické chyby

**Náhodné chyby $\Delta$**

Náhodný charakter, proměnlivé za stejných podmínek, stejné metodice.

Vzájemně nezávislé, nelze jejich hodnoty předvídat.

$E(\Delta) = 0$.

**Systematické chyby $c$**

Nabývají podobných hodnot, ovlivněny nějakým faktorem v podobné míře.

Mají stejnou systematickou složku, vzájemně závislé (korelované).

- *Konstantní*:
  stejná velikost a znaménko, nelze vyloučit měřením/výpočtem:
  $x_1 = X - c, x_2 = X - c, ..., x_n = X - c$
- *Proměnlivé*:
  Hodnoty rámcově proměnlivé, avšak nikoliv zcela náhodné, $E(c) = \overline{c}$.

**Skutečná chyba**

$$\varepsilon_i = \Delta_i + c_i. \tag{4}$$

# 6. Zákon hromadění náhodných chyb

Náhodné chyby jednotlivě nepodléhají zákonitostem, jako celek pro ně platí pravidla jako u náhodných jevů.

Tři **Gaussovy zákonitosti**:

Z1: Malé chyby se vyskytují častěji než velké chyby.

Z2: Chyby nad určitou mez se nevyskytují.

Z3: Pravděpodobnost vzniku kladné/záporné chyby je stejná.

**Elementární chyba** $\delta$

Náhodná chyb vzniká lineární kombinací většího počtu elementárních chyb $\delta$ různé velikosti, jejichž znaménko je náhodné (sečtou se či odečtou).

Velká chyba: střet elementárních chyb s kladnými znaménky.

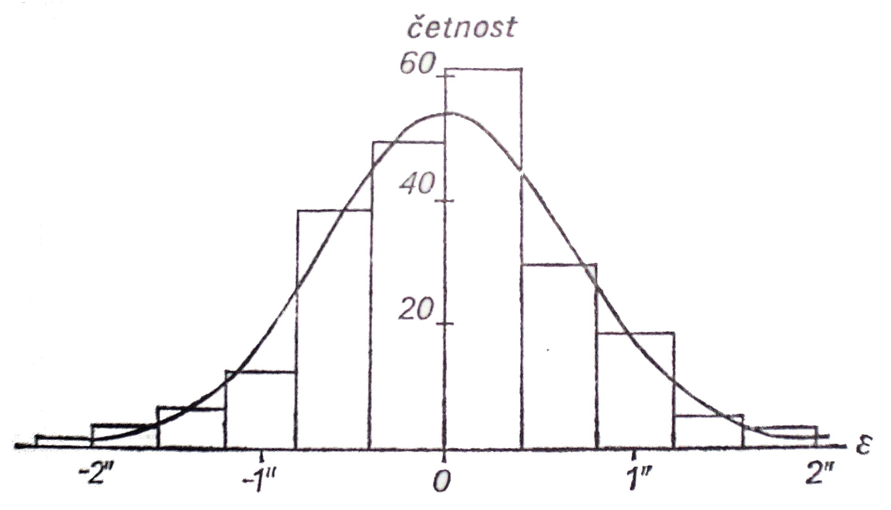
Malá chyba: střet elementárních chyb s různými znaménky.

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^{m} \delta_j. \tag{5}$$

Veličina

$$x_i = X - \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i = \sum_{j=1}^{m} \delta_{j,i} \Rightarrow x_i = X - \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{m}} \delta_{\mathbf{j,i}}$$

# 7. Ukázka rozložení chyb



# 8. Základní soubor a rozložení chyb

Veličinu $X$ určujeme z konečného počtu měření tvořící aproximaci základního souboru.

Rozložení hodnot přibližně odpovídá Gaussovu rozdělení.

Střední hodnoty chyb a veličin

$$E(\delta) = 0, E(\varepsilon) = 0, E(x) = X. \tag{6}$$

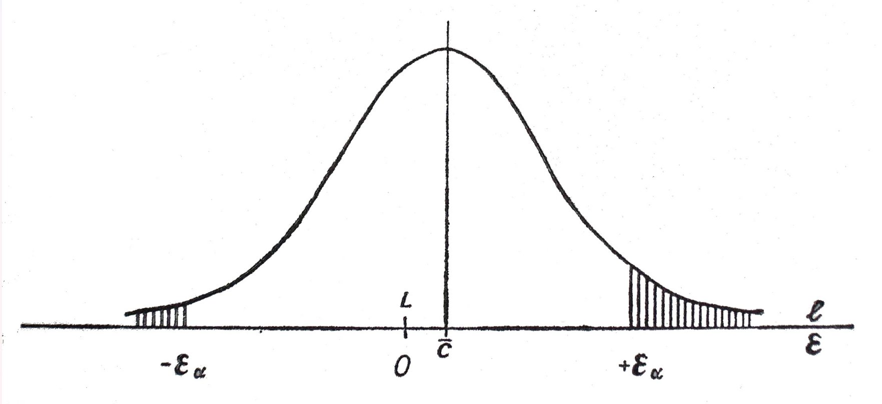
Předpoklad působení náhodných chyb

$$\lim \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i}{n} = 0, \qquad \lim \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = X.$$

Předpoklad působení systematických chyb

$$\lim \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i}{n} = \overline{c}, \qquad \lim \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = X - \overline{c}.$$

# 9. Ukázka polohy $\overline{c}$: systematické chyby



# 10. Přesnost veličiny $X$

Hodnotu veličiny $X$ lze odhadnout (měřit) různými metodami s různými hodnotami elementární chyby.

Každou z metod lze charakterizovat různým souborem hodnot $\varepsilon_i$.

Za **přesnější** označujeme takovou metodu, která má vůči jiné metodě menší rozptyl $x_i$ kolem střední hodnoty.

Hodnotu rozptylu lze měřit

- střední chybou $\sigma$, $\sigma^2 = V(x)$.
- průměrnou chybou,
- pravděpodobnou chybou.

**Variance** $V(x)$

Druhý centrální moment

$$V(x) = E(x - E(x))^2 = E(\Delta^2) = \sigma^2.$$

U skutečných chyb definujeme **základní střední (kvadratickou) chybu** $\overline{m}$

$$\bar{m}^2 = E(x - X)^2 = E(\varepsilon^2) \Rightarrow \overline{m} = \sqrt{E(\varepsilon^2)}.$$

Mocnina základní střední chyby je střední hodnota ze čtverce skutečné chyby.

# 11. Vlastnosti základní střední chyby

Charakterizuje soubor hodnot jako celek, hodnotí jeho přesnost.

Čím větší hodnota $\overline{m}$, tím menší přesnost.

Platí i při výskytu systematických chyb, bývá nazývána úplnou variancí.

Pozor: $E(\Delta^2) \neq E(\varepsilon^2)$

$$E(\varepsilon^2) = E((\Delta + c)^2) = E(\Delta^2 + 2\Delta c + c^2)$$

Pak

$$E(\varepsilon^2) = E(\Delta^2) + 2E(\Delta)E(c) + E(c^2)$$

Platí

$$\overline{m}^2 = \sigma^2 + \overline{c}^2. \tag{7}$$

Základní střední chyba obsahuje vliv náhodné i systematické složky.

Čtverec základní střední chyby je součtem čtverců variance a střední hodnoty systematické složky (poloha centra).

# 12. Další charakteristiky přesnosti

**Empirická střední chyba** $m$

Náhodná veličina, spočtená z konečného souboru $n$ měření.

Odmocnina z průměrné hodnoty čtverce chyb

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{n}}. \tag{8}$$

**Mezní chyba** $\varepsilon_\alpha$

Největší přípustná chyba.

Volena jako 2-3 násobek základní střední chyby (do intervalu padne 95% měření).

$$\varepsilon_\alpha \in \langle 2\overline{m}, 3\overline{m} \rangle . \tag{9}$$

**Průměrná chyba** $v$

První moment, průměrná hodnota absolutní chyby.

$$v = E(|\varepsilon|). \tag{10}$$

# 13. Zákon hromadění skutečných chyb

Ukazuje vliv chyb vstupních veličin na jejich funkce.

Jeho znalost umožňuje volit metody a přístroje poskytující výsledek s požadovanou přesností.

Předpoklad: chyby vstupních veličin vzájemně nezávislé.

**Dána:**

Funkce $f$ $n$ proměnných $x_1, x_2, ..., x_n$ , diferencovatelná, spojitá

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Vstupní chyby argumentů $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...., \varepsilon_n$.

**Hledáme:**

Chybu funkce $\varepsilon_f$.

Odvození diferenciálem nebo Taylorovým rozvojem.

# 14. Odvození zákonu hromadění skutečných chyb

Platí

$$f + \varepsilon_f = f(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, ..., x_n + \varepsilon_n)$$

Taylorův rozvoj, neuvažujeme chyby vyšších řádů, existence derivací

$$\cancel{f} + \varepsilon_f = \cancel{f(x_1, x_2, ..., x_n)/_0} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big/_0 \cdot \varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big/_0 \cdot \varepsilon_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big/_0 \cdot \varepsilon_n + R_2$$

Pak

$$\varepsilon_f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big/_0 \cdot \varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big/_0 \cdot \varepsilon_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big/_0 \cdot \varepsilon_n + R_2$$

Zákon hromadění skutečných chyb:

$$\varepsilon_f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big/_0 \cdot \varepsilon_i. \tag{11}$$

# 15. Varianta: levá strana také funkcí

Složitější případ, levá strana vztahu též funkcí

$$g(f) = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Pak

$$\cancel{f} + \frac{\partial g}{\partial f}\Big/_0 \cdot \varepsilon_f = \cancel{f(x_1, x_2, ..., x_n)/_0} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big/_0 \cdot \varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big/_0 \cdot \varepsilon_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big/_0 \cdot \varepsilon_n + R_2.$$

Modifikovaná varianta zákona hromadění skutečných chyb

$$\varepsilon_f = \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial f}\Big/_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big/_0 \cdot \varepsilon_i. \tag{12}$$

Použití: kosínová věta

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - ...} \Rightarrow \varepsilon_c = \frac{1}{2}(...)^{-1/2}\varepsilon_a + ...$

$c^2 = a^2 + b^2 - ... \Rightarrow \varepsilon_c = \frac{1}{2c}\left[(2a + ...)\varepsilon_a + ...\right.$

# 16. Obrácená úloha

Určení skutečných chyb argumentů tak, aby chyba funkce nepřekročila za danou hodnotu.
Chyby vstupních hodnot opět nezávislé.
Rovnice o více proměnných, lze řešit pouze při stanovení vhodných počátečních podmínek.

**Dána:**

Funkce $f$ $n$ proměnných $x_1, x_2, ..., x_n$ , diferencovatelná, spojitá

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Chyba funkce $\varepsilon_f$.

**Hledáme:**

Chyby argumentů $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...., \varepsilon_n$.

Dvě základní varianty:

- Princip stejného vlivu,
- Rovnost odhadu absolutních chyb.

# 17. Princip stejného vlivu

Platí

$$\varepsilon_f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big/_0 \cdot \varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big/_0 \cdot \varepsilon_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big/_0 \cdot \varepsilon_n$$

Podmínka: jednotlivé členy rozvoje se uplatní stejnou hodnotou

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big/_0 \cdot \varepsilon_1 = \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big/_0 \cdot \varepsilon_2 = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big/_0 \cdot \varepsilon_n.$$

Pak

$$\varepsilon_f = n\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big/_0 \cdot \varepsilon_i.$$

Výsledný vztah

$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_f}{n\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big/_0}. \tag{13}$$

V některých případech nelze použít, příliš vysoké požadavky přesnosti na argumenty.

# 18. Rovnost odhadu absolutních chyb

Předpokládáme, že všechny argumenty mají být určeny se stejnou hodnotou skutečné chyby.

Vliv jednotlivých členů bude různý.

Podmínka

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = ... = \varepsilon_n = \varepsilon.$$

Pak

$$\begin{aligned} \varepsilon_f &= \varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big/_0 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big/_0 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big/_0\right). \\ \varepsilon_f &= \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big/_0 . \end{aligned}$$

Výsledný vztah

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_f}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big/_0}. \tag{14}$$

# 19. Zákon hromadění středních chyb

Skutečné chyby v praxi nebývají, na rozdíl od středních chyb, známy.

Předpoklady:

- “Sudé” rozdělení pravděpodobnosti, $E(\varepsilon_i) = 0$
- Chyby jsou vzájemně nezávislé.
- Funkce jsou spojité a diferencovatelné.

**Dána:**

Funkce $f$ $n$ proměnných $x_1, x_2, ..., x_n$ , diferencovatelná, spojitá

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Vstupní chyby argumentů $\overline{m}_1, \overline{m}_2, ...., \overline{m}_n$.

**Hledáme:**

Chybu funkce $\overline{m}_f$.

# 20. Odvození zákona hromadění středních chyb (1/2)

Vyjdeme ze vztahu

$$\varepsilon_f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big/_0 \cdot \varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big/_0 \cdot \varepsilon_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big/_0 \cdot \varepsilon_n.$$

Umocníme na druhou a přeuspořádáme

$$\begin{aligned}\varepsilon_f \varepsilon_f \quad = \quad & \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big/_0 \cdot \varepsilon_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big/_0 \cdot \varepsilon_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big/_0 \cdot \varepsilon_n\right) +^2 \\ & +2\,\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big/_0 \cdot \varepsilon_1\,\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big/_0 \cdot \varepsilon_2 \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big/_0 \cdot \varepsilon_n + \ldots\end{aligned}$$

Aplikujeme $E$

$$\begin{aligned}E(\varepsilon_f \varepsilon_f) \quad = \quad & E\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big/_0 \cdot \varepsilon_1\right)^2\right] + E\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big/_0 \cdot \varepsilon_2\right)^2\right] + \ldots + E\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big/_0 \cdot \varepsilon_n\right)^2\right] \\ & 2E(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big/_0 \cdot \varepsilon_1)E(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big/_0 \cdot \varepsilon_2)\ldots E(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big/_0 \cdot \varepsilon_n) + \ldots\end{aligned}$$

# 21. Odvození zákona hromadění středních chyb (2/2)

Platí

$$\overline{m}_i^2 = E(\varepsilon_i^2) \qquad E(\varepsilon_i) = 0.$$

Všechny smíšené členy vypadnou.

Pak

$$\overline{m}_f^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big/_0 \cdot \overline{m}_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big/_0 \cdot \overline{m}_2 \right)^2 + \ldots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big/_0 \cdot \overline{m}_n \right)^2 + 0.$$

Zákon hromadění středních chyb

$$\overline{m}_f^2 = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big/_0 \cdot \overline{m}_i \right)^2 \tag{15}$$

# 22. Varianta: levá strana také funkcí (1/2)

Složitější případ, levá strana vztahu též funkcí

$$g(f) = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Pak

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial g}{\partial f}\Big/_{0}\cdot\varepsilon_f\right)^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big/_{0}\cdot\varepsilon_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big/_{0}\cdot\varepsilon_2\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big/_{0}\cdot\varepsilon_n\right) + \\ &+2\,\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big/_{0}\cdot\varepsilon_1\,\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big/_{0}\cdot\varepsilon_2 ...\,\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big/_{0}\cdot\varepsilon_n + ...\end{aligned}$$

Aplikace střední hodnoty

$$\begin{aligned}E\left[\left(\frac{\partial g}{\partial f}\Big/_{0}\cdot\varepsilon_f\right)^2\right] &= E\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big/_{0}\cdot\varepsilon_1\right)^2\right] + E\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big/_{0}\cdot\varepsilon_2\right)^2\right] + ... + E\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big/_{0}\cdot\varepsilon_n\right.\right. \\ &+2E(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big/_{0}\cdot\varepsilon_1)E(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big/_{0}\cdot\varepsilon_2)...E(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big/_{0}\cdot\varepsilon_n) + ...\end{aligned}$$

# 23. Varianta: levá strana také funkcí (2/2)

Pak

$$\overline{m}_f^2 \left( \frac{\partial g}{\partial f} \Big/_0 \cdot \varepsilon_f \right)^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big/_0 \cdot \overline{m}_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big/_0 \cdot \overline{m}_2 \right)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big/_0 \cdot \overline{m}_n \right)^2 .$$

Modifikovaná varianta zákona hromadění středních chyb

$$\overline{m}_f^2 = \frac{1}{\left( \frac{\partial g}{\partial f} \Big/_0 \cdot \varepsilon_f \right)^2} \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big/_0 \cdot \overline{m}_i \right)^2 \tag{16}$$

# 24. Obrácená úloha

Určení skutečných chyb argumentů tak, aby chyba funkce nepřekročila za danou hodnotu.

**Dána:**

Funkce $f$ $n$ proměnných $x_1, x_2, ..., x_n$ , diferencovatelná, spojitá

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Chyba funkce $\overline{m}_f$.

**Hledáme:**

Chyby argumentů $\overline{m}_1, \overline{m}_2, ...., \overline{m}_n$.

Dvě základní varianty:

- Princip stejného vlivu,
- Rovnost odhadu absolutních chyb.

# 25. Princip stejného vlivu

Jednotlivé členy mají stejný vliv

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big/_0 \cdot \overline{m}_1\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big/_0 \cdot \overline{m}_2\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big/_0 \cdot \overline{m}_n\right)^2$$

Pak

$$\overline{m}_f^2 = n\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big/_0 \cdot \overline{m}_i\right)^2$$

Výsledný vztah

$$\overline{m}_i = \frac{\overline{m}_f}{\sqrt{n}\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big/_0}. \tag{17}$$