Matematické metody v kartografii

2. Přednáška

Referenční elipsoid a základní vztahy.

Poloměry křivosti.

Délky poledníkového a rovnoběžkového oblouku.

1. Základní vztahy na rotačním elipoidu

Rotační elipsoid dán následujícími parametry:

- hlavní poloosa a
- vedlejší poloosa b

Základní parametry elipsoidu:

- Zploštění elipsoidu i:
- První excentricita elipsoidu e
- Druhá excentricita elipsoidu e´
- První geodetická funkce W
- Druhá geodetická funkce V

$$i = \frac{a - b}{a}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$$

2. Opakování: limita funkce

Nechť funkce f je definována na okolí $x_0 \in D_f$. Pokud existuje limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

pak se tato nazývá derivací funkce f v bodě x_0 a značí se

$$f'(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, \frac{df}{dx}(x_0), \text{ nebo } \frac{dy}{dx}(x_0).$$

Nechť f je spojitá v bodě $x_0 \in D_f$ a nechť má v bodě x_0 derivaci. Pak směrnice k tečny $T = (x_0, f(x_0))$ je definována

$$k = f'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) = tg(\varphi).$$

3. Opakování: funkce definovaná implicitně

Nechť funkce f je funkcí dvou proměnných na množině $\Omega \epsilon R^2$ a nechť $(a, b) \epsilon \Omega$ je takový bod, že

$$f(a,b)=0, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$$

potom existují okolí O(a), O(b) bodů $a, b \epsilon R$ a právě jedna funkce proměnné $g: O(a) \rightarrow O(b)$ taková, že

$$\forall x \in O(a): f(x, g(x)) = 0.$$

.

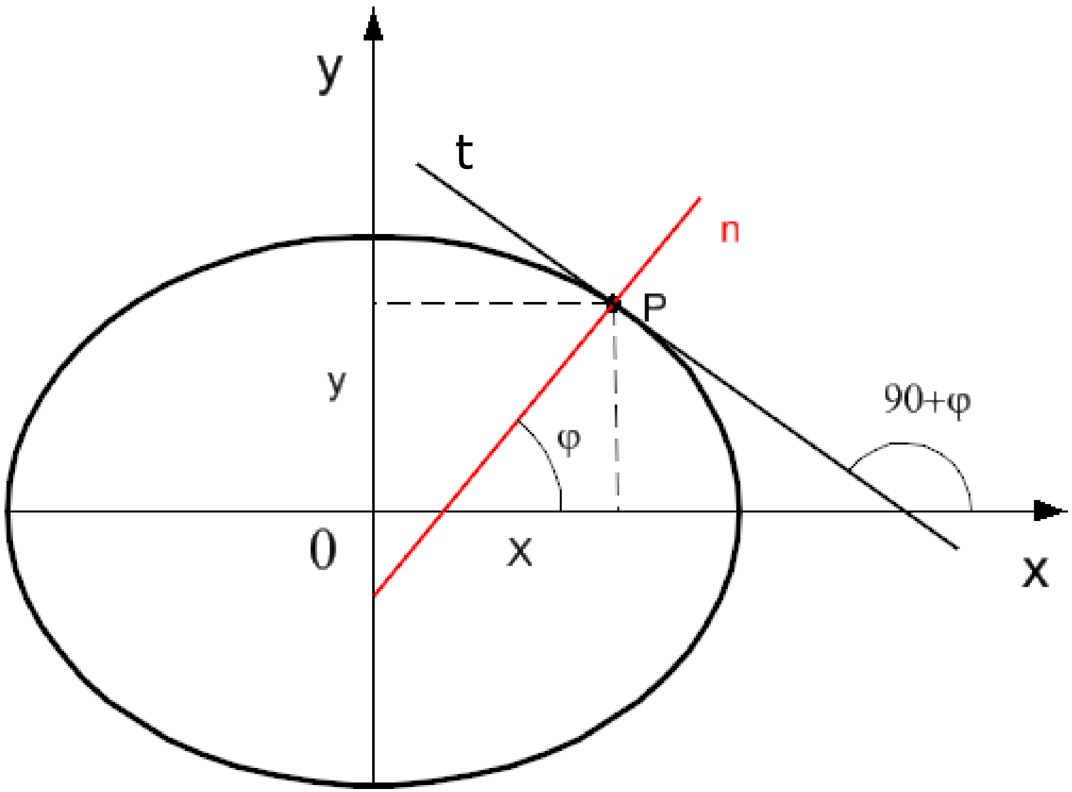
Derivace funkce def. implicitně: $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))g'(x) = 0,$$

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))}.$$

4. Pravoúhlé souřadnice bodu v rovině meridiánové elipsy (1/2)

Hledáme vztah pravoúhlých souřadnice (x,y) v rovině meridiánové elipsy a zeměpisných zeměpisnými souřadnicemi (φ, λ).

Použití při odvození prostor. geoc, souřadnix [X,Y,Z], poloměrů M,N.



$$P = [\varphi, \lambda] \equiv [x, y],$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2.$$

5. Pravoúhlé souřadnice bodu v rovině meridiánové elipsy (2/2)

Výpočet směrnice tečny funkce dané implicitně:

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y},$$

$$k = \frac{dy}{dx} = 90^\circ + \varphi = -\operatorname{cotg}(\varphi),$$

$$-\frac{b^2 x}{a^2 y} = \operatorname{cotg}\varphi,$$

Po dosazení $\quad \operatorname{cotg}\varphi = \cos\varphi / \sin\varphi,$

získáme.

$$b^4 x^2 \sin^2\varphi - a^4 y^2 \cos^2\varphi = 0$$

$$x^2 b^2 + y^2 a^2 - a^2 b^2 = 0$$

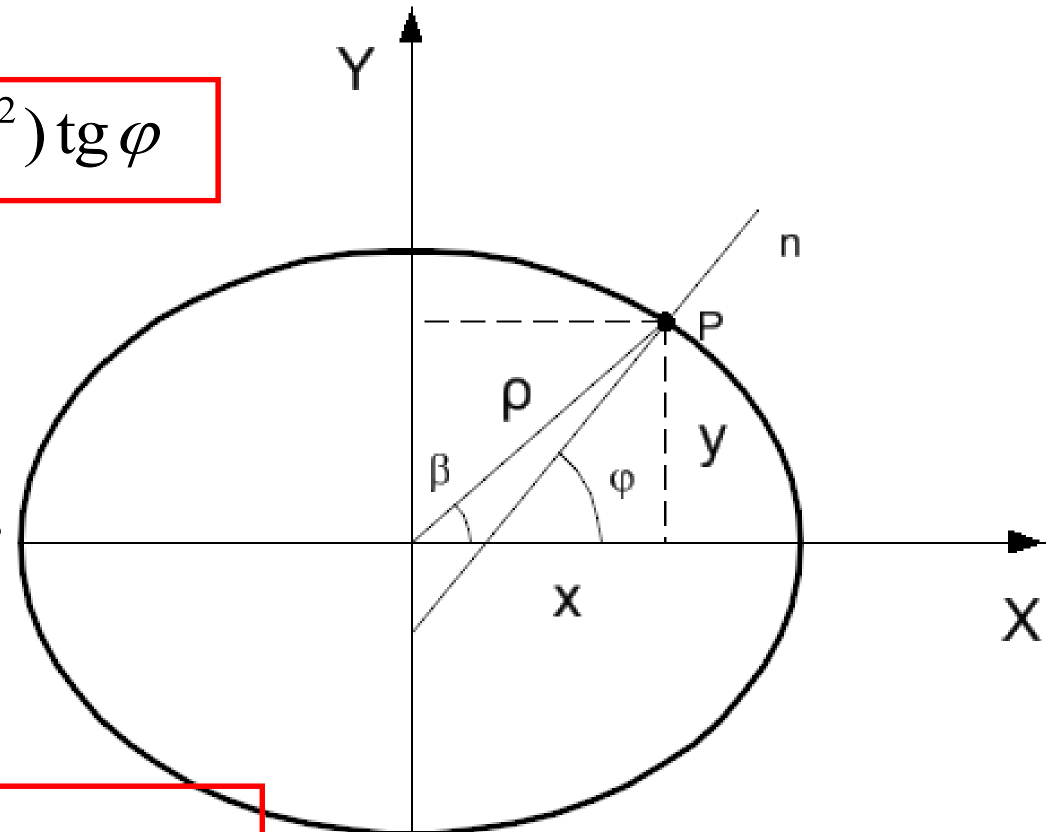
Pak

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{a\cos\varphi}{W} \\ y &= \frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{W} \end{aligned}}$$

6. Vztah mezi zeměpisnou a geocentrickou šířkou

Platí: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{y}{x}$

Po dosazení: $\boxed{\operatorname{tg}\beta = (1 - e^2)\operatorname{tg}\varphi}$



- Pro zvolený elipsoid je e konstantou.
- Největší rozdíl pro φ=45°, a to 11°35´.

Rádius vektor ρ:

$$\boxed{\rho = \frac{a^2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}\left(\cos^2\varphi + (1 - e^2 \sin^2\varphi)\right)}$$

7. Vztah mezi zeměpisnou a geocentrickou šířkou

Platí:

$$x = a\cos\psi$$

$$y = b\sin\psi$$

$$\frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{a}{b}\frac{y}{x}$$

Kde

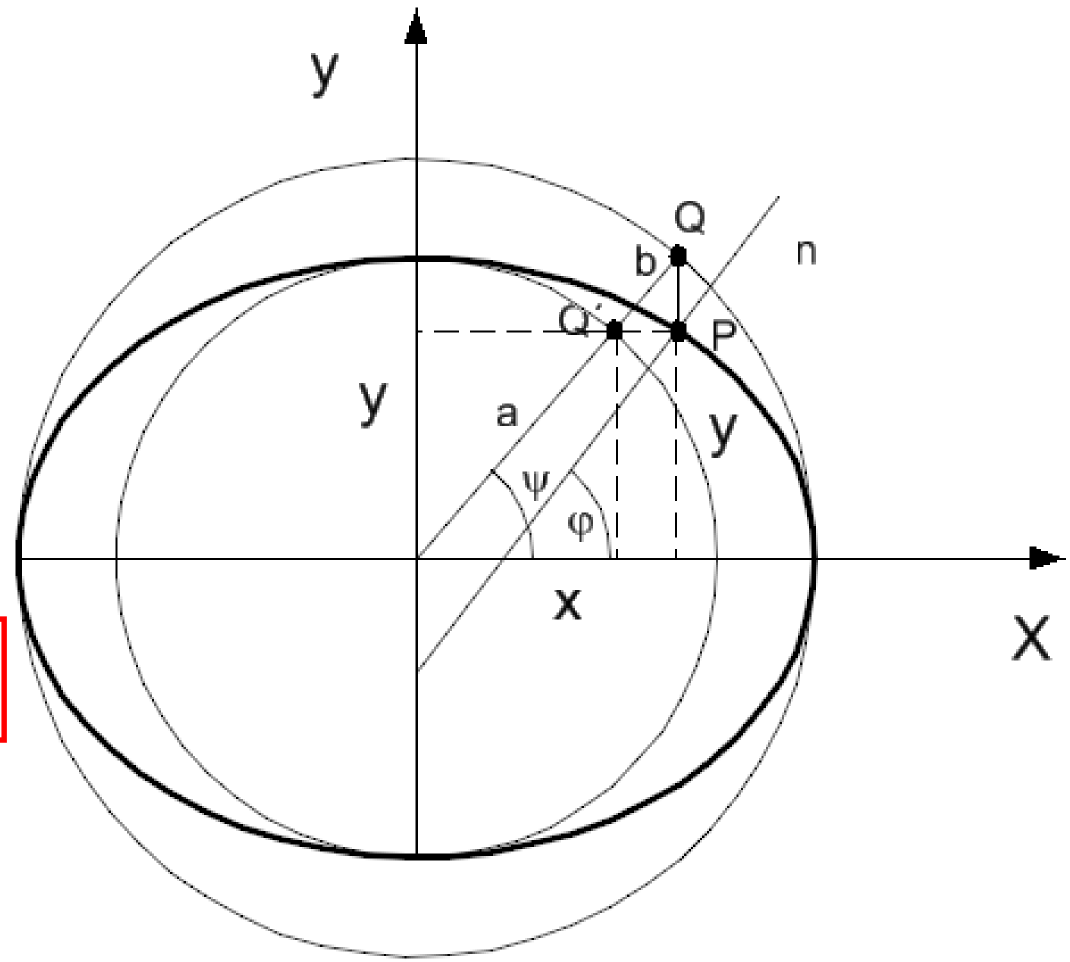
$$\operatorname{tg}\psi = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\beta$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$$

Pak:

$$\boxed{\operatorname{tg}\psi = \sqrt{1-e^2}\,\operatorname{tg}\varphi}$$

Pro body na rovníku ψ=φ.
Největší rozdíl pro φ=45°, a to 6°.



8. Odvození pravoúhlých prostorových souřadnic

Souřadnice x,y v rovině meridiánové elipsy:

$$x = \frac{a\cos\varphi}{W}$$

$$y = \frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{W}$$

Prostorové pravoúhlé souřadnice X,Y,Z:

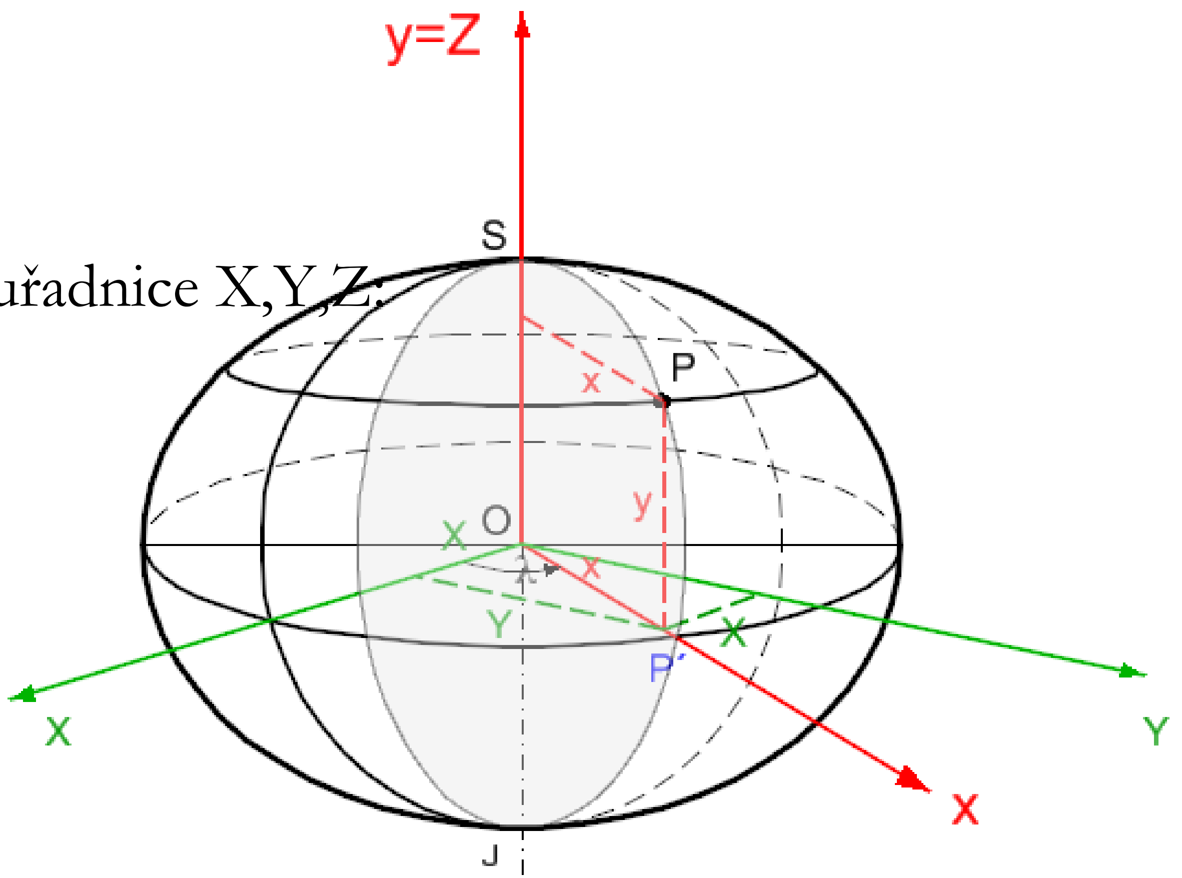
$$\cos\lambda = \frac{X}{x}$$

$$\sin\lambda = \frac{Y}{x}$$

$$X = x\cos\lambda = \frac{a}{W}\cos\varphi\cos\lambda$$

$$Y = x\sin\lambda = \frac{a}{W}\cos\varphi\sin\lambda$$

$$Z = y = \frac{a}{W}(1-e^2)\sin\varphi$$



9. Hlavní poloměry křivosti

Normála v bodě P: lze jí proložit nekonečně mnoho rovin kolmých k povrchu elipsoidu.

Normálový řez v bodě P: řez rovinou procházející bodem P kolmý k povrchu elipsoidu.

Normálových řezů nekonečně mnoho, jejich křivosti jsou různé.

Existují dva normálové řezy s extrémní křivostí: maximální a minimální.

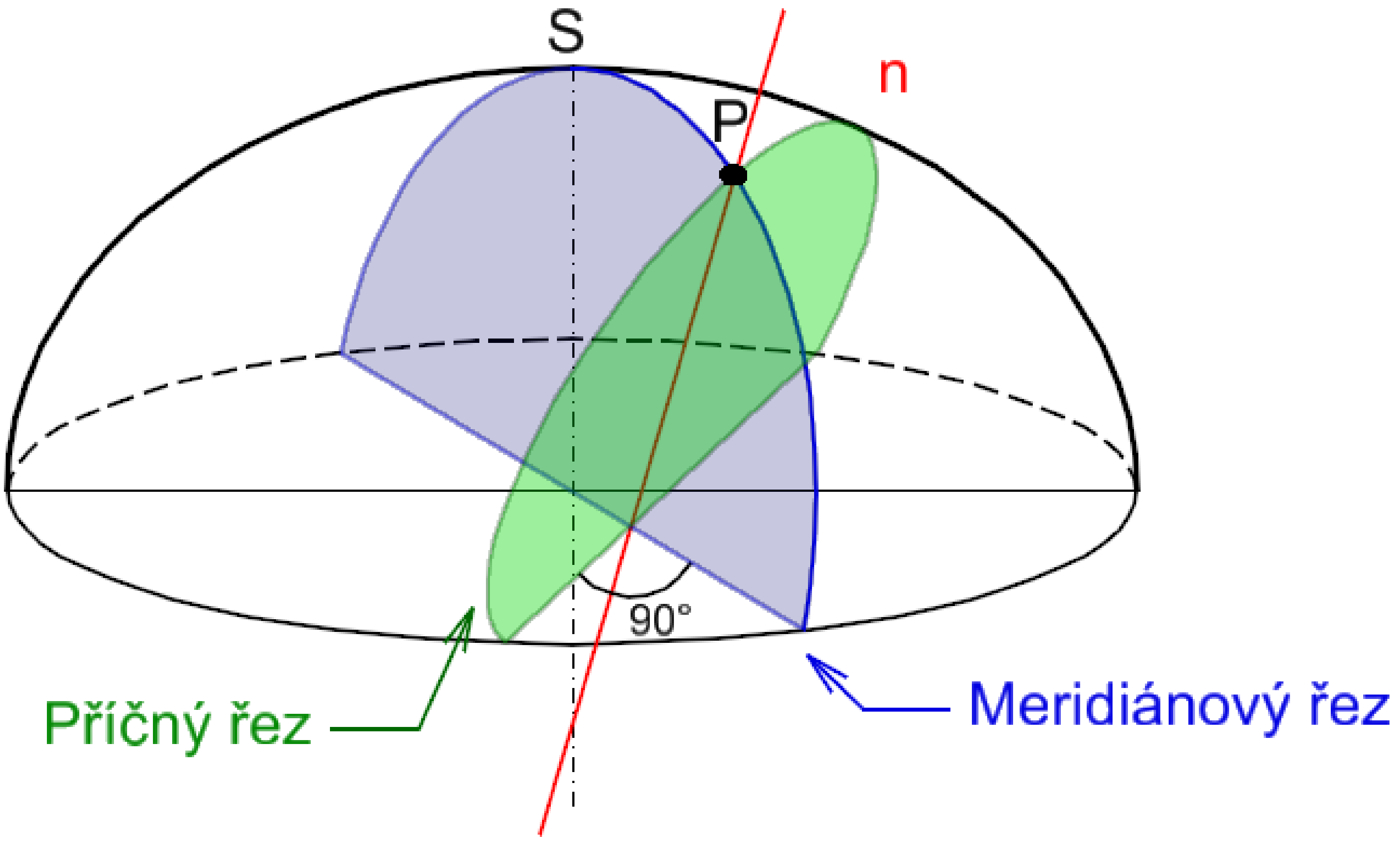
Označovány jako **hlavní normálové řezy**: meridiánový řez elipsoidu a příčný řez elipsoidu.

Jim odpovídají **hlavní poloměry křivosti**:

- Meridiánový poloměr křivosti M
- Příčný poloměr křivosti N

Použití: při řešení geodetických úloh na elipsoidu či v matematické kartografii.

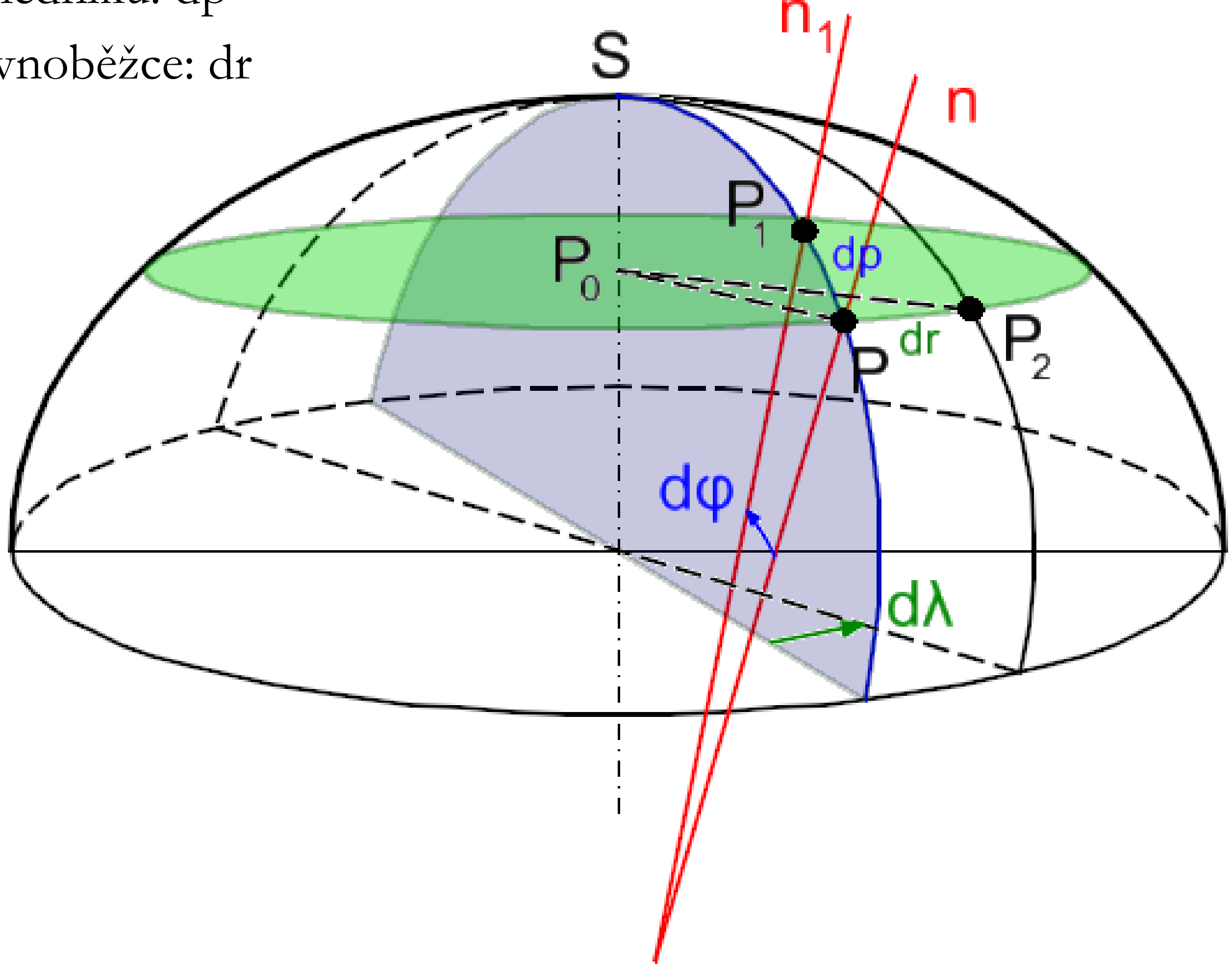
10. Ukázka meridiánového a příčného řezu elipsoidu



11. Délkové elementy v poledníku a rovnoběžce

Délkový element v poledníku: dp

Délkový element v rovnoběžce: dr



12. Meridiánový poloměr křivosti M

Rovina prochází osou rotace a bodem, řezem je meridiánová elipsa.

Meridiánový poloměr křivosti=poloměr křivosti meridiánové elipsy v bodě.

M závisí pouze na φ, pro elipsoidy a φ tabelován.

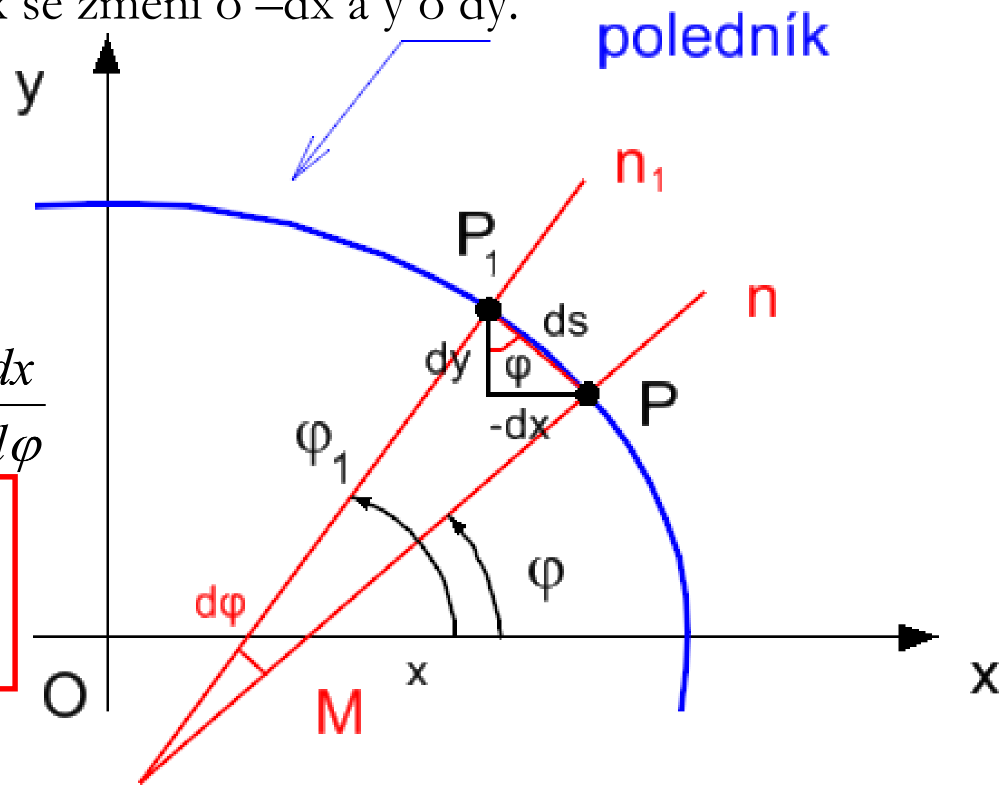
Posuneme se z bodu P do P_1 o ds, x se změní o –dx a y o dy.

$$ds = Md\varphi$$

$$ds = -\frac{dx}{\sin\varphi}$$

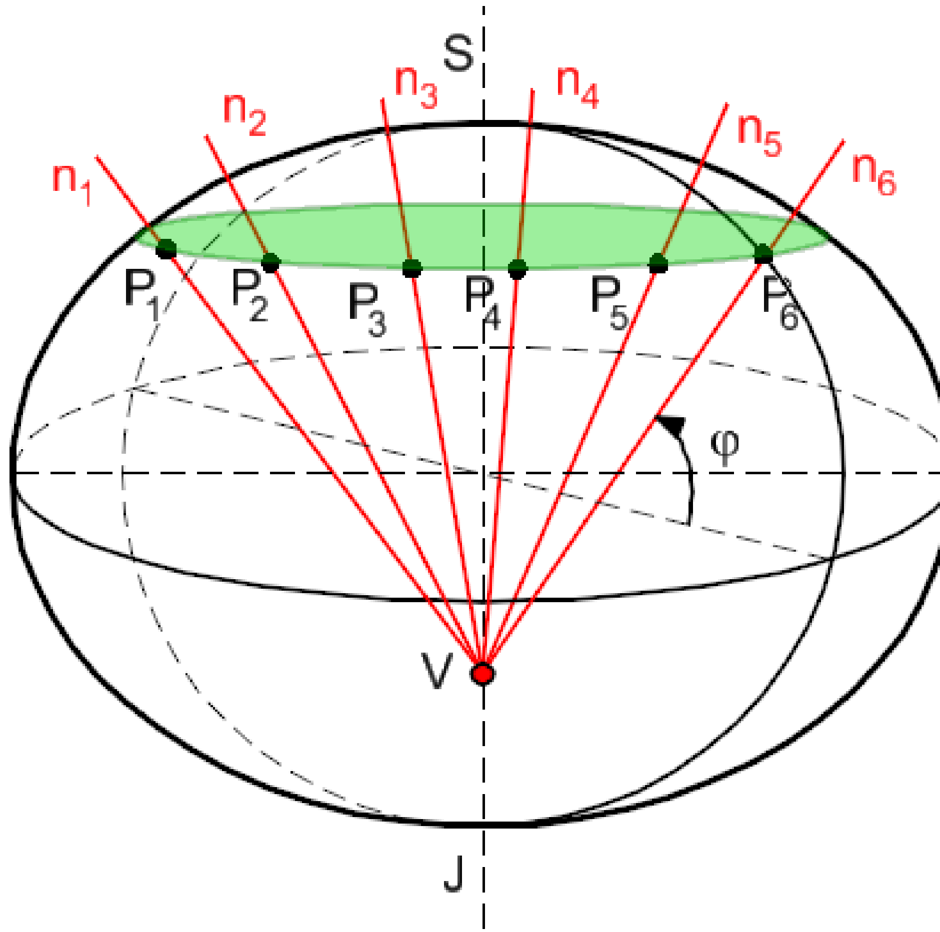
$$-\frac{dx}{\sin\varphi} = Md\varphi \Rightarrow M = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{dx}{d\varphi}$$

$$\boxed{M = \frac{a(1-e^2)}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a(1-e^2)}{W^3}}$$



13. Příčný poloměr křivosti N

- Rovina obsahuje normálu a je kolmá k rovině poledníku, řezem je elipsa.
- Normály všech bodů ležících na jec rovnoběžce φ_0 se protínají v jednom bodě na malé poloose elipsoidu.
- N představuje délku normály mezi bodem P a jejím průsečíkem s vedlejší poloosou. N=PV
- Opět závisí pouze na φ, pro všechr body na rovnoběžce je stejný.

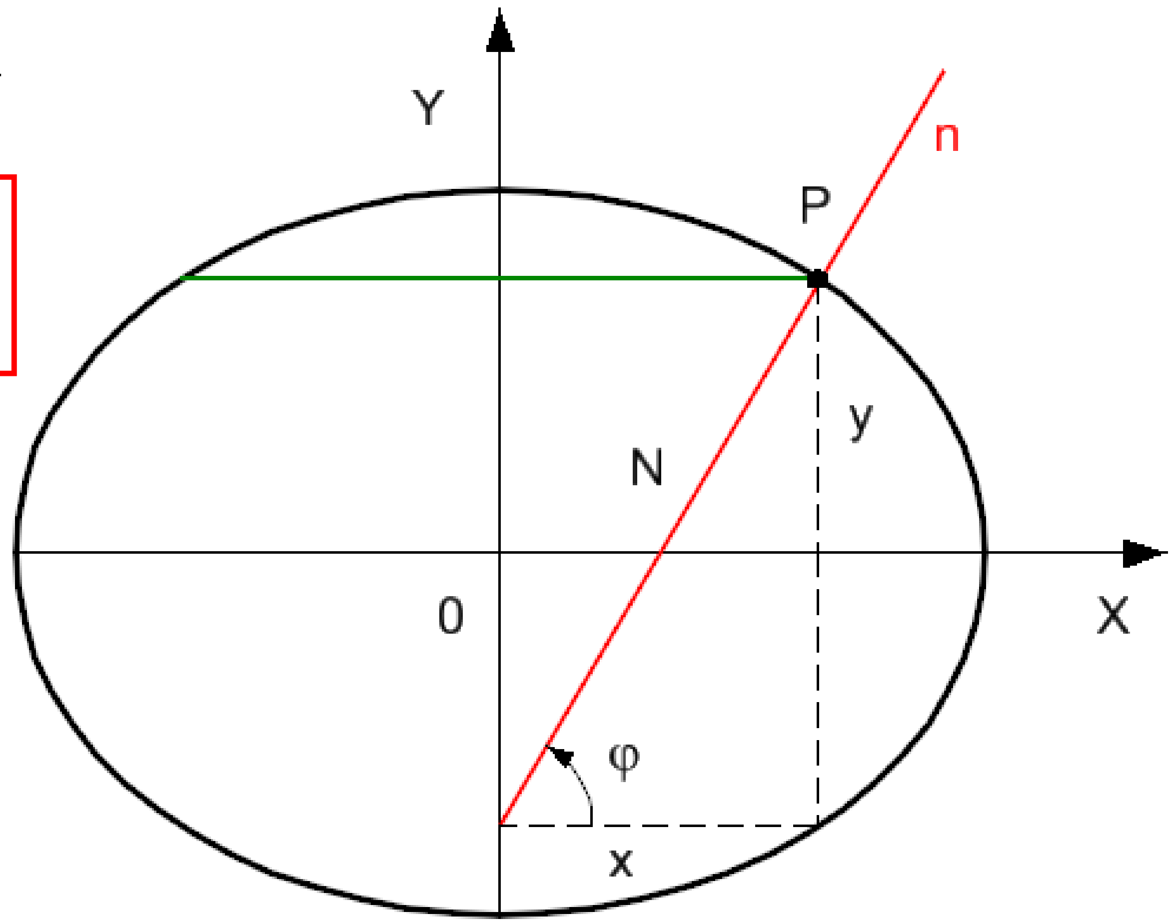


14. Odvození příčného poloměru křivosti N

Platí:

$$\cos\varphi = \frac{x}{N} \Rightarrow N = \frac{x}{\cos\varphi}$$

$$\boxed{N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}} = \frac{a}{W}}$$



15. Střední poloměr křivosti R

Definován jako geometrický průměr z meridiánového a příčného poloměru křivosti.

$$\boxed{R = \sqrt{MN}}$$

R závisí pouze na φ.

Hodnoty R jsou tabelovány pro různé elipsoidy.

V matematické kartografii používán pro výpočet poloměru referenční koule z elipsoidu, tzv. **náhradní koule**.

Pro území ČR a φ=49 ° 30´ a Krasovského elipsoid:

R_m=6 381 561, 267m

16. Výpočet délky poledníkového oblouku na elipsoidu (1/2)

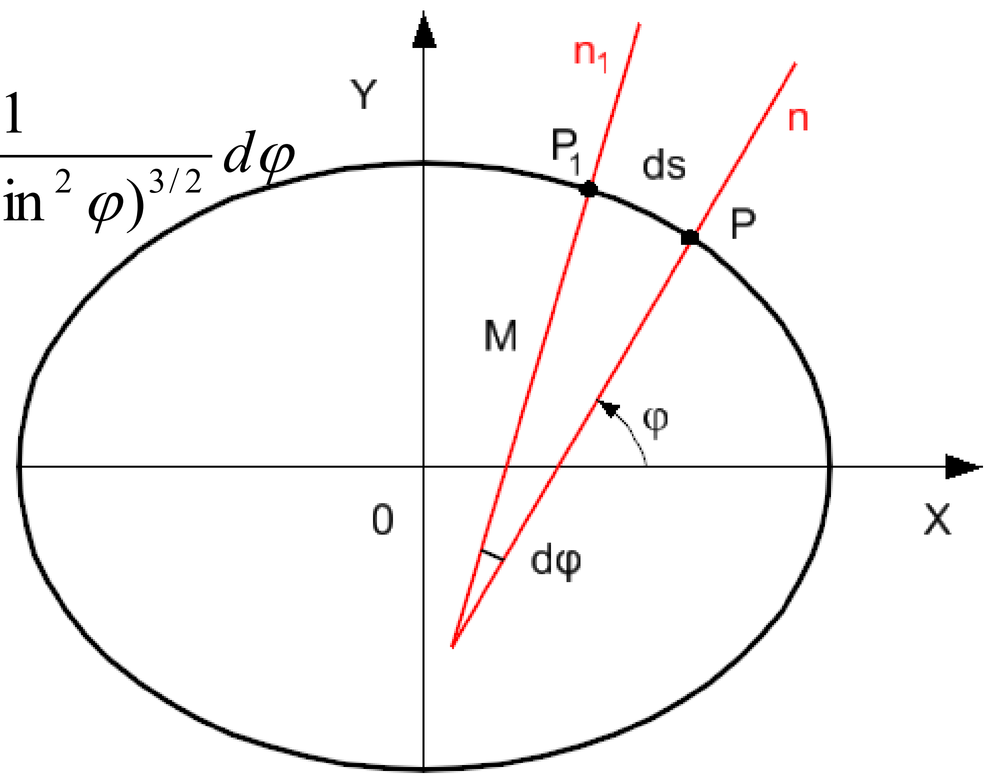
Z bodu P se posuneme do bodu P1 o diferenciální hodnotu vzdálenosti ds.

Zeměpisná šířka φ se změní o hodnotu dφ.

Platí:

$$ds = M d\varphi$$

$$s = \int_0^{\varphi} M d\varphi = a(1-e^2)\int_0^{\varphi} \frac{1}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} d\varphi$$



Eliptický integrál,

Nahrazení řadou za použití binomické věty.

Praktický výpočet je velmi Obtížný.

17. Výpočet délky poledníkového oblouku na elipsoidu (2/2)

$$\boxed{s = A'\varphi^\circ - B'\sin(2\varphi) + C'\sin(4\varphi) - D'\sin(6\varphi) + E'\sin(8\varphi) + \ldots}$$

$$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 +$$

$$B = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \ldots$$

$$C = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \ldots$$

$$D = \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \ldots$$

$$E = \frac{315}{16384}e^8 + \ldots$$

$$A' = \frac{a(1-e^2)}{\rho^\circ}A$$

$$B' = \frac{a(1-e^2)}{2}B$$

$$C' = \frac{a(1-e^2)}{4}C$$

$$D' = \frac{a(1-e^2)}{6}D$$

$$E' = \frac{a(1-e^2)}{8}E$$

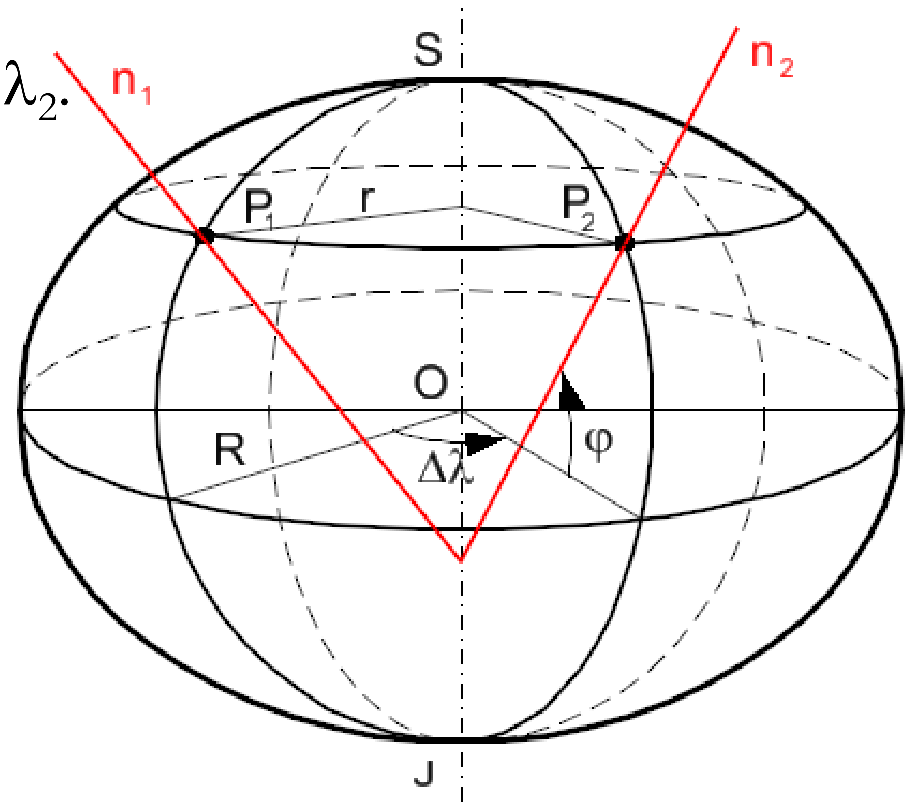
Pro výpočty s přesností 0.1 mm postačuje určit první čtyři členy řady.

18. Výpočet délky rovnoběžkového oblouku.

Poloměr rovnoběžky: r

$$r = N\cos\varphi$$

Délka oblouku s rovnoběžky mezi body o zeměpisných délkách λ_1, λ_2.



$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$$

Platí:

$$\boxed{s = r\Delta\lambda = N\cos\varphi\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{\rho^\circ}}$$

Hodnoty s tabelovány pro φ a $\Delta\lambda$

19. Délka poledníkového/rovnoběžkového oblouku na kouli

Na kouli se vztahy zjednoduší, zejména výpočet délky poledníkového oblouku.

- **Délka poledníkového oblouku**

Mezi body se zeměpisnými šířkami u_s, u_j.

$$\boxed{s_p = \frac{R(u_s - u_j)}{\rho}}$$

- **Délka rovnoběžkového oblouku**

Mezi body o zeměpisných délkách v_1, v_2 ležících na rovnoběžce se zeměpisnou šířkou u.

$$r = R\cos u$$