

Matematické metody v kartografii



1. přednáška

Úvod.

Referenční plochy v kartografii.
Souřadnicové systémy.

Literatura

- [1] Buchar P., Hojovec V.: Matematická kartografie, ČVUT Praha
- [2] Bohm J.: Matematická kartografie I, II.
- [3] Hojovec V.: Kartografie, Kartografie
- [4] Srnka E.: Matematická kartografie
- [5] Vykuřil J. : Vyšší geodézie, Kartografie
- [6] Snyder J. P., Bugayevskiy L. M.: Map projections, Taylor & Francis

WWW:http://gis.zcu.cz/studium/mk2/multimedialni_texty/index_soubory/index_soubory/hlavni_soubory/uvod.html

Software:

- 1) Proj4: <https://proj.org/MatKart>:
- 2) GMT (Linux): <http://proj.maptools.org/>

Přehled přednášek

1. Úvod, referenční plochy a souřadnicové systémy
2. Referenční elipsoid a základní vztahy.
3. Důležité křivky na sféře a elipsoidu.
- 4.-5. Kartografická zkreslení.
6. Kartografická zobrazení, zobrazení z elipsoidu na kouli.
- 7.-8. Válcová zobrazení.
- 9.-10. Kuželová zobrazení.
11. Azimutální zobrazení.
12. Nepravá, polykónická, polyedrická zobrazení.
13. Hodnocení kartografického zobrazení.

1. Referenční plochy používané v kartografii

Tvar Země nepravidelný, členitý, nelze matematicky popsat.

Formován zemskou tíží (výslednice odstředivé a gravitační síly).

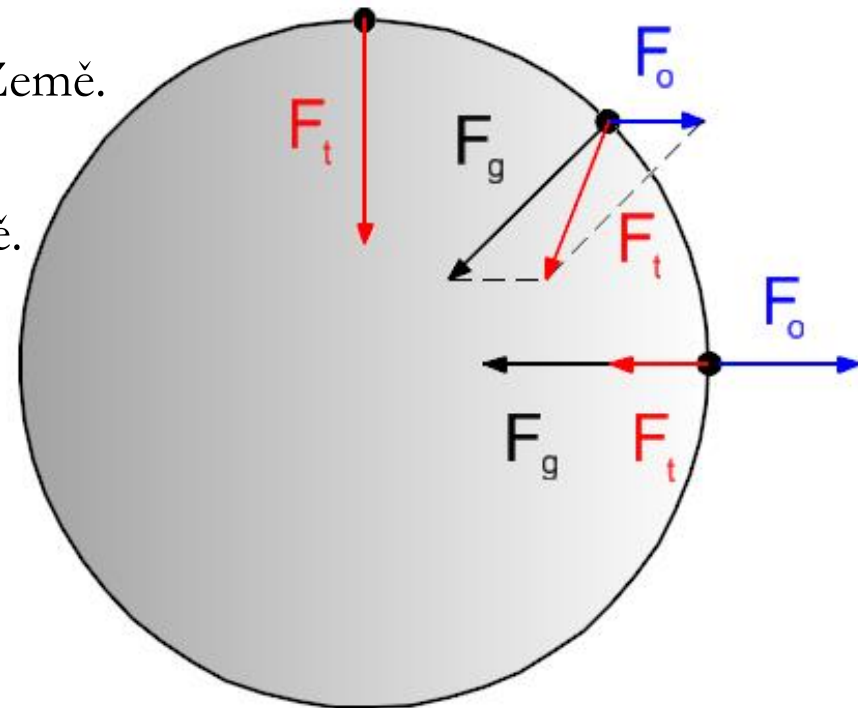
Pro účely kartografie se Země nahrazuje **referenční plochou**.

Vlastnosti referenční plochy:

- ▣ Její tvar a velikost jsou podobné tvaru Země.
- ▣ Matematicky snadno definovatelná.
- ▣ Nahrazuje Zemi jako celek nebo lokálně.

Přehled referenčních ploch:

- Geoid
- Elipsoid
- Koule
- Rovina



2. Geoid

tzv. hladinová plocha.

Představa: střední hladina všech moří a oceánů.

Nejpřesnější aproximace zemského povrchu.

Matematicky nedefinovatelná plocha, v kartografii se nepoužívá (neexistuje exaktní matematický převod na jiné referenční plochy.).

Vlastnosti:

- ❑ V každém okamžiku kolmá na směr zemské tíže
- ❑ Prochází zvoleným nulovým výškovým bodem.
- ❑ Nepravidelný tvar (konvexní/konkávní), zvlněný, ovlivněn rozložením hmot.
- ❑ Průběh geoidu kontinuálně upřesňován: geodetická, astronomická, gravimetrická měření.

V současné době je průběh geoidu znám s přesností v řádech 0,1 – 1m. (neustále se zpřesňuje).

3. Elipsoid

Poměrně dobře vystihuje tvar Země.

Matematicky relativně snadno definovatelný.

Existuje řada různých elipsoidů, které se liší svými parametry.

Typy elipsoidů:

▣ **tříosý elipsoid**

Definován trojicí poloos a , b , c .

Nejpřesnější aproximace geoidu.

Střed totožný s geocentrem Země.

Poledníky i rovnoběžky elipsy.

Obtížné výpočty, nepoužívá se v praxi.

▣ **rotační elipsoid**

Definován poloosami a, b .

Tzv. dvouosý elipsoid, vzniká rotací elipsy kolem vedlejší poloosy.

Poledníky elipsy, rovnoběžky kružnice.

4. Rotační elipsoid

Rovnice 3-osého a 2-osého elipsoidu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

V matematické kartografii používán výhradně 2-osý elipsoid.

2 způsoby aproximace zemského povrchu:

a) Zemský elipsoid (aproximace geoidu)

Střed ZE totožný s hmotným středem země (geocentrem).

Malá poloosa ZE totožná se středem rotace.

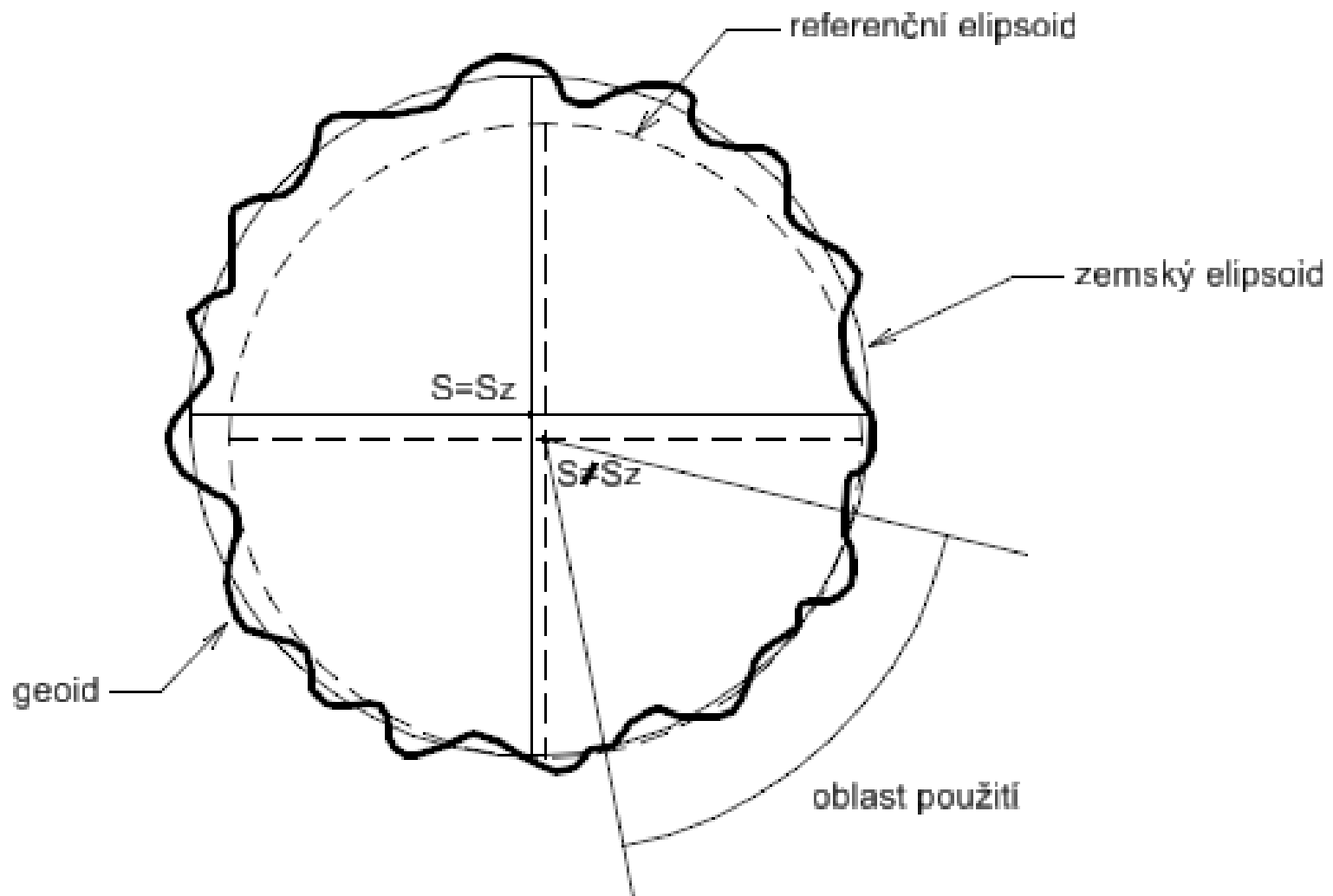
b) Referenční elipsoid (aproximace části geoidu)

Střed RE není totožný se středem Země.

Na vybraném území aproximuje lépe než ZE.

Zobrazení definovaná na RE vykazují menší zkreslení než zobrazení definovaná na ZE.

5. Geoid, zemský a referenční elipsoid



6. Nejznámější elipsoidy

Elipsoid	a [m]	b[m]	Typ
Besselův	6377397,1550	6356078,9633	RE
Hayfordův	6378388,0000	6356911,9461	RE
Krasovského	6378245,0000	6356863,0188	RE
WGS 84	6378137,0000	6356752,3142	ZE
Clarkův (1880)	6378249,1450	6356514,8696	RE
GRS 80	6378137,0000	6356752,3141	ZE
NAD 1927	6378206,4000	6356583,8000	RE
IAG 1967	6378160,0000	6356774,5160	ZE

7. Zemský povrch, geoid, elipsoid

Bod P leží na zemském povrchu (na reliéfu).

Promítnutím P podle normály k elipsoidu vznikne bod P_0 .

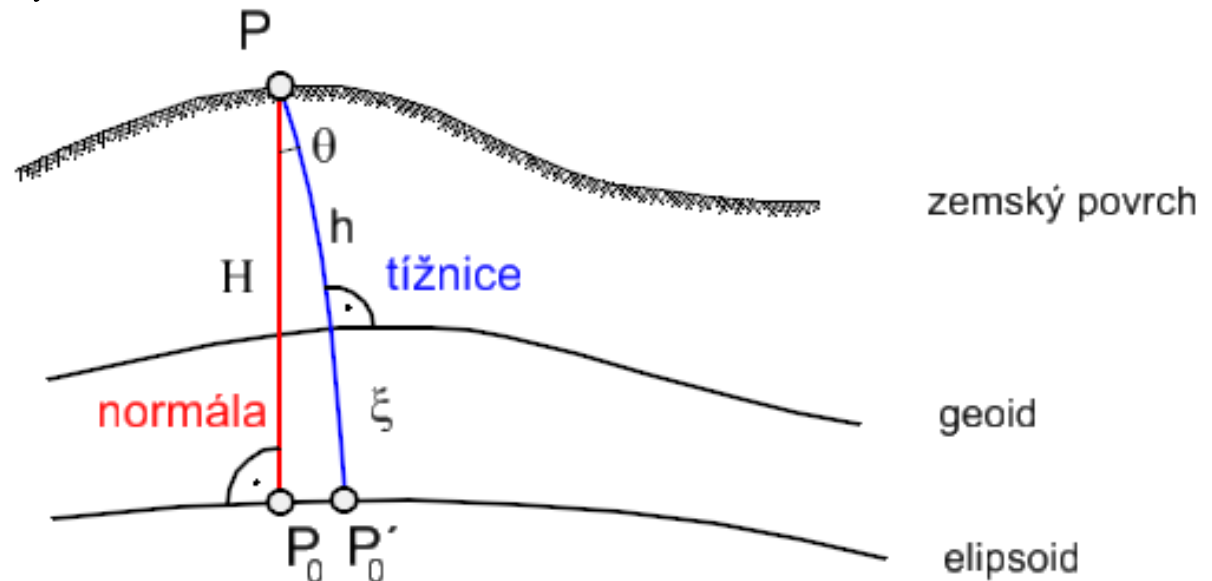
Vzdálenost P_0 -P představuje elipsoidickou výšku H.

Pak ξ je převýšení elipsoidu vůči geoidu a h výška bodu od hladinové plochy.

Hodnota θ je tížnicová odchylka.

$$H = h + \xi$$

Z hodnoty θ lze určit parametry elipsoidu přimykajícího se v P k zemskému povrchu.



8. Referenční koule

Větší odchylky od geoidu než elipsoid.

Jednodušší matematická definice.

Parametr: poloměr R , lze volit různými způsoby.

Vlastnosti

- Konstantní křivost.
- Snadnější výpočty.
- Použití pro mapy malých a středních měřítek (nikoliv pro státní mapové dílo).

Lze jí nahrazovat:

- *Elipsoid lokálně (území 300 x 300 km)*

Přesné výpočty na malém území (lze zanedbat rozdíly).

- *Elipsoid globálně*

Méně přesné výpočty na celém povrchu Země.

Využití v geografické kartografii.

Kartografická zkrácení při nahrazení geoidu koulí o 2 řády (100x) větší než při nahrazení geoidu elipsoidem !!!

9. Náhrada elipsoidu koulí

Náhrada elipsoidu koulí na malém území

- $R=a$,
- $R=b$,
- R =střední poloměr křivosti

$$R = \sqrt{MN}$$

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

$$R = \sqrt[3]{a^2 b}$$

Náhrada elipsoidu koulí globálně

- Stejný objem jako elipsoid
- Stejný povrch jako elipsoid
- Aritmetický průměrem poloos

$$4 \cdot \pi \cdot R^2 = 4 \cdot \pi \cdot b^2 \left(1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \dots\right)$$

$$R = b \sqrt{1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \dots}$$

$$R = \frac{2a + b}{3}$$

10. Referenční rovina

Vlastnosti:

- Tečná rovině ve zvoleném bodě.
- Použití pro malá území (20 x 20 km).
- Pro větší území značné výškové a polohové odchylky.
- Nulová křivost, nebere v potaz zakřivení Země.
- Mapy velkých měřítek: státní mapové dílo.
- Nelze použít pro mapy malých a středních měřítek, velké zkreslení
- Tečná rovina v bodě, princip azimutálních zobrazení.

Zobrazení elipsoid -> rovina: přímá zobrazení.

Zobrazení elipsoid -> koule -> rovina: dvojitá zobrazení.

V matematické kartografii představuje rovina cílovou plochu, na kterou zobrazujeme = rovina mapy.

11. Zobrazovací plocha

Plocha, na kterou zobrazujeme objekty z referenční plochy.

Nejčastěji plocha rozvinutelná do roviny, plášť 3D primitiv (kužel, válec) či přímo rovina (tečná rovina).

Lze zobrazovat na více než jednu plochu (polykónická zobrazení).

Zobrazovací plocha ve vztahu k referenční ploše:

- **Sečná**

Zobrazovací plocha se dotýká referenční plochy pouze v jednom bodě.

- **Tečná**

Zobrazovací plocha se dotýká referenční plochy pouze ve dvou bodech.

Pomalejší růst zkreslení.

12. Souřadnicové soustavy na referenčním elipsoidu

Nejčastěji používané souřadnicové systémy na referenčním elipsoidu:

- Zeměpisné souřadnice (φ, λ) .
- Geocentrická šířka β .
- Redukovaná šířka ψ .
- Pravoúhlé prostorové souřadnice (X, Y, Z) .

S rozvojem GPS se prostorové pravoúhlé souřadnice stávají stále významnější.

13. Zeměpisné souřadnice (φ , λ)

Zeměpisná šířka: φ

Úhel mezi normálou v bodě a rovinou rovníku.

Severní polokoule: $\langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$, jižní polokoule: $\langle 0^\circ, -90^\circ \rangle$

Zeměpisná délka: λ

Úhel mezi rovinou místního poledníku a rovinou základního poledníku.

Východní polokoule: $\langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$, západní polokoule: $\langle 0^\circ, -180^\circ \rangle$

Rovnoběžka:

Průsečnice elipsoidu a roviny // s rovinou rovníku.

Poledník:

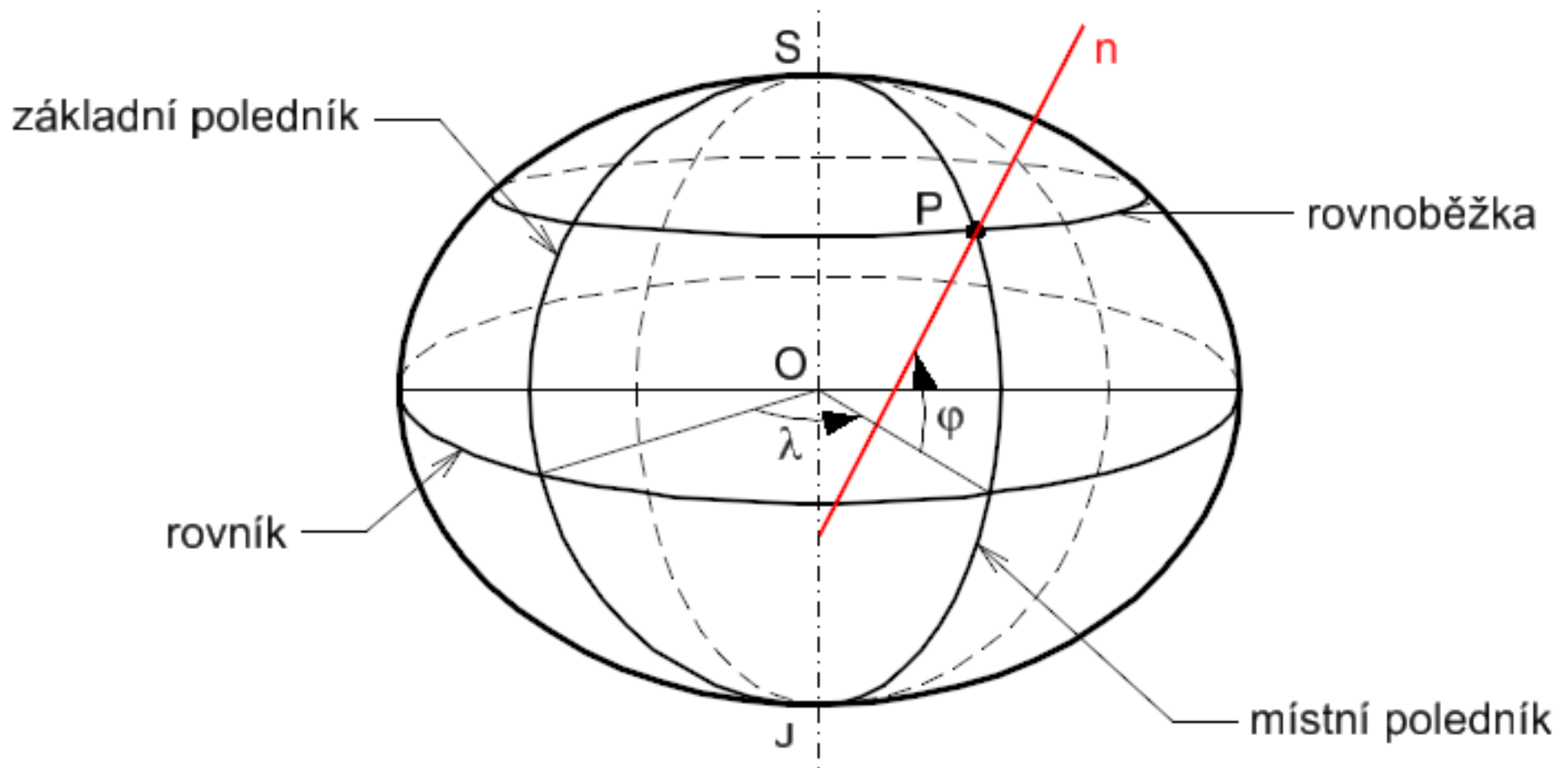
Průsečnice elipsoidu a roviny procházející osou rotace (ortodroma).

Základní poledník: Ferro, Greenwich.

Kartografické póly:

Singulární body, $\varphi = \pm 90^\circ$, $\lambda = \text{lib.} \Rightarrow$ **Problémy při výpočtech!!!**

14. Znárodnění zeměpisných souřadnic



15. Geocentrická a redukovaná šířka.

Bod $P=[u,v]$ na povrchu referenčního elipsoidu.

Bodem P veden meridiánový řez: elipsa.

□ Geocentrická šířka: β

Úhel přímky spojující P a střed elipsy s rovinou rovníku.

□ Redukovaná šířka: ψ

Pro elipsu zkonstruovány dvě oskulační kružnice.

Poloměry $r = a$ a $r = b$.

Bod P promítnut na oskulační kružnice: Q, Q'.

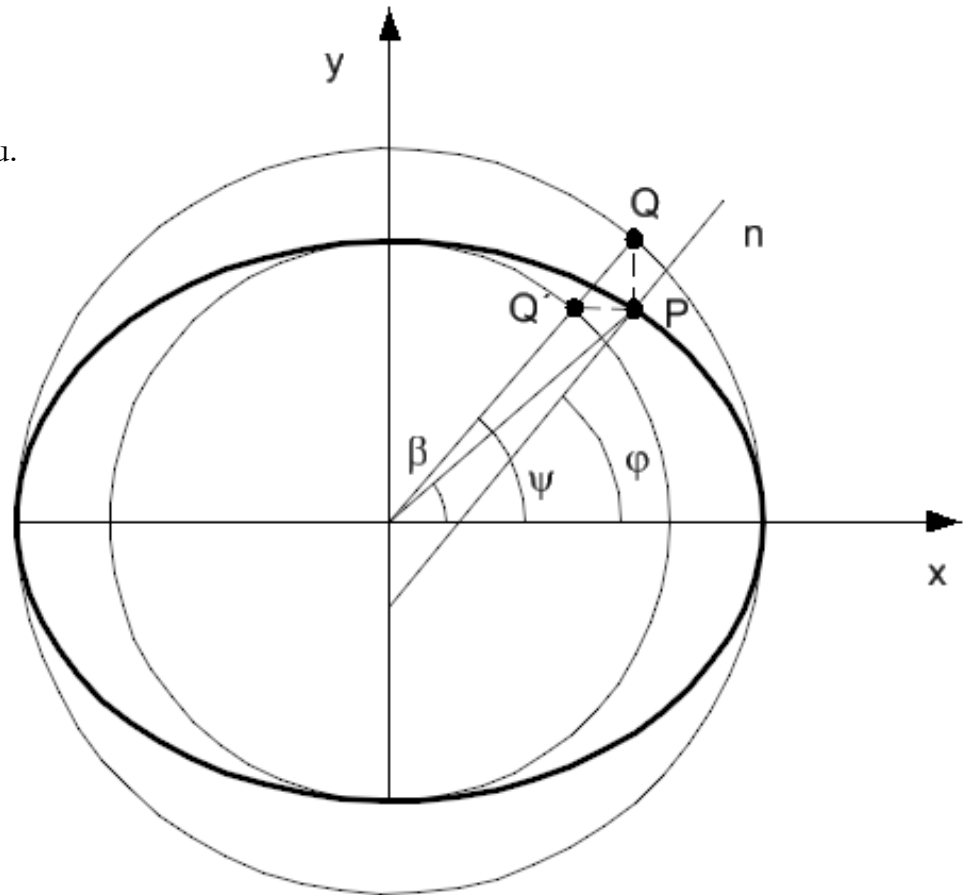
Přímka Q, Q' prochází středem elipsy.

Redukovaná šířka: úhel mezi Q, Q' a rovinou rovníku.

Souřadnice bodu P:

$$x = a \cos \psi$$

$$y = b \sin \psi$$



16. Prostorové pravoúhlé souřadnice

Počátek S se nachází ve středu elipsoidu.

Osa Z prochází osou rotace Země.

Osa X prochází průsečnicí roviny rovníku a roviny základního poledníku.

Osa Y je kolmá na osy X a Z.

Bod P na povrchu, $H=0$:

$$X = N \cos \varphi \cos \lambda$$

$$Y = N \cos \varphi \sin \lambda$$

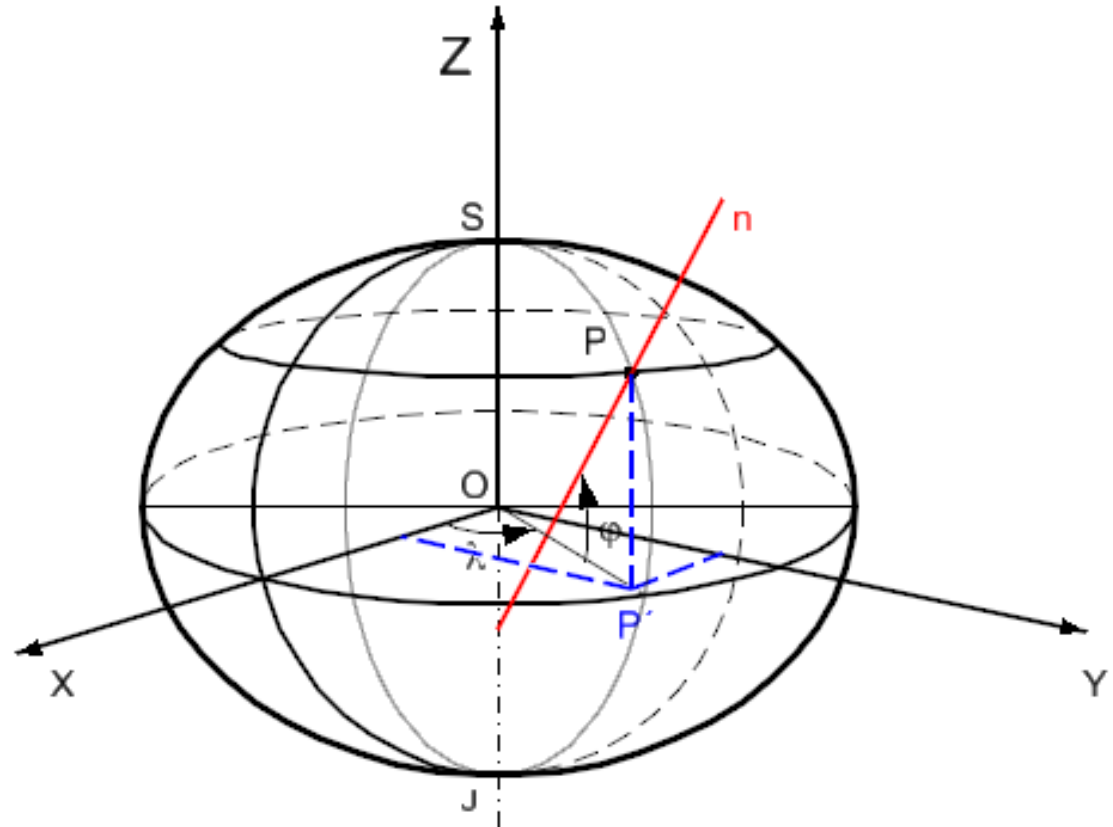
$$Z = N(1 - e^2) \sin \varphi$$

Bod P s elipsoidickou výškou H:

$$X = (N + H) \cos \varphi \cos \lambda$$

$$Y = (N + H) \cos \varphi \sin \lambda$$

$$Z = N((1 - e^2) + H) \sin \varphi$$



17. Souřadnicové systémy na kouli

Nejčastěji používané souřadnicové systémy na kouli:

- ❑ Zeměpisné souřadnice (u, v).
- ❑ Kartografické souřadnice (š, d).
- ❑ Prostorové souřadnice (X, Y, Z).

Zeměpisné souřadnice na kouli

Analogické definice...

Zeměpisná šířka: u

Úhel mezi normálou (prochází středem) v bodě a rovinou rovníku.

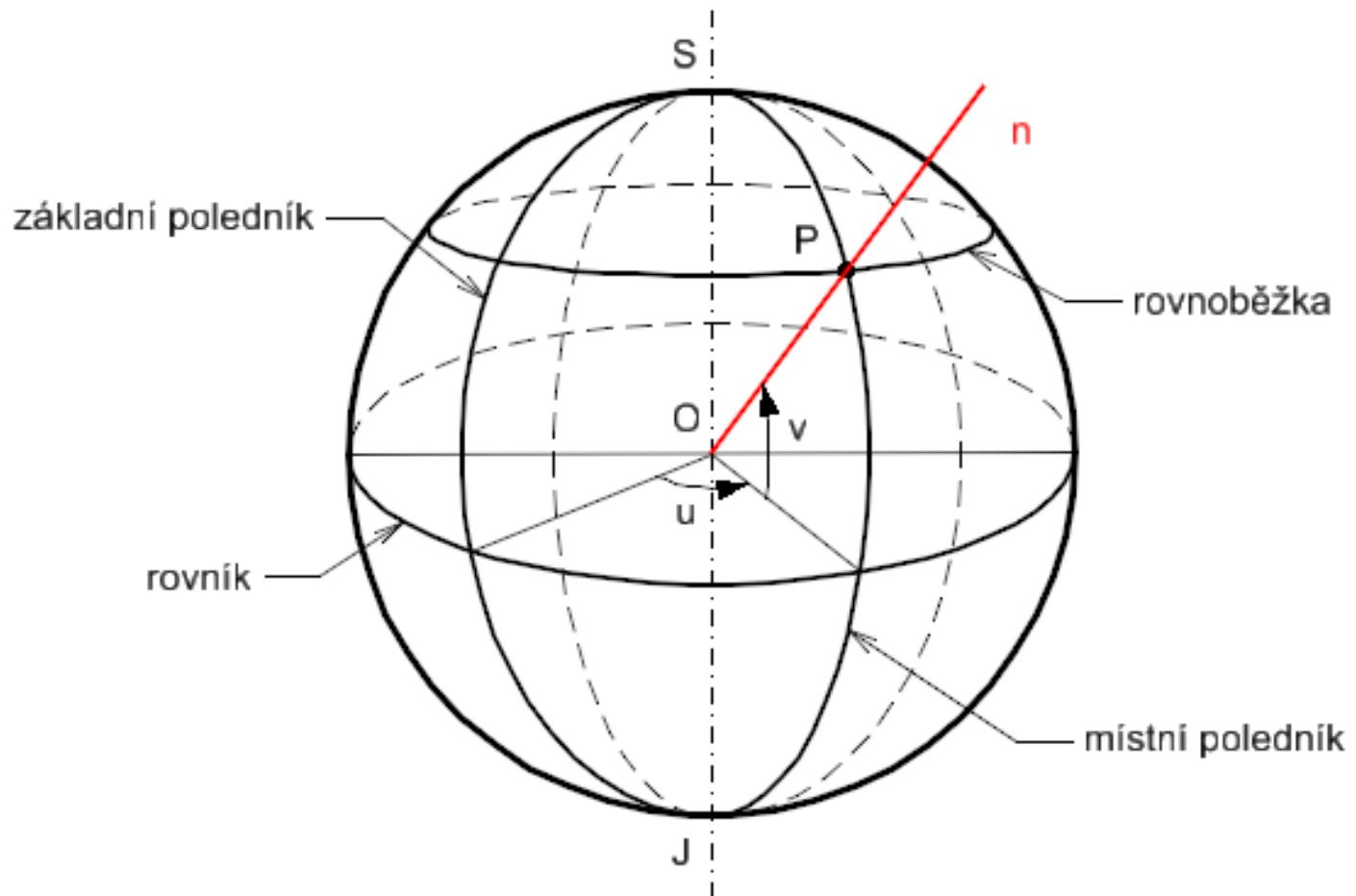
Zeměpisná délka: v

Úhel mezi rovinou místního poledníku a rovinou základního poledníku.

Východní polokoule: $\langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$, západní polokoule: $\langle 0^\circ, -180^\circ \rangle$

Více základních poledníků: Ferro, Greenwich,...

18. Znárodnění zeměpisných souřadnic



19. Sférická trigonometrie

Sférický trojúhelník:

Vymezen průsečíky tří hlavních kružnic (ortodrom).

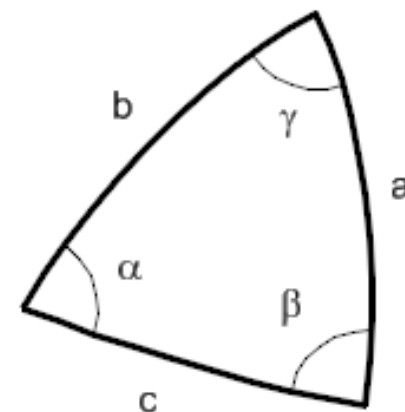
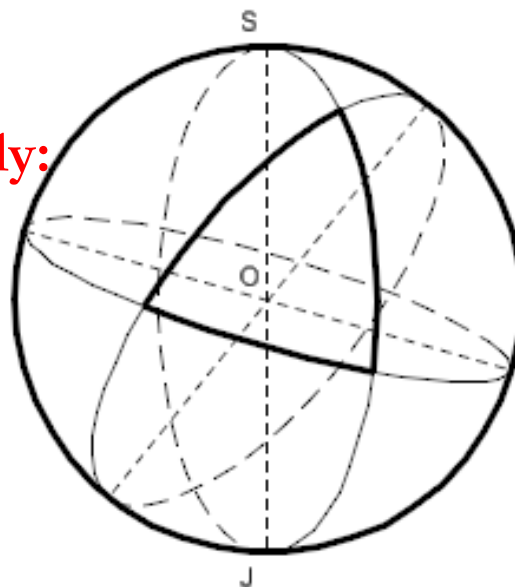
Výpočty provádíme zpravidla na jednotkové kouli a převádíme je na obecnou kouli.

Označení stran: a, b, c

Označení úhlů: α, β, γ

Závislosti mezi stranami a úhly:

- ❑ Sínová věta
- ❑ Kosínová věta (I., II.)
- ❑ Sínus – kosínová věta (I., II.)
- ❑ Neperovy analogie



20. Vztahy sférické trigonometrie

Sinová věta: $\sin(\alpha):\sin(\beta):\sin(\gamma) = \sin(a):\sin(b):\sin(c)$

I. kosinová věta: $\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\alpha)$

II. kosinová věta: $\cos(\alpha) = -\cos(\beta) \cos(\gamma) + \sin(\beta) \sin(\gamma) \cos(a)$

I. sinuskosinová věta:

$\sin(a) \cos(\beta) = \cos(b) \sin(c) - \sin(b) \cos(c) \cos(\alpha)$

II. sinuskosinová věta:

$\sin(a) \cos(b) = \cos(b) \sin(g) + \sin(b) \cos(g) \cos(a)$

Neperovy analogie: $\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \frac{\cos[(\alpha-\beta)/2]}{\cos[(\alpha+\beta)/2]} \operatorname{tg} \frac{c}{2}$ $\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos[(a-b)/2]}{\cos[(a+b)/2]} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}$

21. Kartografické souřadnice

Použití:

- ❑ Aby se obraz referenční plochy co nejvíce přimyká ke zvolenému území.
- ❑ Důsledkem jsou nižší hodnoty kartografických zkreslení.
- ❑ Osa zobrazovací plochy nebude // se zemskou osou.
- ❑ Vztaheny ke kartografickému pólu, který zpravidla označujeme K

Kartografická šířka: δ

Měří se od kartografického rovníku., definována analogicky jako zeměpisná šířka.

Kartografická délka: d

Měří se od zeměpisného poledníku procházejícího kartografickým (a severním) pólem, definována analogicky jako zeměpisná délka.

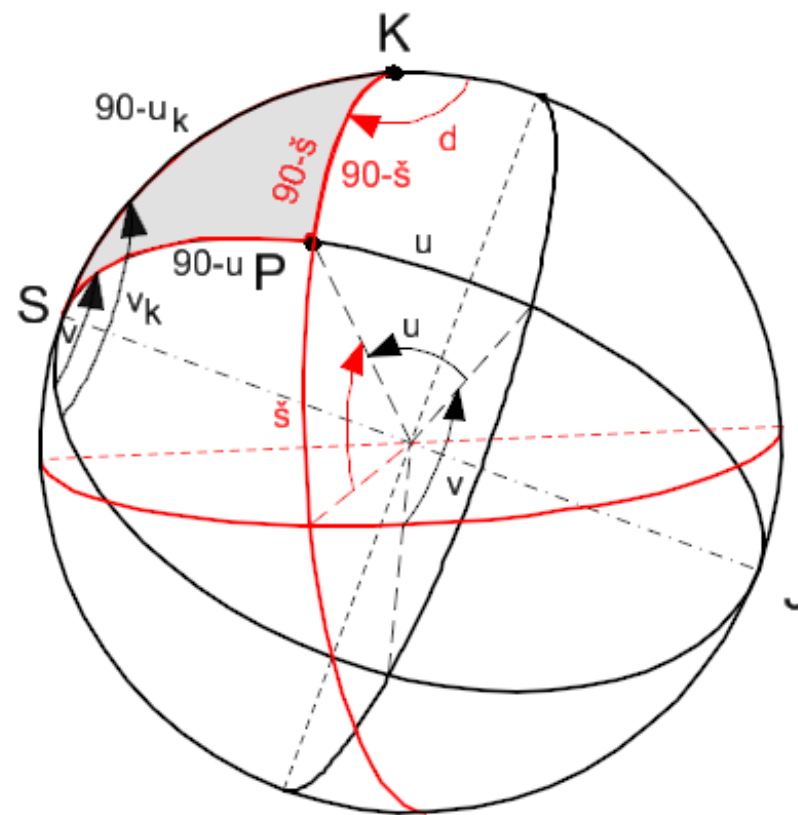
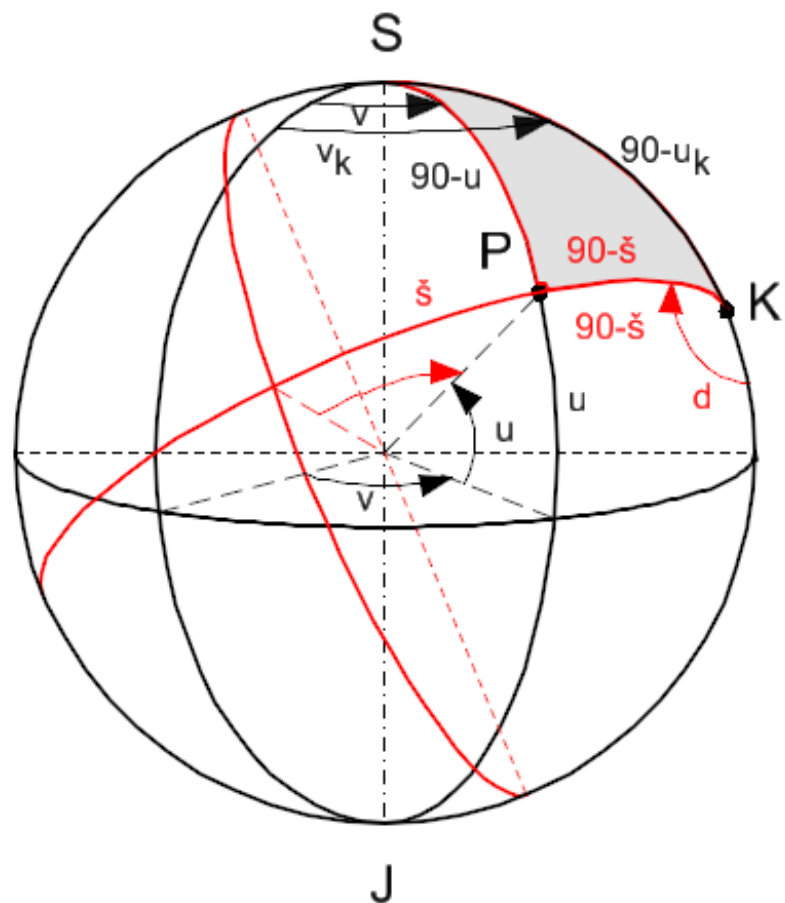
Nachází –li se kartografický pól na rovníku, je zobrazení v poloze **transverzální**.

Nachází –li se kartografický pól jinde, je zobrazení v poloze **obecné**.

Vztahy mezi zeměpisnými a kartografickými souřadnicemi: sférická trigonometrie

Odvození bude uvedeno dále.

22. Zeměpisné a kartografické souřadnice



23. Sférický exces

Na kouli neplatí některá pravidla, která známe z Euleidovské geometrie.

Nejjednodušším uzavřeným útvarem je sférický dvojúhelník.

Součet úhlů ve sférickém trojúhelníku není nikdy roven 180° , je vždy větší.

Sférický exces e:

Nazýván sférickým nadbytkem, je vždy kladný.

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$$

Přibližný výpočet sférického excesu

$$\varepsilon \approx \frac{P}{R^2} = \frac{1}{2R^2} ab \sin(\gamma)$$

Měření úhlů v trojúhelnících (triangulace) opravovány o vliv sférického excesu.

Délka strany v trojúhelníku:

1km \rightarrow $\varepsilon = 0.002''$, 5km \rightarrow $\varepsilon = 0.06''$, 10km \rightarrow $\varepsilon = 0.2''$, 50km \rightarrow $\varepsilon = 5.5''$, 100km \rightarrow $\varepsilon = 21.9''$,

24. Vztahy $(u,v) \Leftrightarrow (\check{s}, d)$

V obou případech použity věty sférické trigonometrie: $\frac{1}{2}$ kosínová a sinová.

Převod $(u,v) \Leftrightarrow (\check{s}, d)$:

$\check{s} \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$, $d \in \langle -180^\circ, 80^\circ \rangle$

Pro d nutný kvadrantově korektní převod.

$$\begin{aligned}\sin \check{s} &= \sin u_k \sin u + \cos u_k \cos u \cos \Delta v, \\ \sin d &= \sin \Delta v \frac{\cos u}{\cos \check{s}}, \cos d = \frac{\sin \check{s} \sin u_k - \sin u}{\cos \check{s} \cos u_k}, \\ \tan d &= \frac{\sin \Delta v \cos u \cos u_k}{\sin \check{s} \sin u_k - \sin u}.\end{aligned}$$

Převod $(\check{s}, d) \Leftrightarrow (u, v)$:

$u \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$, $v \in \langle -180^\circ, 80^\circ \rangle$

Pro v nutný kvadrantově korektní převod.

$$\begin{aligned}\sin u &= \sin \check{s} \sin u_k - \cos \check{s} \cos u_k \cos d, \\ \sin \Delta v &= \sin d \frac{\cos \check{s}}{\cos u}, \cos \Delta v = \frac{\sin \check{s} - \sin u \sin u_k}{\cos u \cos u_k}, \\ \tan \Delta v &= \frac{\sin d \cos \check{s} \cos u_k}{\sin \check{s} - \sin u \sin u_k}.\end{aligned}$$

Korektní stanovení kvadrantu d, v : použita funkce atan2(čítatel, jmenovatel).

25. Pravoúhlé souřadnice v rovině kartografického zobrazení (x,y)

Používají se u většiny kartografických zobrazení:

Jednoduchá: válcová, nepravá (pseudoválcová), neklasifikovaná...

2 parametry souřadnicového systému:

a) Počátek souřadnicového systému

Zpravidla volen do průsečíku obrazů základního poledníku a rovníku.

Alternativně volen do obrazu kartografického pólu.

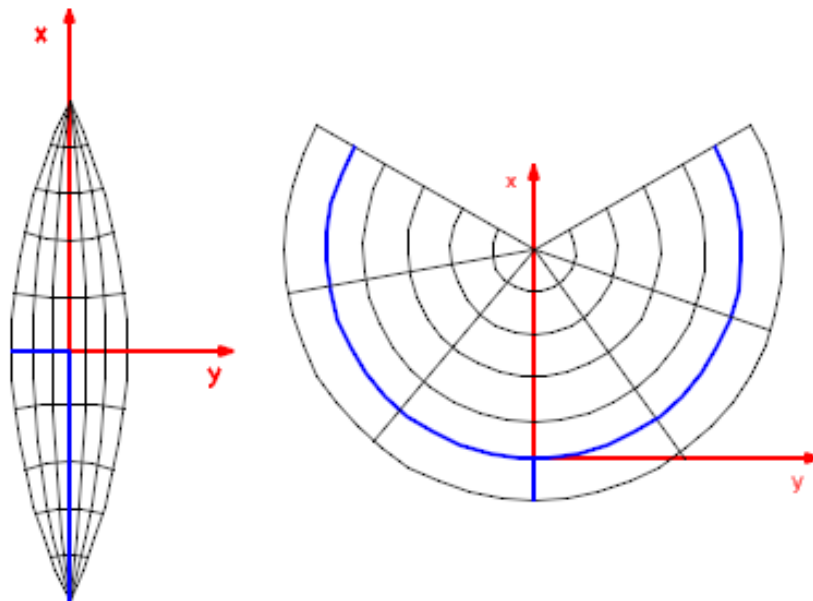
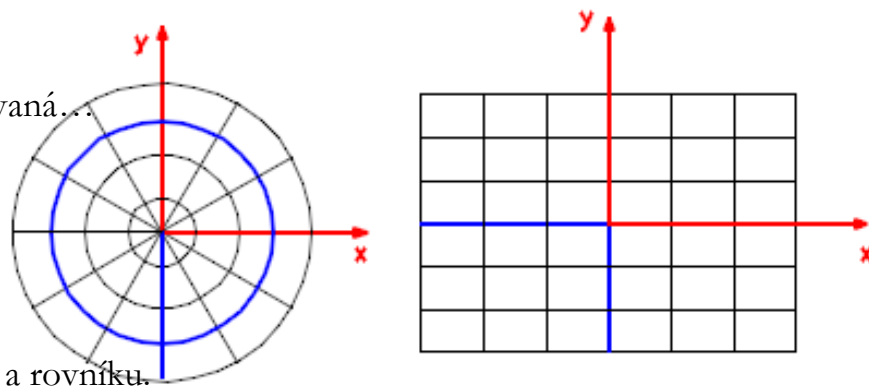
Počátek lze zvolit: polykonická zobrazení.

b) Orientace souřadnicových os x,y

Nejčastěji „matematická“ orientace: $x \Rightarrow V$, $y \Rightarrow S$ (levotočivá).

Prohození $x \leftrightarrow y$ (pravotočivá): Gauss-Krugerovo zobrazení.

Speciální orientace, $x \Rightarrow J$, $y \Rightarrow Z$: S-JTSK.



26. Adiční konstanty

Při zobrazování velkých územních celků počátek souřadnicového systému zpravidla uvnitř území.

Nevýhody:

- ❑ středová symetrie: souřadnice x , y kladné/záporné.
- ❑ Může docházet k chybné lokalizaci místa: zapomeneme mínus, jiný kvadrant.

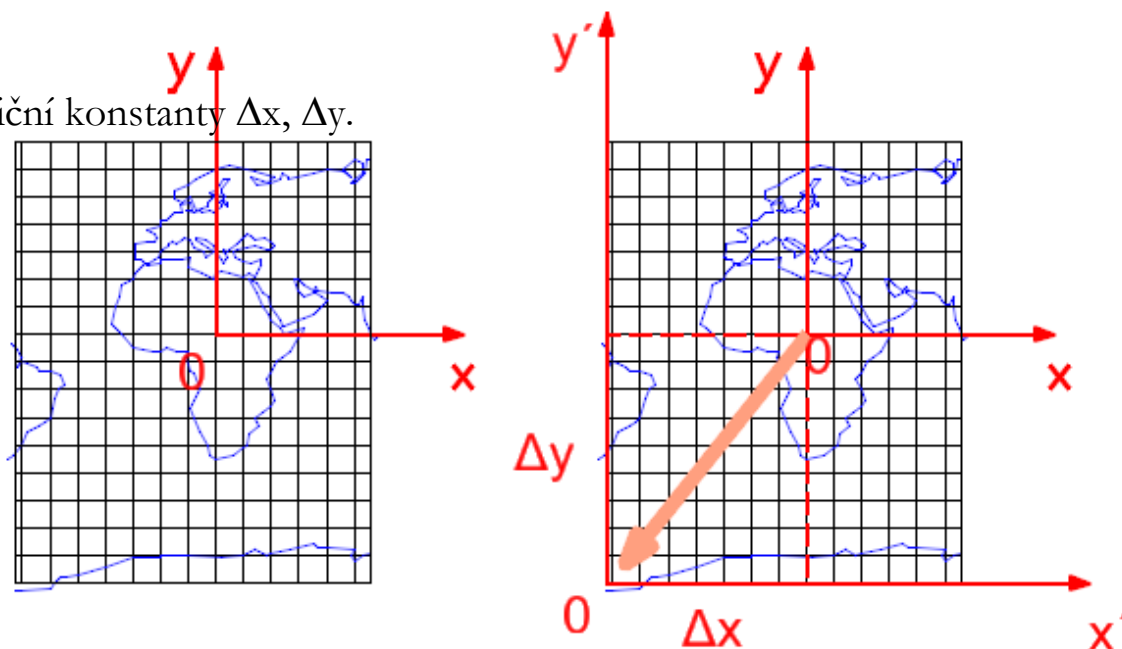
Se zápornými souřadnicemi zpravidla nepracujeme, v kartografii nepřirozené.

Použití adičních konstant Δx , Δy

K souřadnicím x , y připočítáváme adiční konstanty Δx , Δy .

$$x' = x + \Delta x$$

$$y' = y + \Delta y$$



27. Polární souřadnice v rovině kartografického zobrazení (ρ, ε)

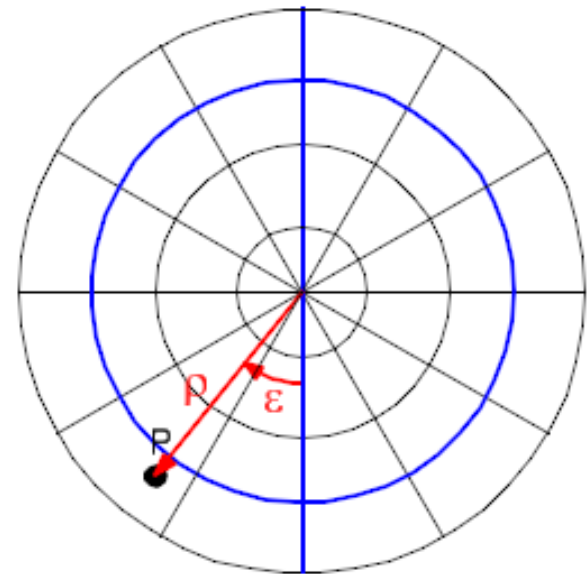
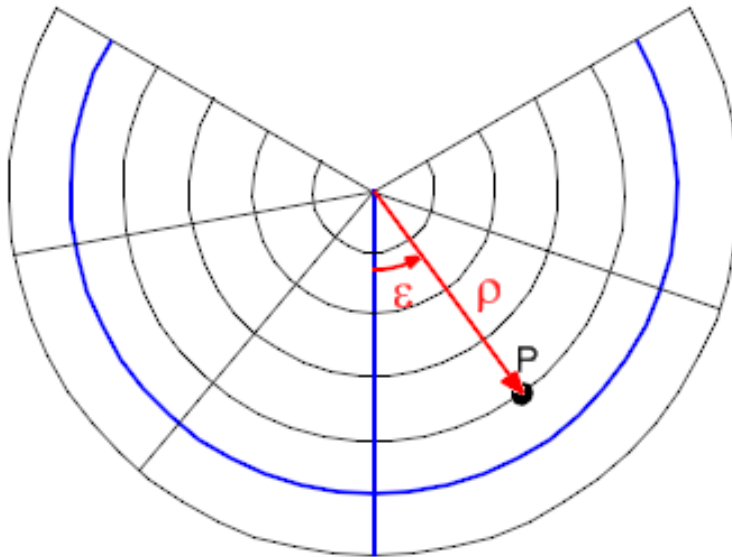
Počátek může být volen stejně jako u pravoúhlých souřadnic, ale nemusí.

Používají se u kuželových/azimutálních zobrazení a jejich nepravých variant.

Snadnější vyjádření zobrazovacích rovnic: rozvinutí kuželové plochy do roviny, tečná rovina.

ρ průvodič bodu: vzdálenost bodu od počátku souřadnicového systému.

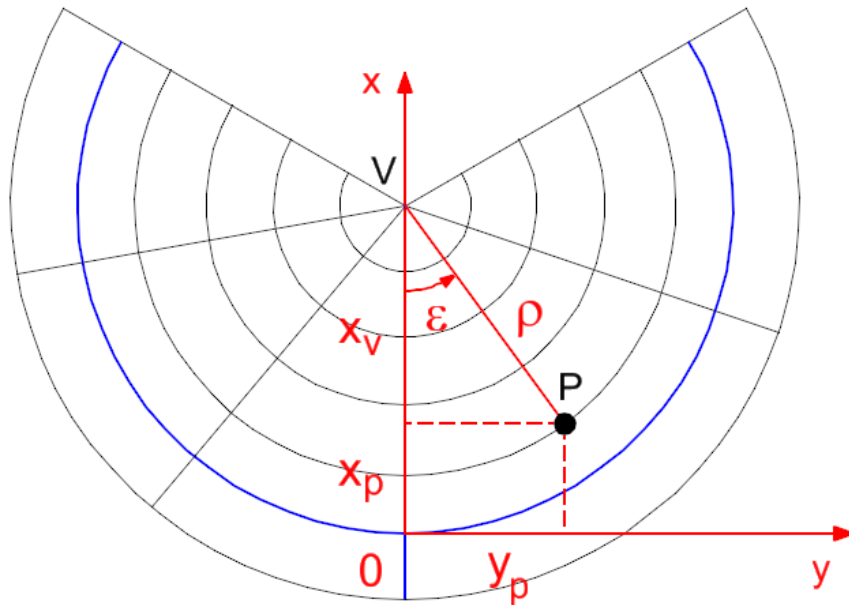
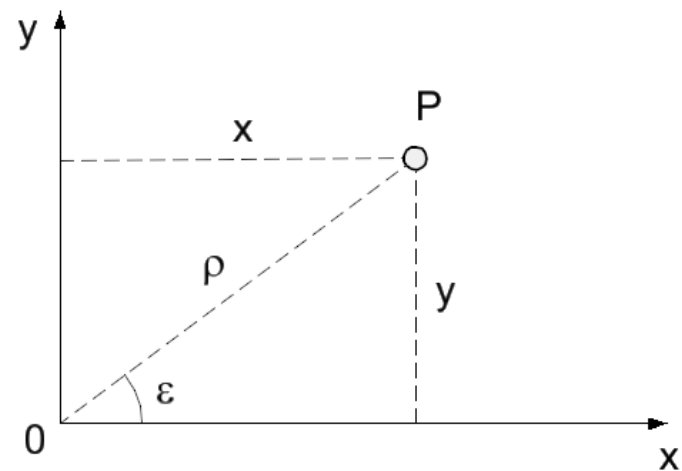
ε úhel průvodiče měřený od osy x (po/proti směru hodinových ručiček).



28. Vztah pravoúhlých a polárních souřadnic

A) Oba souřadnicové systémy mají stejný počátek

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varepsilon & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\y &= \rho \sin \varepsilon & \varepsilon &= \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\end{aligned}$$



B) Oba souřadnicové systémy mají různý počátek

$$\begin{aligned}x &= x_v - \rho \cos \varepsilon \\y &= \rho \sin \varepsilon\end{aligned}$$