

Topologická kostra

Medial Axis. Straight Skeleton. Metody konstrukce. Praktické použití.

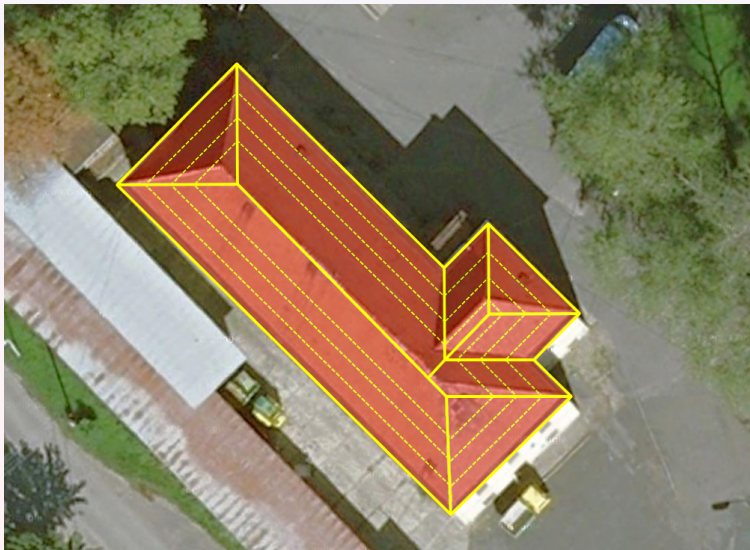
Tomáš Bayer | bayertom@natur.cuni.cz

Katedra aplikované geoinformatiky a kartografie. Přírodovědecká fakulta UK.

Obsah přednášky

- 1 Ukázka použití
- 2 Formulace problému
- 3 Medial Axis
 - Zobecněný Voronoi diagram
- 4 Straight skeleton
- 5 Linear Axis
- 6 Chordal Axis
- 7 Použití skeletonu

1. Rekonstrukce tvaru střechy



2. Formulace problému

Dáno: Uzavřený, ohraničený region P v \mathbb{R}^2 .

Hledáme: Topologická kostra P .

Topologická kostra (tzv. skeleton), výsledek procesu zvaného *skeletonizace*.

Skeletonizace provádí dekompozici P na 1D entity (linie, křivky).

Cílem zjednodušení tvaru P při zachování její tvarové charakteristiky (redukce množství informace).

Diskrétní varianta skeletonu:

Hranici P tvoří uzavřená lomená čára tvořená n vrcholy p_i .

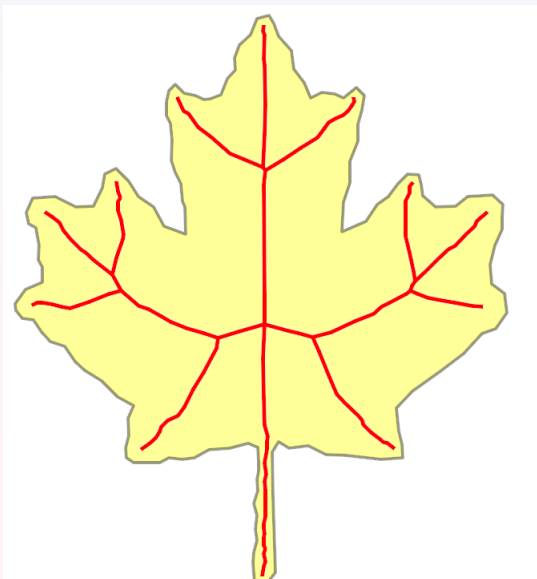
Použití diskrétní varianty skeletonu reprezentované posloupností úseček.

Výhodné pro geoinformatiku, snadnější výpočty.

Typy skeletonů:

- Medial Axis.
- Straight Skeleton.
- Linear Axis
- Chordal Axis (Příčky trojúhelníků DT).

3. Ukázka Medial Axis



4. Medial Axis

tzv. střední osa, (Blum 1967).

Analogie střední osy v přírodě: vypalování trávy v nějaké oblasti P .

Formální definice vycházejí z pojmu maximální disk (resp. maximální kruh).

Definice 1:

Medial Axis je množina všech bodů, které mají nejméně dva nejbližší body na hranici P .

Definice 2:

Množina středů všech vnitřních maximálních disků k množiny P .

Maximální kruh:

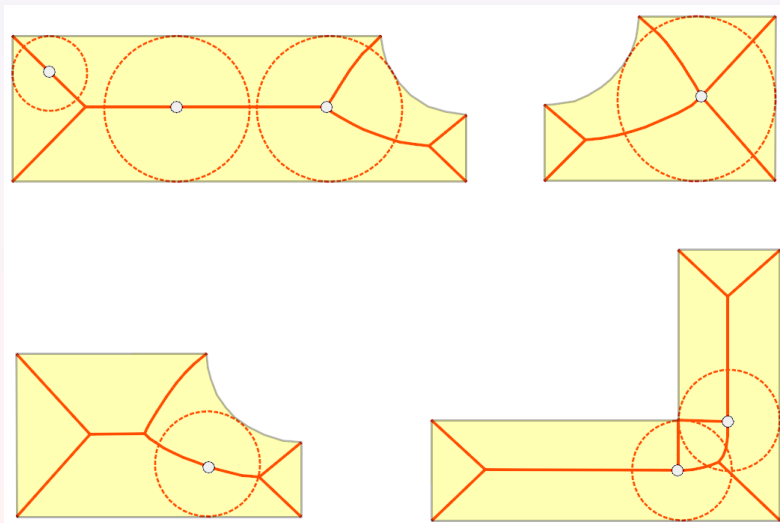
Nechť $k(S, r)$ je maximální kruh vepsaný do oblasti Q tak, že:

- $k(S, r)$ tečný k P ve dvou a více bodech p_i .
- $k(S, r)$ neobsahuje žádné další body P_i .

Pro oblast P existuje nekonečně mnoho různých k .

Množina všech středů S při translaci k po P tvoří Medial Axis.

5. Ukázky Medial Axis



6. Medial Axis Transformation

Medial Axis M množiny P označena jako $M(P)$.

Definice 3:

$M(P)$ představuje množinu bodů q , pro které existují nejméně 2 různé body p_i, p_j na hranici P takové, že:

- vzdálenost $d(q, p_i) = d(q, p_j)$,
- $d(q, p_i), d(q, p_j)$ minimálními vzdálenostmi mezi bodem q a hranicí P ,

$$M(P) = \{q \mid \|q - p_i\| = \|q - p_j\| = \min_p \{\|q - p\|\}, p_i \neq p_j, p_i, p_j \in \partial P, p \in \partial P\}.$$

Bod q je označován jako bod skeletonu $M(P)$.

Medial Axis Transformation: transformace $P \Rightarrow M(P)$.

Poloměr maximálního kruhu

$$R(q) = \min_p \{\|q - p\| \mid p \in \partial P, q \in M(P)\}.$$

Střední osa množina obecných křivek.

Pro diskrétní množiny tvořena parabolami.

7. Zobecněný Voronoi diagram

Generátory mohou být i 1D/2D entity:

- linie,
- kruhové oblouky,
- uzavřené oblasti.

Důsledek:

Takové $\mathcal{V}(p_i)$ nemusejí být konvexní, hranice buněk obecné křivky.

Množina generátorů $L = \{L_1, \dots, L_n\}$:

- L_i bodový, liový nebo plošný generátor.
- Generátory se vzájemně neprotínají.

Voronoi diagramy generované L

$$\mathcal{V}(L, d) = \{\mathcal{V}(L_1), \dots, \mathcal{V}(L_n)\},$$

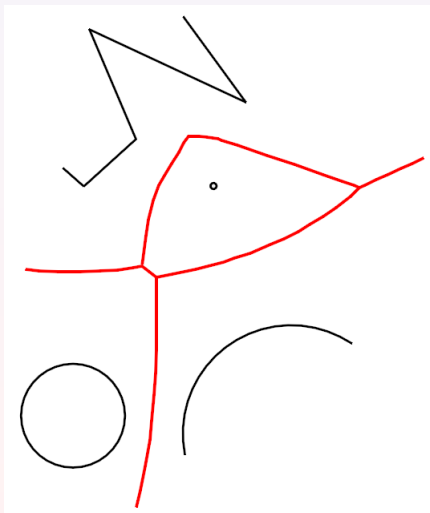
$d(q, L_i)$ vzdálenost mezi q a L_i (vzdálenost bodu od liového segmentu).

Medial Axis $M(P)$ úzce souvisí s $\mathcal{V}(L, d)$:

Podmnožina (podgraf) $\mathcal{V}(L, d)$.

8. Ukázka $\mathcal{V}(L, d)$

Okabe et al, 2000.



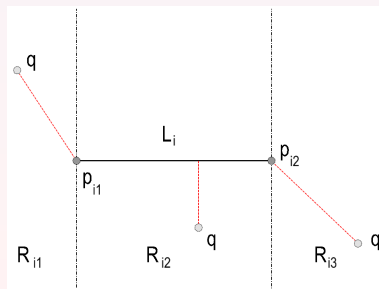
8. Voroného diagramy $\mathcal{V}(L, d)$

$L_i \in L$ představuje bod či liniový segment.

Koncové body linie L_i označeny jako $p_{i,1}$ a $p_{i,2}$.

$$d(q, L_i) = \begin{cases} \|q - p_{i,1}\|, & p \in R_{i,1}, \\ \|q - p_{i,2}\|, & p \in R_{i,2}, \\ \left\| (q - p_{i,1}) - \frac{(q - p_{i,1})(p_{i,2} - p_{i,1})}{\|p_{i,2} - p_{i,1}\|} (p_{i,2} - p_{i,1}) \right\|, & p \in R_{i,3} = \mathbb{R}^2 \setminus [R_{i,1} \cup R_{i,2}]. \end{cases}$$

Jaký tvar budou mít bisektory různých $L_i, L_j \in L$?

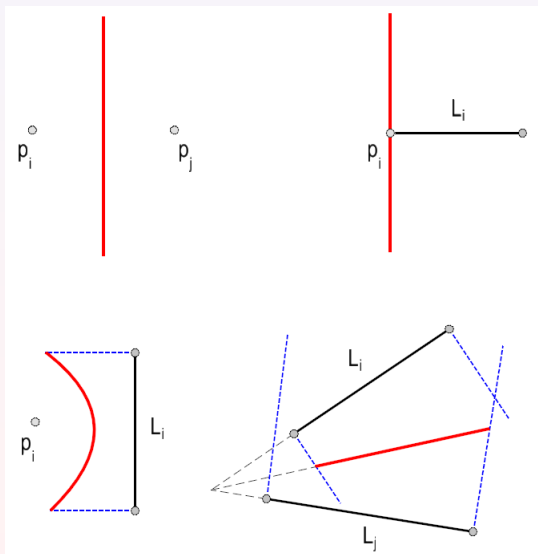


9. Tvary bisektorů

Existují 4 typy bisektorů v závislosti generátorech:

- *Typ 1:*
Generátory p_i, p_j jsou body: bisektorem přímka kolmá (p_i, p_j) .
- *Typ 2:*
Generátorem bod p_{i1} a úsečka L_i , kde $p_{i1} \in L_i$: bisektorem přímka kolmá L_i procházející bodem p_{i1} .
- *Typ 3:*
Generátorem bod p_{i1} a úsečka L_i , kde $p_{i1} \notin L_i$: bisektorem parabola.
- *Typ 4:*
Generáty L_i, L_j tvořeny úsečkami: bisektorem osa úhlu.

10. Ilustrace tvarů bisektorů

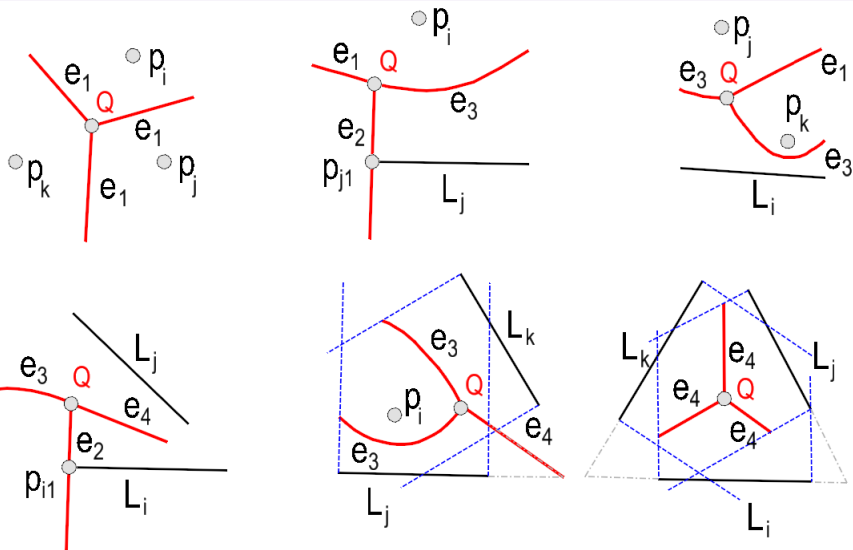


11. Typy vrcholů P

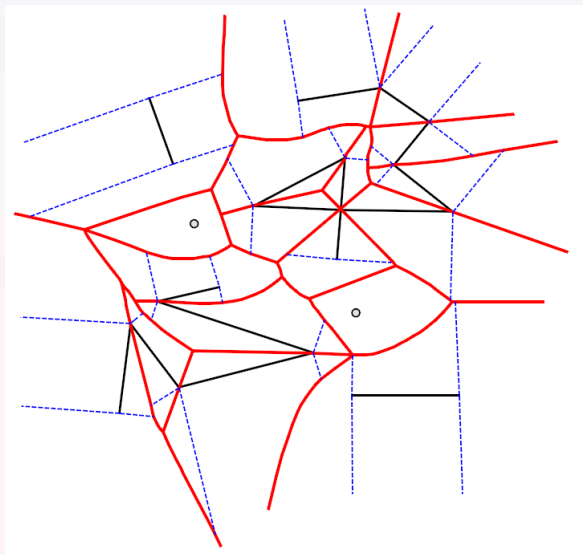
Existují 4 typy bisektorů v závislosti generátorů.

- *Typ 1:*
3 bodové generátory p_i, p_j, p_k , trojice hran je typu 1.
- *Typ 2:*
Generátory vrcholu P představují bod p_i , úsečka L_j a bod $p_{j1} \in L_j$. Hrany jsou typu 1,2,3.
- *Typ 3:*
Generátory vrcholu P představují úsečka L_i a dva body $p_j, p_k \notin L_i$. Hrany jsou typu 1,3.
- *Typ 4:*
Generátory vrcholu P představují úsečky L_i, L_j a bodem $p_{ij} \in L_i$. Hrany jsou typu 2,3,4.
- *Typ 5:*
Generátory vrcholu P představují bod p_i a dvě úsečky $L_j, L_k, p_i \notin L_j, p_i \notin L_k$. Hrany jsou typu 3,4.
- *Typ 6:*
Generátory vrcholu P představují tři úsečky $L_i, L_j, L_k, p_i \notin L_j, p_i \notin L_k$. Hrany jsou typu 4.

12. Ukázka typů vrcholů P



13. Ukázka $\mathcal{V}(L, d)$ s bodovými a liniovými generátory

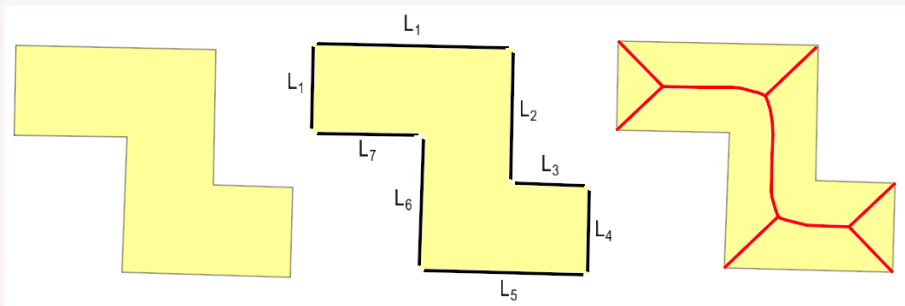


14. Souvislost Medial Axis a Voronoi diagramu

Generátorů tvořeny segmenty na hranici oblasti P : $L = \partial P$.
 $\mathcal{V}(L, d)$ je Voronoi diagram nad množinou P s generátory L .

Medial Axis $M(P)$ tvořena podmnožinou $\mathcal{V}(L, d)$.
 Z $\mathcal{V}(L, d)$ odstraněny hrany ležící vně P

$$M(P) = \mathcal{V}(L, d) \ominus h(\mathcal{V}(L, d)) \notin P.$$



15. Medial Axis a její konstrukce

Metody konstrukce Medial Axis lze rozdělit do tří skupin:

- *Exaktní metody*
Konstrukce s využívající definici $M(P)$ jako posloupnosti parabolických oblouků.
- *Voronoi diagram*
Bodový VD (diskrétní aproximace) či liniový VD (exaktní konstrukce).
- *Vzdálenostní metody*
Dekompozice P na konvexní podoblasti, hledány konvexní oblasti protnuté $M(P)$.
- *Iterační metody*
Využití energetických splinů.

Pokud je hranicí P křivka, pak P vzorkována mnohoúhelníkem P' .

Následně konstruována $M(P')$.

Výsledkem diskrétní varianta Medial Axis.

Většina algoritmů poměrně komplikovaná.

16. Konstrukce Medial Axis aproximací $\mathcal{V}(L, d)$

Vychází ze souvislosti $M(P)$ a $\mathcal{V}(L, d)$.

Exaktní konstrukce $\mathcal{V}(L, d)$ však poměrně složitá.

Algoritmus provádí diskrétní aproximaci.

Princip konstrukce:

- Vytvořena pomocná množina generátorů Ω .
- Každý liniový generátor L_i vzorkován bodovými generátory $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^k$.

Důsledek:

$\mathcal{V}(L, d)$ s liniovými generátory aproximován Voronoi diagramem $\mathcal{V}(P \oplus \Omega)$ s bodovými generátory.

Pokud

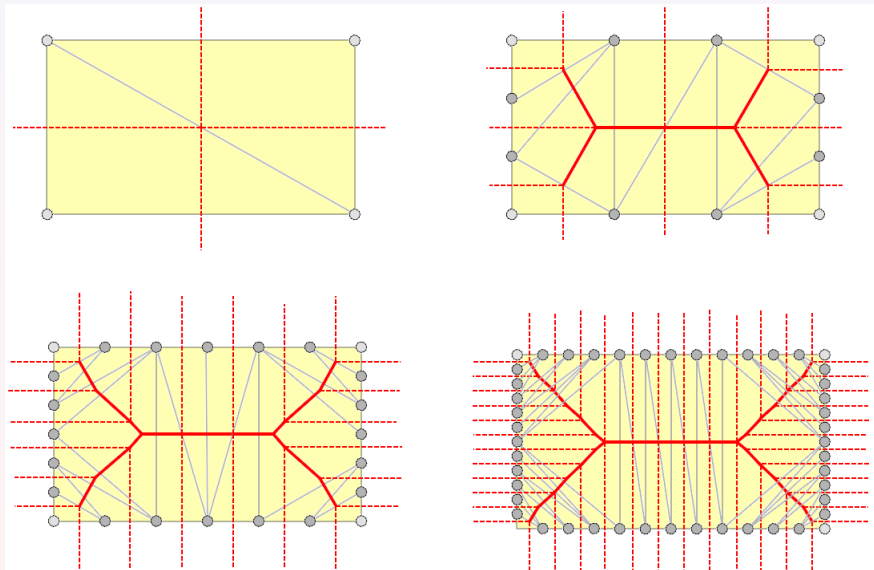
$$\|\omega_i - \omega_j\| \rightarrow 0,$$

pak

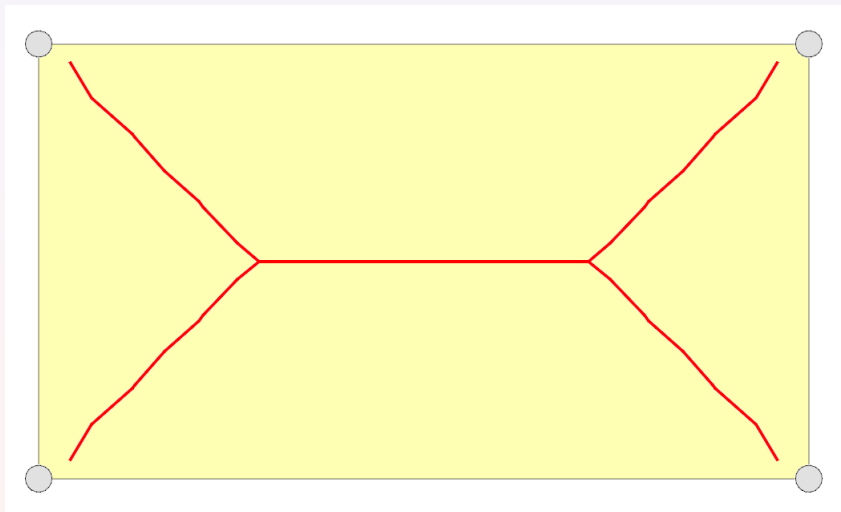
$$\mathcal{V}(P \oplus \Omega) \rightarrow \mathcal{V}(L, d).$$

Následně z $\mathcal{V}(P \oplus \Omega)$ odstraněny hrany ležící vně P .

17. Konstrukce Medial Axis aproximací $\mathcal{V}(L, d)$



18. Výsledek diskrétní aproximace



19. Nevýhody diskrétní aproximace

Nedořešená topologie.

Aproximovaná MA neprochází vrcholy.

Jestliže Ω není dostatečně hustá, tvar MA přibližný.

Časté oscilace, postihuje přímé segmenty.

Zlepšení tvaru diskrétní aproximace:

Vzorkování s konstantním krokem.

Hustota závisí na délce vzorkovaného segmentu

$$\|\omega_i - \omega_j\| = \frac{\|L\|}{k}.$$

Aproximace MA tvarově přijatelná až pro množiny bodů s velkou hustotou.

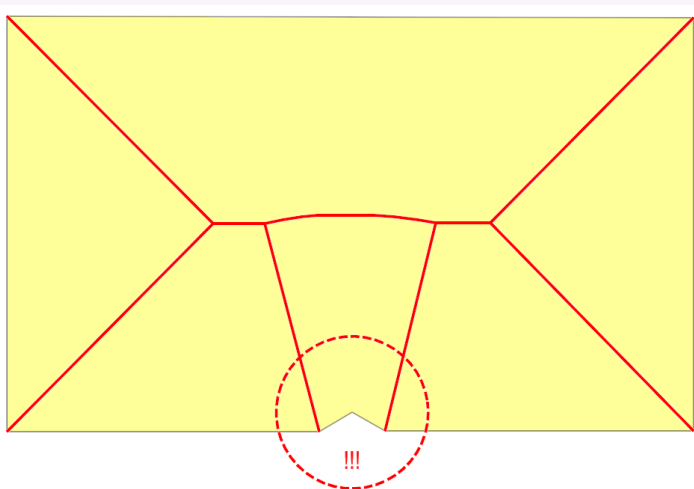
Množina Ω může být výrazně větší než P (Pozor !)

Pro velká n nárůst času nutného pro konstrukci $V(P \oplus \Omega)$.

Proto dáváme přednost exaktní konstrukci.

20. Citlivost Medial Axis

Značná citlivost $M(P)$ vůči oscilacím bodů vstupní množiny P .
Malá odchylka v poloze bodu vyvolá velkou změnu tvaru Medial Axis.



21. Vlastnosti Straight Skeletonu

Aichholzer et al, 1997.

Konvexní útvary: Straight Skeleton \equiv Medial Axis.

Odstranění nevýhod Medial Axis:

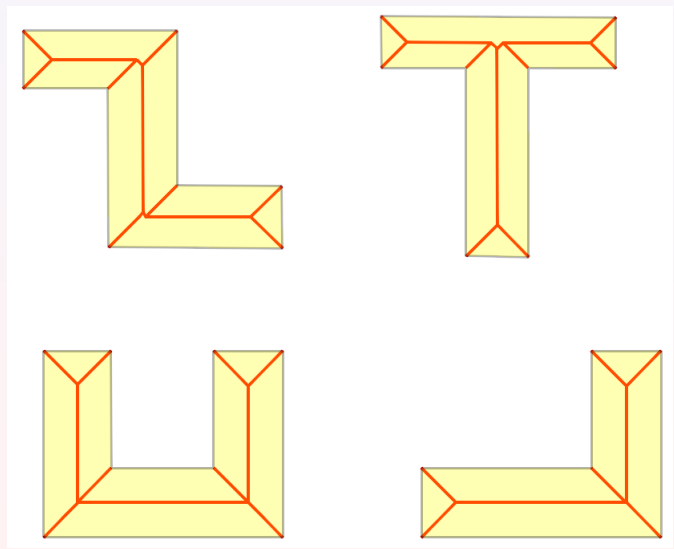
- menší citlivost tvaru vůči šumu.
- topologická kostra tvořena pouze liniovými prvky.
- menší výpočetní složitost

Medial Axis, která je definována s využitím Voronoi diagramů.
Straight Skeleton definován s využitím smršťovacího procesu.

Straight Skeleton pro řadu aplikací v geoinformatice vhodnější.
Vnímán jako snadněji konstruovatelná náhrada Medial Axis.

První algoritmus konstrukce Straight Skeletonu: Felkel & Obdržálek, 1997 (ČVUT).

22. Ukázka Straight Skeletonu



23. Straight Skeleton

Straight Skeleton S uzavřené a ohraničené množiny P označovaný jako $S(P)$.

Definice:

$S(P)$ tvořen sjednocením částí všech bisektorů b_i incidujících stran e_i, e_j množiny P .

Smršťovací proces:

Pro konstrukci Straight skeletonu používán “fyzikální” model.

- Sesouváním strany e oblasti P rychlostí v dovnitř.
- Délky stran zmenšují.
- Vrcholy P se pohybují po bisektorech b incidujících stran a tvoří $S(P)$.

Segmenty skeletonu tvoří ABN (Angular Bisector Network).

Postup připomíná opakované ořezávání P .

P se sesouvá sama sebe tak dlouho, dokud $A(P) \neq 0$.

Při smršťování P dochází ke dvojici událostí (Events):

- Edge Event.
- Split Event.

Později přidán Vertex Event.

24. Edge Event a Split Event

Sesouvání hran probíhá s konstantní rychlostí.

Pořadí vzniku událostí závisí na vzdálenosti průsečíku sousedních bisektorů od generující hrany.

Reprezentace prioritní frontou.

- **Edge Event**

$\|e\| \rightarrow 0$, strana zaniká.

Tento bod se stává novým uzlem $S(P)$ stupně 3.

Počet stran oblasti P se sníží o jednu.

Vznikne nová dvojice sousedících stran e_i, e_j .

- **Split Event**

Posunující se vrchol p rozdělí protilehlou hranu e v bodě q .

Vznik dvou nových hran e_1, e_2 .

P rozdělena na dvě podoblasti P_1, P_2 .

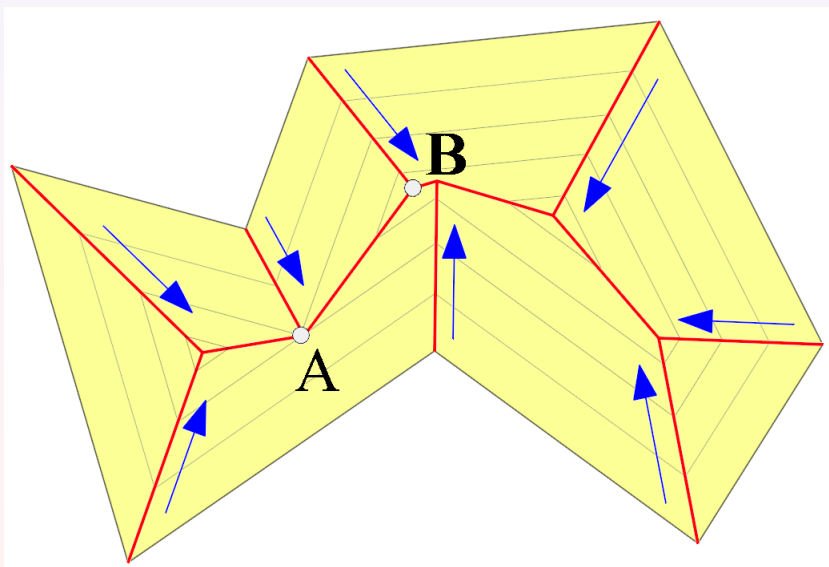
$$\{P = P_1 \cup P_2 \mid P_1 \cap P_2 = q \mid e_1 \in P_1 \mid e_2 \in P_2\}$$

Bod q novým uzlem $S(P)$.

Každá z podoblastí P_1, P_2 zpracovávána analogicky jako P .

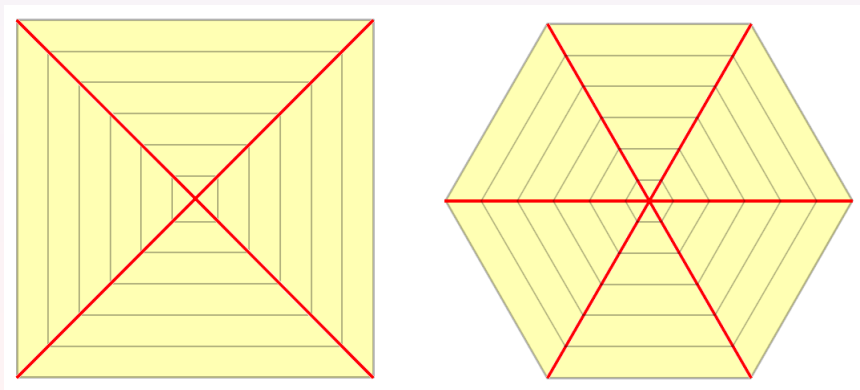
Rekurzivní řešení problému.

25. Illustrate Edge Event a Split Event



26. Degenerovaný Straight skeleton

Pokud vrcholy P leží na kružnici, je $S(P)$ je degenerovaný.
Obsahuje uzly vyšších stupňů.



27. Další vlastnosti Straight Skeletonu

$S(P)$ provádí dekompozici P na n monotónních polygonů
Na rozdíl od $\mathcal{V}(p)$ mohou být nekonvexní.

Bisektor b je průsečnicí dvojice polorovin definovaných hranami e, e' .

Vztah mezi počtem počtem bodů a počtem vrcholů $S(P)$:

Počet reflexních (tj. nekonvexních) vrcholů n_r v P

Počet segmentů skeletonu n_s

$$n_s(M(P)) = 2n - 3 + n_r,$$

$$n_s(S(P)) = 2n - 3.$$

Platí pro nedegenerované skeletony.

Pro nekonvexní P je $S(P)$ tvořen menším počtem segmentů než $M(P)$.

Grafová reprezentace $S(P)$:

$S(P)$ představuje binární strom tvořený $n - 2$ uzly a $2n - 3$ hranami.

Platí pro nedegenerovaný SS.

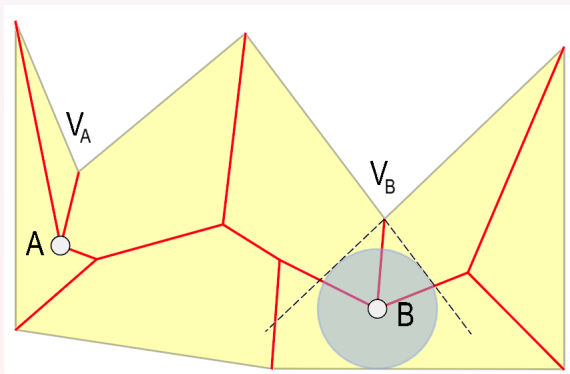
28. Princip Split Event

Událost Split Event způsobena přítomností reflexního vrcholu.

Vykytuje se pouze u P s nekonvexním vrcholem.

Přítomnost reflexního vrcholu automaticky nezaručuje vznik Split Event.

V bodě A dochází k Edge Event, v bodě B ke Split Event.



29 Vertex Event

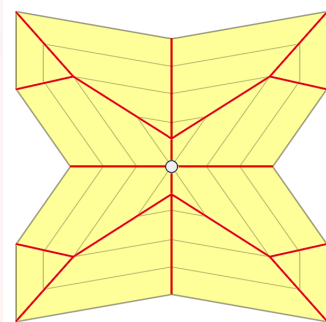
Při Split Event vrchol smršťující se strany může protnout vrchol protilehlé strany.

V původním algoritmu tento event neřešen, chybné výsledky.

Protilehlá hrana není rozdělena na dvě nové hrany.

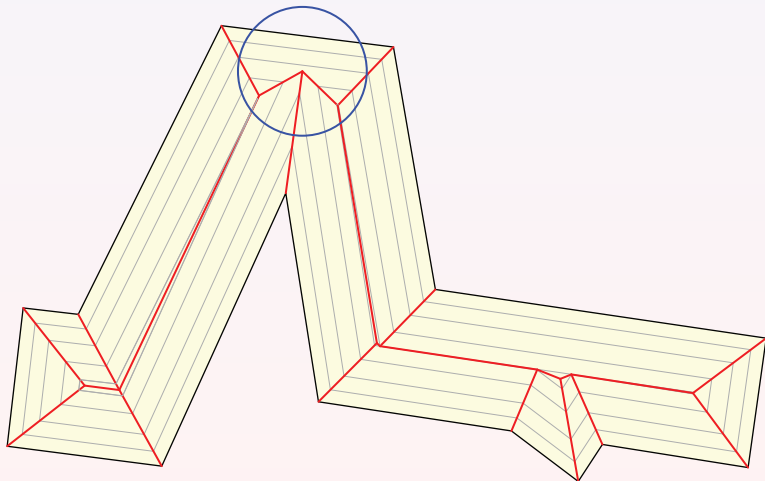
Avšak P rozdělena na dvě podoblasti P_1, P_2 .

Tato událost nazvána *Vertex Event* (Cacciola, 2004).

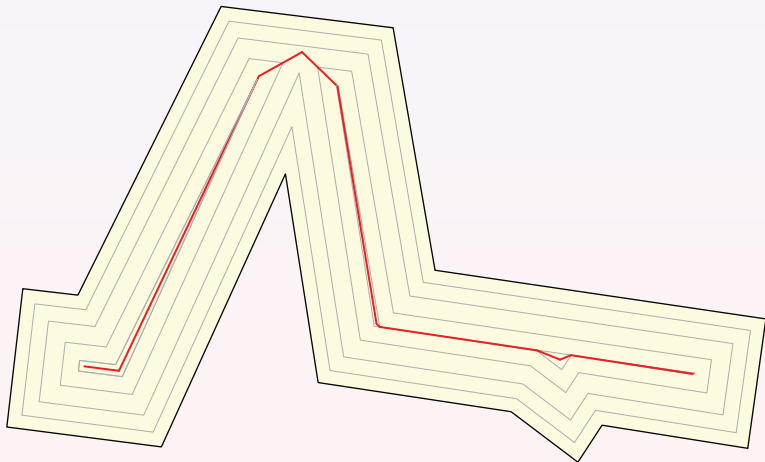


30. Reflexní vrchol, vliv na tvar skeletonu

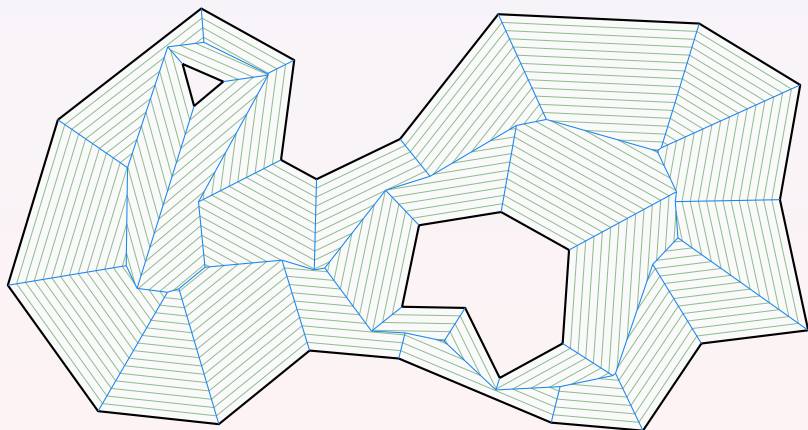
Přítomnost reflexního vrcholu má negativní vliv na tvar skeletonu.
Výrazné odchylení od Medial Axis (nevede středem).



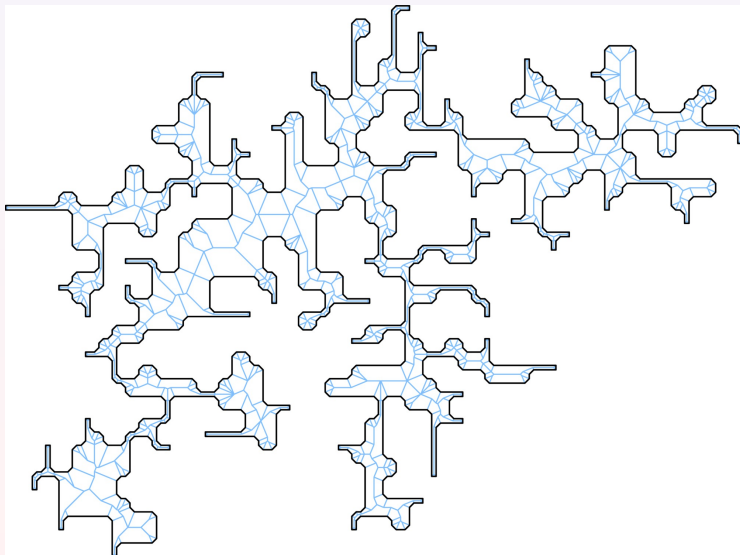
31. Reflexní vrchol, vnitřní segmenty



32. Straight skeleton, nekonvexní oblast



33. Straight skeleton, speciální oblasti



34. Linear Axis

Veltkamp & Tanase, 2004.

Vylepšení nevhodných vlastností Straight Skeletonu u reflexních vrcholů.

Straight Skeleton se odchyluje od Medial axis.

Úprava jeho tvaru, aby byl v těchto místech podobný Medial Axis.

Zpomalení posunů reflexních vrcholů.

Hidden Edges:

Každý reflexní vrchol nahrazen k blízkými (lze chápat jako duplicitní).

Vznikají velmi krátké segmenty, tzv. Hidden Edges.

V praxi postačují 2-3 Hidden Edges.

Algoritmus přidání netriviální.

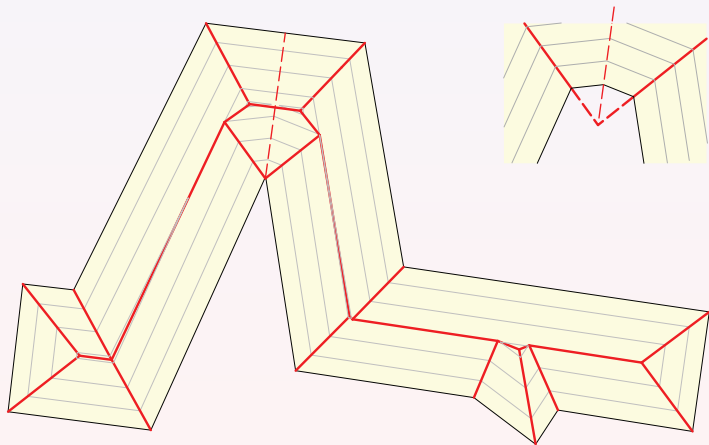
Následně ignorovány bisektory reflexních vrcholů.

Lineax Axis topologicky ekvivalentní s Medial Axis + tvarově podobná.

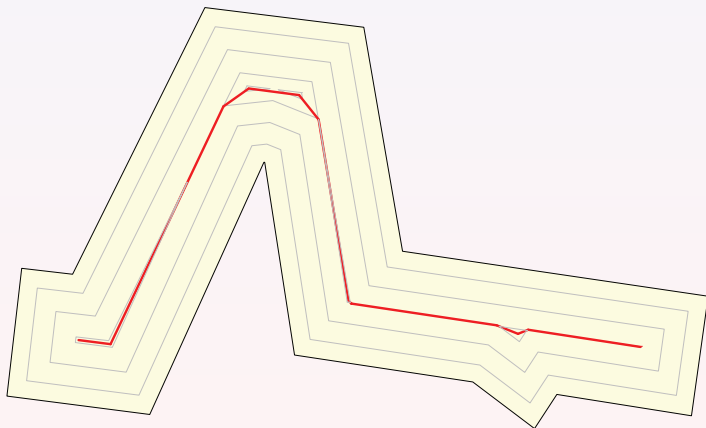
Tvarově nejvhodnější skeleton.

Avšak komplikovaná konstrukce.

35. Ukázka Linear Axis



36. Ukázka Linear Axis, vnitřní segmenty

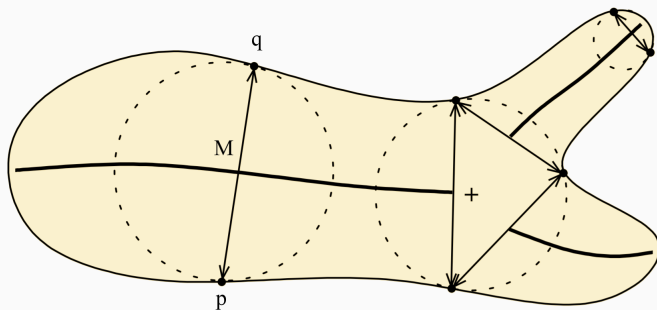


37. Chordal Axis

Využívá pojmu Maximum Ball (Prasad, 1997).

Maximum Ball.

Maximální kruh $K(S, r)$ vepsaný oblasti se jí dotýká ve 2 bodech p, q .
Spojnice p, q tvoří sečnu (chord), středový bod M .



+ Snadná konstrukce.

- Pro kvalitní aproximaci nutno upsamplovat hranici oblasti.

- Častěji osciluje.

38. Diskrétní varianta Chordal Axis

Využívá Constrained Delaunay triangulaci.

Delaunay \triangle tvořen vrcholy p_i, p_j, p_k .

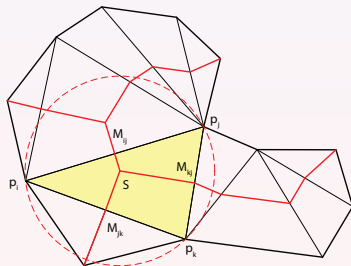
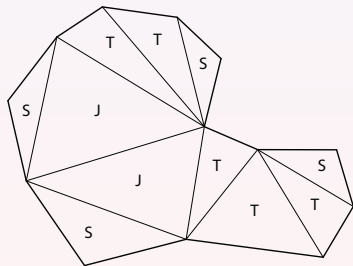
Kružnice $k(S, r)$ opsaná \triangle .

Vnější hrana trojúhelníku h_{out} :

Totožná s hranicí oblasti, spojnice 2 následujících vrcholů p_i, p_{i+1} .

Vnitřní hrana trojúhelníku h_{in} :

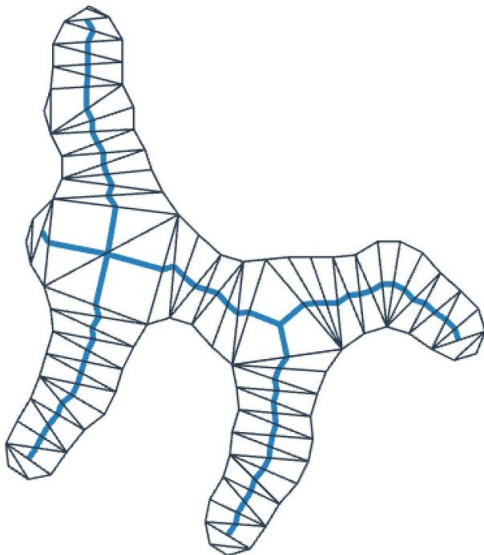
Spojnice vrcholů p_i, p_j , kde $|i - j| > 1$.



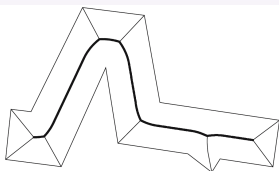
Při CDT vznikají 3 typy trojúhelníků :

- Terminal Triangles: 2 vnější strany, 1 hrana skeletonu (p_j, M_{ik}).
- Sleeve Triangles: 1 vnější strana, 1 hrana skeletonu (M_{ik}, M_{jk}).
- Junction Triangles: 0 vnějších stran, 3 hrany (S, M_{ij}), (S, M_{ik}), (S, M_{jk}).

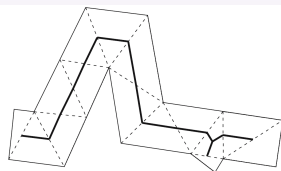
39. Ukázka Chordal Axis



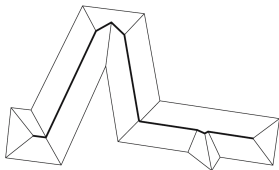
40. Srovnání 3 skeletonů



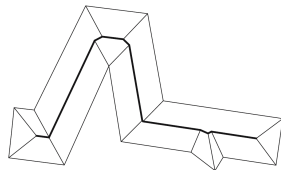
a Medial Axis.



b Skeleton based on Conformal Delaunay Triangulation.



c Straight Skeleton.



d Straight Skeleton with additional polygon edge.

Haurert et Sester, 2008.

41. Použití skeletonu

Nejčastější použití topologických koster:

- OCR (Optical Character Recognition), automatizované rozpoznávání textu.
- Automatizovaná vektorizace.
- Biometrie, výpočet invariantů.
- Kartografická generalizace: cestní síť, vodstvo, vrstevnice.
- Automatizovaná rekonstrukce tvaru střechy.
- Segmentace dat.
- Offset polygonu: sesouvání ven, aproximace bufferu.
- Dekompozice polygonu na monotónní oblasti.

42. Sekvenční ztenčování

Aplikace na rastrová data, provádí zeslabování rastrových linií.

Aplikace erozního filtru 3 x 3.

Použití pro OCR.



Ukázka sekvenčního ztenčování s kroky po 10 iteracích.

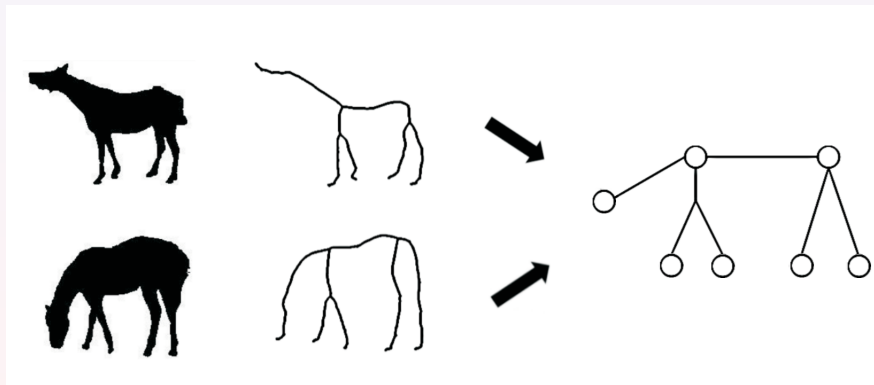
43. Sekvenční ztenčování, vektorová data



Zdroj: <https://www.sthu.org>

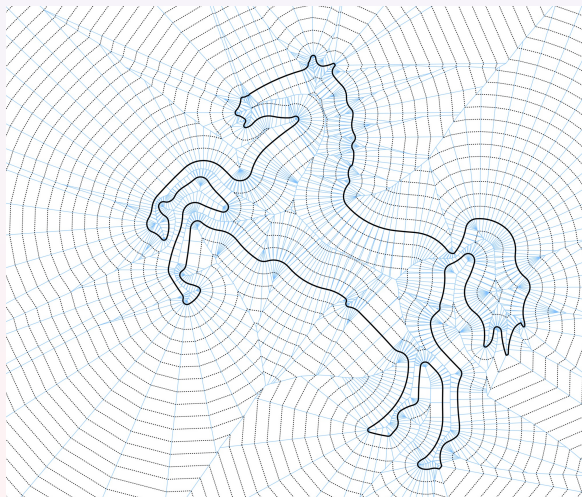


44. Rozpoznávání objektů



Zdroj: Bai et al, 2008

45. Aproximace bufferu



Zdroj: <https://www.cgal.org>

46. Kartografická generalizace prostorovou redukcí

Změna prostorové dimenze generalizovaného objektu s cílem zjednodušení jeho tvaru a zachování tvarových charakteristik.

Nejčastější varianty:

- $2D \Rightarrow 1D$.
- $1D \Rightarrow 0D$.

Využití generalizace prostorovou redukcí u prvků výrazně “protáhlého” tvaru (vodní toky, komunikace).

V měřítku mapy menší šířka než cca 1 mm.

Nelze zobrazit plošným znakem: $2D \Rightarrow 1D$.

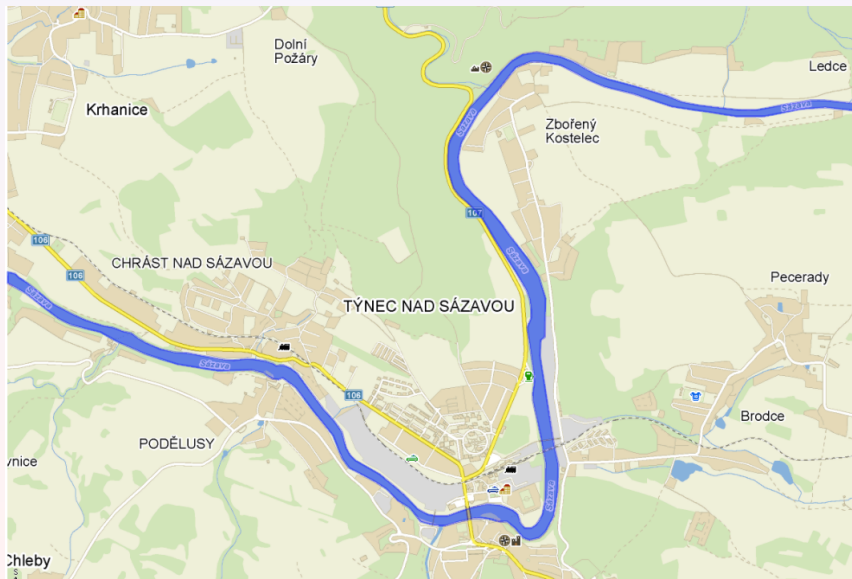
Dekompozice prvku snížením dimenze:

Aplikace skeletonizačního algoritmu (SS, LA).

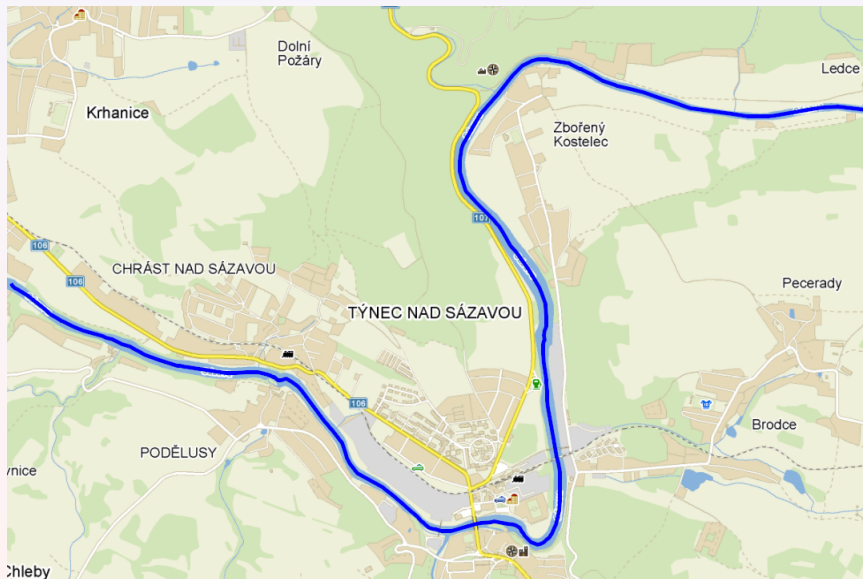
Výsledkem jeho podgraf (Galanda, 2003; Cacciola, 2006).

Kartograficky: lomená čára tvarově aproximující původní oblast P .

47. Generalizace vodního toku prostorovou redukcí



48. Generalizace vodního toku prostorovou redukcí



49. Rekonstrukce tvaru střech

K dispozici půdorys budovy + další datové zdroje (Laser Scanning).
Jak z takových dat zrekonstruovat střechu?

Fáze 1:

První aproximací tvar střechy generovaný z půdorysu \Rightarrow Straight Skeleton.
Jednotlivé monotónní polygony $S(P)$ představují roviny střechy.

Fáze 2:

Upřesnění tvaru střechy z dalších datových zdrojů (Laser Scanning).
K dispozici mračno bodů M se známými prostorovými souřadnicemi x, y, z .
Průměty bodů M v rovině xy leží v některém monotónním polygonu $S(P)$.

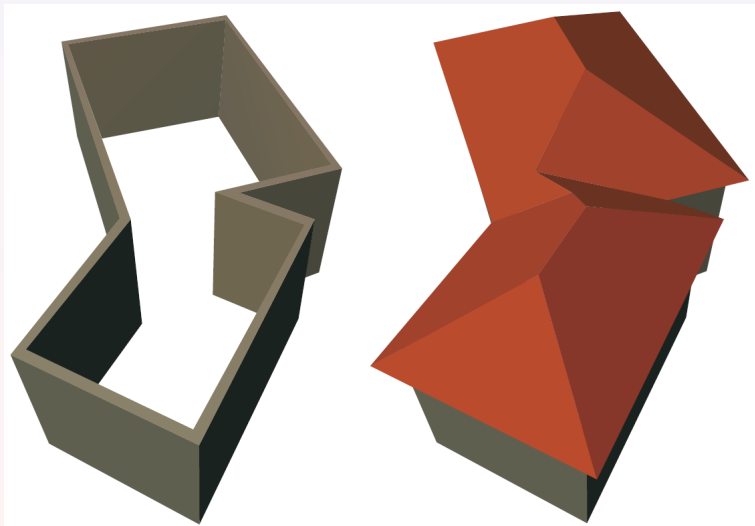
Body M ležící v jednom $S(P)$ proložena regresní rovina.

Odlehle body M vypuštěny (komín, chybný odraz).

Alternativně mezi incidujícími polygony (tvar střechy neodpovídá Straight Skeletonu).

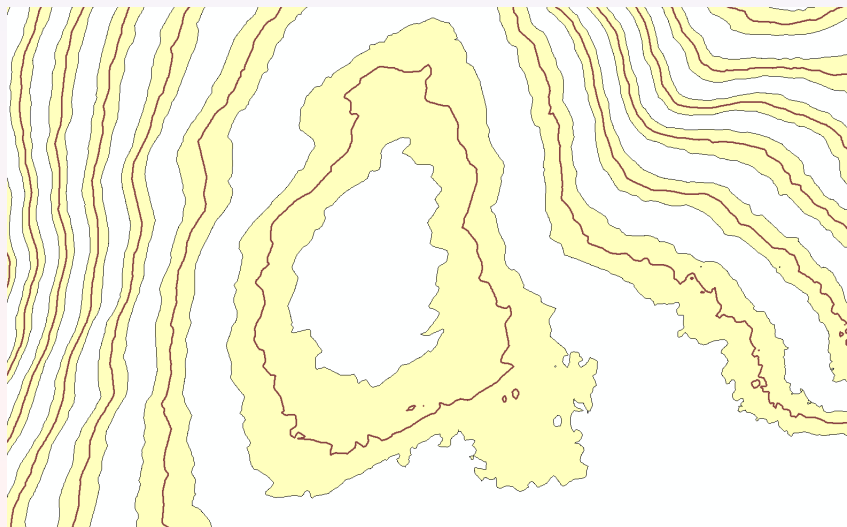
Hledána oblast, od jejíž regresní roviny budou mít body nejmenší vzdálenost.

50. Znáznornění rekonstrukce tvaru střech

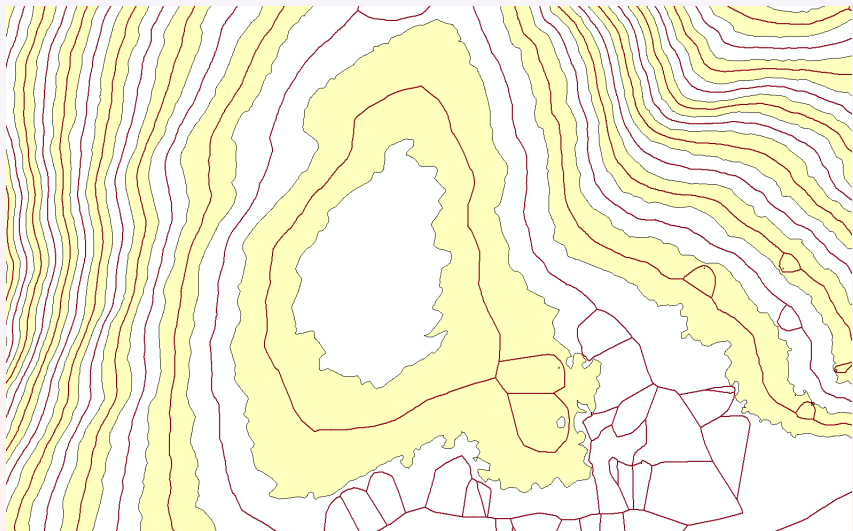


51. Generalizace vrstevnic (1/3)

Skeleton výškového bufferu vrstevnice.

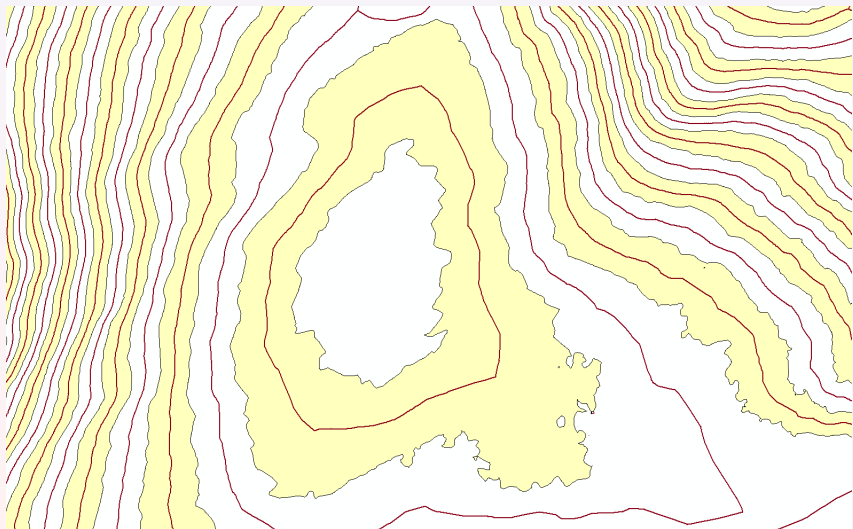


52. Generalizace vrstevnic (2/3)



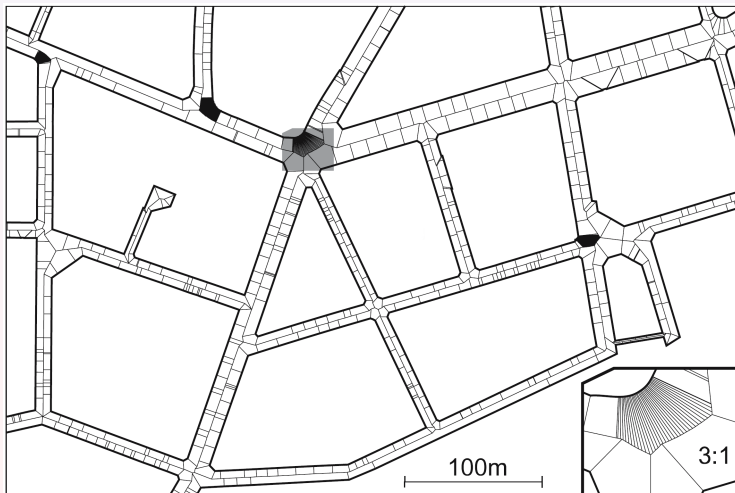
53. Generalizace vrstevnic (3/3)

Aplikace grafových algoritmů: optimální cesta.



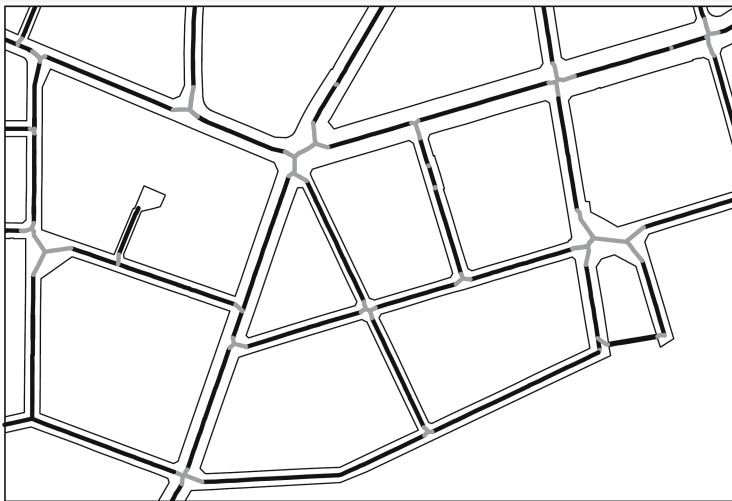
54. Generalizace cestní sítě (1/3)

Hunert et Sester, 2008.



55. Generalizace cestní sítě (2/3)

Hunert et Sester, 2008.



56. Generalizace cestní sítě (3/3)

Haurert et Sester, 2008.

