Marie Turčičová

Párový t-test

Představme si, že máme data tvaru

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_N \\ Y_N \end{pmatrix}$$

tj. na N objektech byly změřeny dvě veličiny. Příkladem takových dat můžou být následující situace:

- u N matek, které porodily dvojčata, byla změřena porodní váha obou dětí
- u N lidí byla změřena síla levé a pravé ruky
- u N aut byla změřena hloubka dezénu levé a pravé přední pneumatiky

a tak podobně. To je zcela jiná situace než u dvouvýběrového t-testu, kde oba výběry byly nezávislé a jednotliví jedinci spolu neměli nic společného. Zde máme pouze N nezávislých jedinců, ale ta dvě měření na něm (např. X_1 a Y_1 na prvním jedinci) už nezávislá nejsou.

Naše data pocházejí vlastně z dvourozměrného rozdělení, jehož populační průměr si označíme

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Naším cílem pak bude testovat hypotézu o rozdílu dílčích populačních průměrů

$$\begin{aligned} &H_0 : \mu_1 - \mu_2 = c \\ &H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq c \quad (\text{nebo: } H_1 : \mu_1 - \mu_2 < c, \text{ nebo } H_1 : \mu_1 - \mu_2 > c), \end{aligned}$$

kde c je nějaká konstanta[1]. Hypotéza je podobná jako u dvouvýběrového t-testu, ale náš přístup k ní se bude muset lišit, protože data mají zcela odlišný charakter.

Jelikož X_i a Y_i jsou dvě měření na i-tém jedinici, která se snažíme porovnat, bude rozumné zavést si novou veličinu $Z_i := X_i - Y_i$. Místo dvojic teď budeme mít datový soubor tvaru $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$. Populační průměr nové veličiny Z si označme μ_z. Je zřejmé, že $\mu_z = \mu_1 - \mu_2$, a tudíž vlastně testujeme hypotézu:

$$\begin{aligned} &H_0 : \mu_z = c \\ &H_1 : \mu_z \neq c \quad (\text{nebo: } H_1 : \mu_z < c, \text{ nebo } H_1 : \mu_z > c). \end{aligned}$$

Nepřipomíná vám to něco? Tohle přeci umíme! Když ještě zavedeme dodatečný předpoklad, že výběr $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ pochází z normálního rozdělení $N(\mu_z, \sigma^2)$, kde σ^2 je nějaký neznámý rozptyl, tak můžeme přece použít jednovýběrový t-test! A to je přesně ono. Párový test není nic jiného, než jednovýběrový test aplikovaný na rozdíly.

Použijeme tedy starou známou testovou statistiku

$$T = \frac{\bar{Z} - c}{s}\sqrt{N}, \tag{1}$$

která má v případě, kdy H_0 platí (tj. $\mu_z = c$), t-rozdělení o $N-1$ stupních volnosti. Hodnota s ve jmenovateli opět představuje výběrovou směrodatnou odchylku vypočtenou ze $Z_1, \ldots, Z_N$ a $\bar{Z}$ je příslušný výběrový průměr.

Rozhodovací kritérium má opět starý známý tvar:

- Pro $H_1 : \mu_z \neq c$:

$$\boxed{\text{Je-li } |T| \geq qt_{N-1}(1 - \tfrac{\alpha}{2}), \text{ pak zamítáme } H_0.}$$

[1] Např. ptáme-li se, jestli mají dvojčata stejnou porodní váhu, tak $c = 0$

- Pro $H_1 : \mu_z < c$:

$$\boxed{\text{Je-li } T \leq -qt_{N-1}(1-\alpha), \text{ pak zamítáme } H_0.}$$

- Pro $H_1 : \mu_z > c$:

$$\boxed{\text{Je-li } T \geq qt_{N-1}(1-\alpha), \text{ pak zamítáme } H_0.}$$

kde qt_{N-1} značí kvantil t-rozdělení s $N-1$ stupni volnosti.

Poznámka 1 *Párový test se tedy používá v situaci, kdy máme na každém z N objektů/jedinců měřeny dvě veličiny. Objekty/jedince lze považovat za nezávislé, měření na témže objektu/jedinci nikoli.*

Poznámka 2 *Pokud nebude možné (např. na základě Shapiro-Wilkova testu) předpokládat, že výběr $Z_1, \ldots, Z_N$ pochází z normálního rozdělení, musíme místo jednovýběrového t-testu použít nějaký jednovýběrový pořadový/neparametrický test (např. jednovýběrový Wilcoxonův test nebo znaménkový test).*