

ANALÝZA STABILITY SVAHU POMOCÍ RANDOM FINITE ELEMENT METHOD

Mgr. Radek Suchomel

Univerzita Karlova v Praze

Mgr. David Mašín, MPhil., PhD.

Univerzita Karlova v Praze

Slope stability analysis using random finite element method

An approach to numerical modelling of geotechnical problems that takes into account natural spatial variability of soil properties is presented in the paper. Its application is demonstrated by means of simulation of an idealised slope stability problem. The influence of three main parameters – mean value, standard deviation and correlation length – is described. All simulations have been performed using a newly developed software *random field*. Comparison of obtained results with published data manifested that the software gives correct predictions.

1. ÚVOD

Pro analýzu stability svahu jsou v současné době v praxi používány dva typy metod. Jedná se o analytické metody založené na metodě mezní rovnováhy (např. metoda Pettersonova, Bishopova, Janbuova, Spencerova, Sarmova atd.) a numerické metody založené na metodě konečných prvků. V druhém případě je téměř výhradně používána tzv. metoda ϕ - c redukce. Pevnostní charakteristiky materiálu jsou postupně snižovány až do okamžiku kdy není možno nalézt rovnovážné řešení daného problému. Poměr skutečných pevnostních charakteristik a pevnostních charakteristik při porušení udává hledaný stupeň stability.

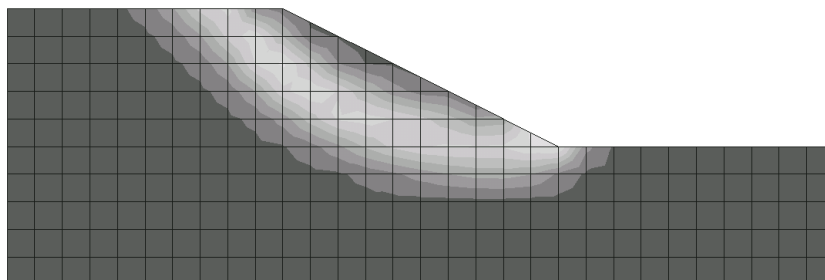
Jedna z nevýhod těchto metod tkví v tom, že studovaný svah je nutno rozdělit na kvazihomogenní celky, jež jsou charakterizovány konstantní hodnotou pevnostních charakteristik. Tento přístup je ovšem velmi zjednodušující, vzhledem k přirozené variabilitě geomateriálů a v nejistotě laboratorního stanovení parametrů. Podrobné studie (např. El-Ramly et al., 2006) ukazují, že pevnostní charakteristiky získané testováním většího počtu vzorků z jednoho “kvazihomogenního” celku vykazují rozptyl, jež lze výstižně popsat statistickými metodami (např. lognormálním rozdělením).

Tento poznatek je využíván pro analýzu geotechnických problémů pomocí tzv. random finite element method (*RFEM*) (např. Griffiths a Fenton, 2004). Popis této metody a její využití pro výpočet stability svahu je tématem tohoto příspěvku. Popis metody vychází z práce Giffithse a Fentona (2004), všechny prezentované analýzy byly provedeny pomocí *RFEM* programu *random field*, vyvinutého druhým autorem příspěvku, v kombinaci s programem pro metodu konečných prvků (MKP) *Tochnog*. Účelem studie prezentované v této práci bylo zhodnocení správné funkčnosti programu *random field* tak, aby mohl být během dalšího výzkumu využíván pro řešení skutečných geotechnických úloh.

2. REFERENČNÍ DETERMINISTICKÁ ÚLOHA

Statistické metody budou v příspěvku vysvětlovány na základě konkrétní typové geotechnické úlohy řešení stability homogenního svahu. Svah je 10 m široký a 5 m vysoký. Jeho geometrie, zvolená MKP diskretizace a smyková plocha získaná metodou ϕ - c redukce jsou zobrazeny na obr. 1. Ve výpočtu byla uvažována tíha zeminy $\gamma=20$ kN/m³, počáteční

rozdělení napětí odpovídající této tíže bylo generováno postupným zvyšováním tíhového zrychlení g . Pro popis materiálu je použit Mohr-Coulombův konstituční model, přičemž se uvažuje $\phi=\psi=0^\circ$ a jediným proměnným parametrem je soudržnost c . Stupni stability $FS=1$ odpovídá hodnota $c_l=16.9$ kPa, která je v souladu s výsledky získanými deterministickými metodami (Griffiths a Fenton, 2004). Studie vlivu hustoty sítě (Suchomel, 2007) prokázala, že zvolená diskretizace je dostatečná pro získání přesných výsledků.



Obr. 1: Použitá MKP síť a znázornění smykové plochy predikované deterministickou analýzou

3. METODA SINGLE RANDOM VARIABLE

Před popisem metody *random finite element* bude vysvětlena jednodušší pravděpodobnostní metoda *single random variable (SRV)*. Tato metoda uvažuje statistickou variabilitu vstupních parametrů výpočtu, není ovšem uvažována variabilita prostorová. V této práci je uvažováno log-normální rozdělení soudržnosti c , charakterizované střední hodnotou μ_c a směrodatnou odchylkou σ_c , z nichž vyplývá vztah pro medián $median_c$, střední hodnotu a směrodatnou odchylku odpovídajícího normálního rozdělení ($\mu_{\ln c}$ a $\sigma_{\ln c}$) a bezrozměrný koeficient variace V_c

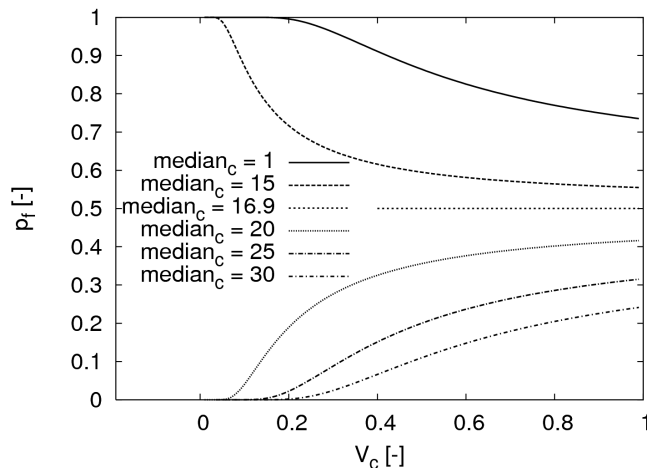
$$V_c = \frac{\sigma_c}{\mu_c} \quad (1)$$

Převodní vztahy mezi μ_c , σ_c , $median_c$, $\mu_{\ln c}$ a $\sigma_{\ln c}$ vyplývají ze základů počtu pravděpodobnosti a nejsou zde z důvodu omezeného prostoru uvedeny.

Metoda *single random variable* vychází z faktu, že pravděpodobnost daného jevu (v tomto případě pravděpodobnost porušení svahu p_f) je rovna pravděpodobnosti, že soudržnost c nabude hodnoty nižší než je limitní hodnota c_l , zjištěná v deterministické analýze (odst. 2). Pro daný případ tedy z formulace lognormálního rozdělení a Gaussovi funkce Φ vyplývá, že

$$p_f = p[c < c_l] = \Phi\left(\frac{\ln c_l - \mu_{\ln c}}{\sigma_{\ln c}}\right) \quad (2)$$

Na tomto místě je vhodné podotknout, že rovnice (2) může být vyhodnocena pouze na základě deterministické analýzy stability svahu (odst. 2) a znalosti statistického rozdělení vstupních dat bez nutnosti speciálních analýz MKP. Rovnice (2) je graficky znázorněna na obr. 2 pro rozdílné hodnoty $median_c$ a koeficientu variace V_c . Je zřejmé, že hodnota V_c významně ovlivňuje pravděpodobnost porušení (pozitivně pro $median_c < c_l$ a negativně pro $median_c > c_l$). Pouze limitní hodnota $median_c = c_l$ vede ke konstantní pravděpodobnosti $p_f=0.5$, nezávislé na hodnotě V_c .



Obr. 2: Závislost p_f na V_c pro různé hodnoty $median_c$ v metodě *single random variable* (jednotky $median_c$ v kPa)

4. METODA *RANDOM FINITE ELEMENT*

Metoda *single random variable* je metoda zjednodušená, která sice uvažuje statistickou variabilitu mechanických vlastností, neuvažuje ovšem vztah mezi vlastnostmi elementů zeminy a jejich vzájemnou pozicí v prostoru. Pro jeho zohlednění je nutno využít pokročilejší metodu *RFEM*.

Základem metody *RFEM* je opět statistické rozdělení vstupních dat, a dále předpoklad, že snižování vzdálenosti mezi pozicí dvou vzorků zeminy v zemním masivu zvyšuje pravděpodobnost, že tyto vzorky budou mít obdobné mechanické vlastnosti. Do analýzy vstupuje třetí proměnná charakterizující mechanické vlastnosti geologického prostředí (první dvě proměnné, μ_c a σ_c , jsou diskutované v odst. 2), a sice korelační délka θ_c . Prostorová závislost mechanických vlastností je popsána pomocí tzv. Markovovy korelační funkce

$$\rho = e^{-2\tau/\theta_c} \quad (3)$$

kde ρ je korelační koeficient a τ je vzdálenost mezi dvěma body v prostoru. Hodnota θ_c vyjadřuje vzdálenost mezi dvěma body, pro níž je korelační koeficient ρ roven 0.135, a pro níž je tedy vzájemná korelace mechanických vlastností již velmi malá.

Při včlenění prostorové variability vstupních parametrů do výpočtu je třeba mít na paměti, že statistické rozdělení parametrů odpovídá bodovému rozdělení mechanických vlastností. Při skutečném MKP výpočtu ovšem mají jednotlivé elementy sítě (jimž jsou přiřazovány mechanické vlastnosti) konečnou velikost, díky níž vzniká chyba, která musí být eliminována *lokálním zprůměrováním* mechanických vlastností pro danou velikost elementu. Je možno ukázat, že střední hodnota normálního rozdělení odpovídajícímu danému log-normálnímu rozdělení $\mu_{ln c}$ není lokálním průměrováním ovlivněna, je ovšem nutno modifikovat směrodatnou odchylku $\sigma_{ln c}$ tak, že směrodatná odchylka odpovídající dané MKP síti $\sigma_{ln cA}$ je vypočtena z bodové charakteristiky $\sigma_{ln c}$ pomocí

$$y = \left(\frac{\sigma_{ln cA}}{\sigma_{ln c}} \right)^2$$

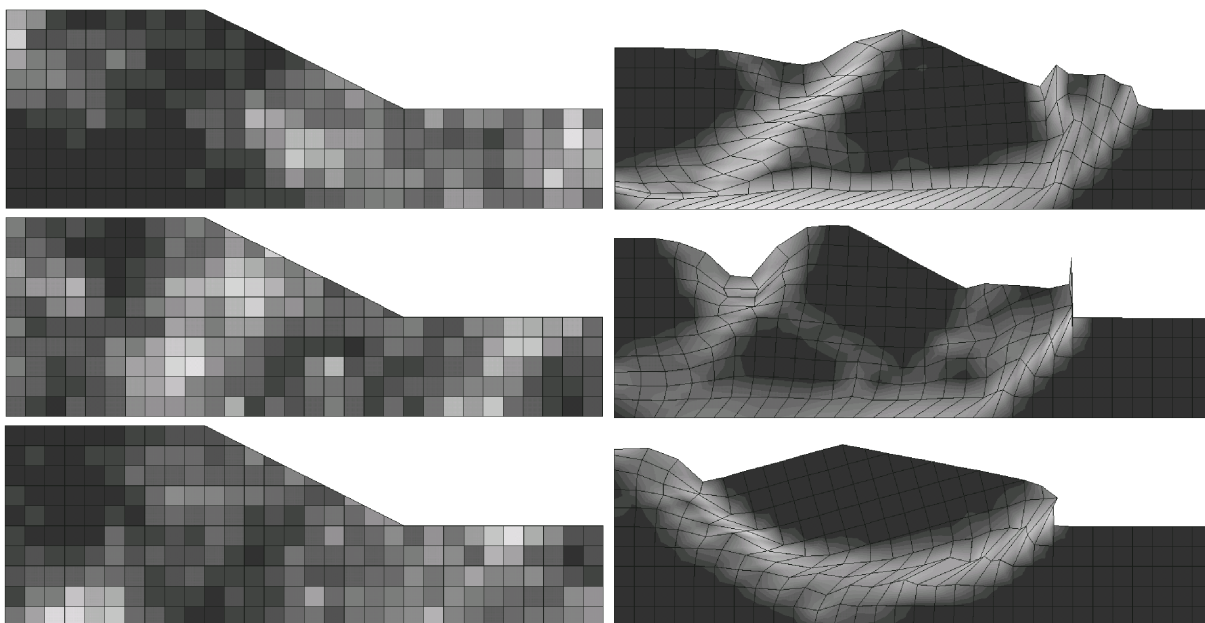
kde γ je faktor redukce směrodatné odchylky vyplývající z integrace Markovovy korelační funkce (rovnice (3)) přes plochu elementu.

Metoda *RFEM* neumožňuje, na rozdíl od metody *SRV*, analytické vyhodnocení výsledků. Vyhodnocení pravděpodobnosti daného jevu (v našem případě pravděpodobnosti porušení svahu) je prováděno metodou Monte Carlo. Každá realizace této metody sestává z náhodného generování mechanických vlastností odpovídající danému statistickému rozdělení (v našem případě μ_c , σ_c a θ_c), jejich mapování na MKP síť a MKP výpočet. Metoda Monte Carlo vyžaduje pro přesný výpočet mnoho realizací, nutný počet realizací se navíc zvyšuje se zvyšováním koeficientu V_c .

5. APLIKACE *RFEM* PRO ŘEŠENÍ STABILITY SVAHU

Při řešení stability svahu není v tomto příspěvku vyhodnocován stupeň stability svahu během každé realizace Monte Carlo metody, pravděpodobnost porušení p_f je dána poměrem počtu analýz, pro něž je $FS < 1$, k celkovému počtu realizací. Během každé realizace metody Monte Carlo je postupně zvyšováno tíhové zrychlení až do hodnoty $g=10 \text{ kN/m}^3$. Pokud je dosaženo tohoto g při zachování konvergence MKP výpočtu, je svah pro danou realizaci považován za stabilní. Počet realizací metody Monte Carlo pro jeden výpočet je v této práci stanoven na 500. Parametrická studie (Suchomel, 2007) prokázala, že tento počet je dostatečný pro získání dostatečně přesného výsledku, a zároveň vede k rozumným výpočtovým časům (cca 1 týden pro jednu Monte Carlo analýzu).

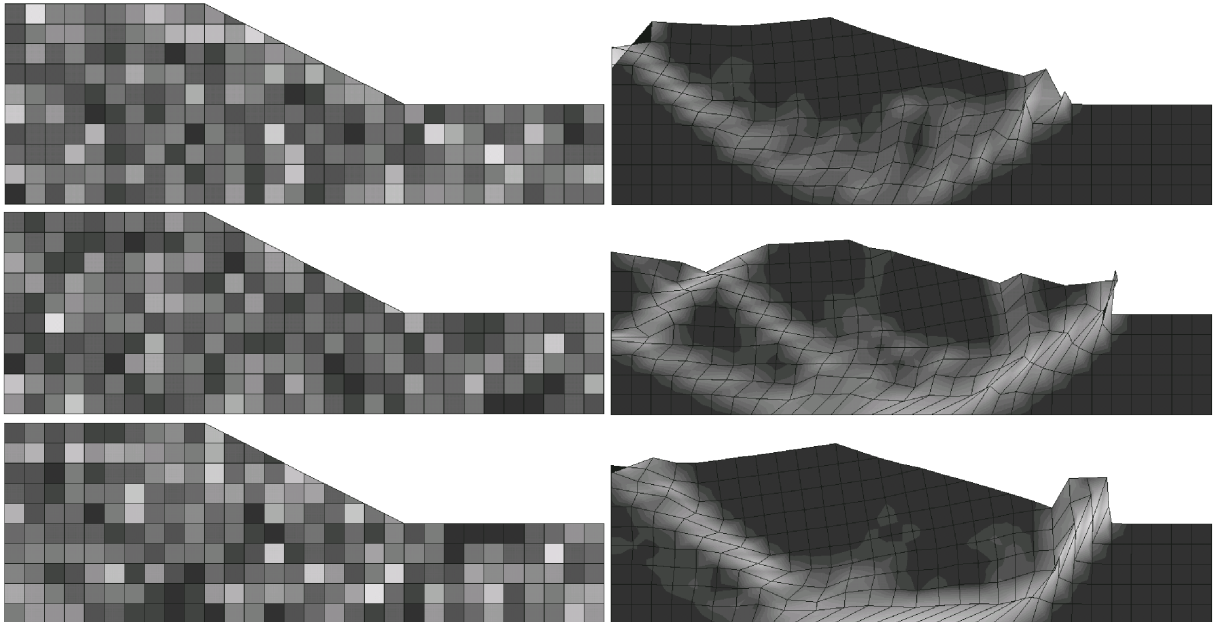
Před kvantitativním zhodnocením výsledků budou předpovědi *RFEM* demonstrovány z kvalitativního hlediska. Obr. 3 ukazuje velikost soudržnosti c (levý sloupec, tmavší barva znamená menší soudržnost) a deformovanou síť se znázorněním velikosti plastických přetvoření (pravý sloupec, světlejší barva znamená větší plastická přetvoření) pro tři náhodně vybrané realizace metody Monte Carlo pro korelační délku $\theta_c=10 \text{ m}$. Na obr. 4 jsou pak obdobné výsledky pro $\theta_c=1 \text{ m}$.



Obr. 3: velikost c (levý sloupec, tmavší barva znamená menší soudržnost) a velikost plastických přetvoření (pravý sloupec) pro $\theta_c=10 \text{ m}$.

Z obr. 3 je zřejmé, že vyšší korelační délka $\theta_c=10 \text{ m}$ má podle očekávání za následek „shlukování“ elementů s obdobnými materiálovými vlastnostmi. Oproti tomu korelační délka

$\theta_c=1$ m (obr. 4), která je shodná s velikostí elementu, vede k víceméně náhodnému uspořádání materiálových vlastností. Tomu odpovídá i průběh předpovězených smykových zón. V prvním případě smykové zóny zřetelně „sledují“ oblasti s nižší soudržností, což vede k různým tvarům smykových zón pro různé realizace metody Monte Carlo. V druhém případě, kdy je svah z globálního hlediska více homogenní, jsou i vypočtené tvary smykových zón kvalitativně obdobné.

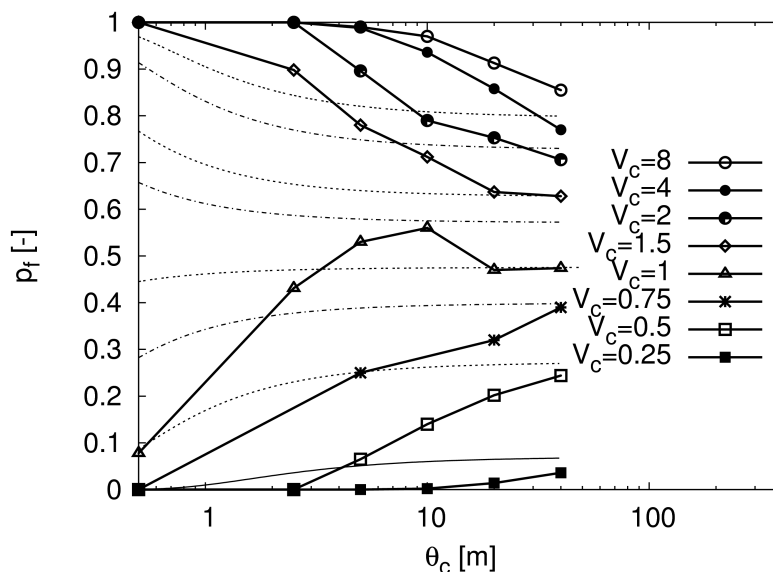


Obr. 4: velikost c (levý sloupec, tmavší barva znamená menší soudržnost) a velikost plastických přetvoření (pravý sloupec) pro $\theta_c=1$ m.

Z kvalitativního porovnání výsledků na obr. 3 a 4 je zřejmé, že pravděpodobnost porušení bude záviset na korelační délce θ_c . Evidentně, pro $\theta_c \rightarrow \infty$ budou výsledky konvergovat k výsledkům získaným analyticky pomocí metody *SRV*. Obr. 5 ukazuje výsledky získané pomocí *RFEM* pro svah z odst. 2. V analýzách byla fixována střední hodnota soudržnosti $\mu_c = 25$ kPa (hodnota je tedy vyšší než $c_f=16.9$ kPa), měněna byla korelační délka θ_c a koeficient variace V_c . Výsledky jsou porovnány s předpovědi metody *SRV*, přičemž vliv θ_c je u *SRV* metody zohledněn jen pomocí lokálního zprůměrování diskutovaného v odst. 4.

Z obr. 5 je zřejmé, že výsledky pomocí metody *RFEM* konvergují pro vysoké korelační délky k výsledkům *SRV*. Nicméně, pro nízké korelační délky se výsledky výrazněji odlišují. Pro $V_c < V_{c \text{ lim}}$, kde $V_{c \text{ lim}}$ je limitní hodnota korelačního koeficientu pro níž $p_f = 0.5$ (v našem případě $V_{c \text{ lim}} = 1.095$), je pravděpodobnost porušení vyšší než u metody *SRV*. Je to způsobeno tím, že u *RFEM* metody může smyková zóna „hledat“ cestu oblastmi s nižšími hodnotami soudržnosti c , jak je zřejmé z obr. 3. Obdobný jev způsobuje, že pro $V_c > V_{c \text{ lim}}$, je p_f predikovaná *RFEM* nižší, než p_f zjištěná pomocí *SRV* (v tomto případě tvoří elementy s nižší hodnotou soudržnosti izolované oblasti uvnitř elementů s vyšší c a nemohou tedy snadno ovlivňovat pravděpodobnost porušení). V jediném případě ($V_c = 1$) dává *RFEM* metoda nekonzistentní výsledky. To je způsobeno tím, že $V_c = 1$ je poblíž limitní hodnoty $V_{c \text{ lim}}$, kde chyby způsobené numerickými nepřesnostmi výrazně ovlivní vypočtené výsledky.

Výsledky na obr. 5 velmi dobře souhlasí s výsledky prezentovanými pro stejný problém Giffithsem a Fentonem (2004), což dokazuje správnou funkčnost použitého software *random field* a umožňuje jeho využití v dalším výzkumu.



Obr. 5: Závislost p_f na θ_c pro různé hodnoty V_c při $\mu_c=25$ kPa. Výsledky RFEM porovnány s lokálně zprůměrovanými hodnotami pomocí SRV (tenké linie, pořadí hodnot V_c odpovídá legendě).

6. ZÁVĚR

Předkládaná práce měla za cíl seznámit odbornou veřejnost s relativně moderním přístupem k numerickému modelování geotechnických problémů, jež bere v potaz přirozenou variabilitu mechanických vlastností geomateriálů. Na základě jednoduchého typového problému stability svahu, pro nějž jsou známy výsledky metody *RFEM* (Griffiths a Fenton, 2004), byla dále ověřena správná funkčnost softwaru *random field*, vyvinutého na oddělení inženýrské geologie PŘFUK, Praha.

Další výzkum se bude soustřeďovat na modifikaci tohoto programu tak, aby metoda vystihovala s větší přesností skutečné vlastnosti geomateriálů, v první řadě pak anizotropní prostorovou korelaci materiálových parametrů, jež lépe vystihuje vlastnosti horizontálně zvrstveného geologického prostředí. V dalších fázích výzkumu bude metoda *RFEM* aplikována na řešení skutečných geotechnických problémů a budou studovány její výhody a nevýhody v porovnání se standardními deterministickými postupy.

PODĚKOVÁNÍ

Autoři děkují za finanční podporu projektu grantu GAAV IAA200710605 a MSM 0021620855.

LITERATURA

- El-Ramly, H., Morgerstern, N. R. a Cruden, D. M. (2006) Lodalen slide: a probabilistic assesment. *Canadian Geotechnical Journal* 43, No. 9, 956-968.
- Griffiths, D. V. a Fenton, G. A. (2004) Probabilistic slope stability analysis by finite elements. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 130, 507–518.
- Suchomel, R. (2007) Využití pravděpodobnostních metod v numerické analýze geotechnických problémů. Diplomová práce, PŘFUK, Praha.