Matematické metody v kartografii

Přednášky 4, 5

Kartografická zkreslení.

Délkové zkreslení, plošné zkreslení, podmínky konformity.

Tissotova indikatrix.

1. Matematická kartografie (MK)

Zabývá se:

- Matematickými a geometrickými parametry kartografických děl.
- Převodem údajů z jedné referenční plochy (elipsoid, koule) do druhé (rovina kartografického zobrazení, tj. mapa).

Většinou zobrazujeme ze „složitější“ plochy na jednodušší (elipsoid -> rovina).

Obě plochy mají **různou** křivost.

Důsledkem rozdílných křivostí při zobrazování => vznik deformací označovaných jako **kartografická zkreslení**.

Matematická kartografie:

- Studuje vlastnosti a zákonitosti kartografických zkreslení.
- Zabývá se teorií kartografických zobrazení.

2. Kartografické zobrazení

Kartografické zobrazení:

- Předpis, přiřazuje bodu ležícímu na jedné referenční ploše polohu na druhé referenční ploše
- Odvozeno matematickou cestou.
- Existuje několik stovek kartografických zobrazení.

Kartografická projekce:

- Vznik geometrickou cestou, např. promítáním (zpravidla promítáním koule do roviny).
- Známy již ve starověku, např. Ptolemaiovo zobrazení

Popsány **zobrazovacími rovnicemi:**

$$x = f(\varphi, \lambda) \qquad x = f(u, v)$$
$$y = g(\varphi, \lambda) \qquad y = g(u, v)$$

Vlastnosti:

- Souřadnice x,y obecně funkcí u, v (v některých případech funkcí jenom u nebo v).
- Pól je singulární bod vzhledem k zavedené soustavě kulových souřadnic x_k, y_k, z_k:
- $$\dot{x}_u = \left(\frac{\partial x_k}{\partial u}(\pi/2), \frac{\partial y_k}{\partial u}(\pi/2), \frac{\partial z_k}{\partial u}(\pi/2)\right) \Rightarrow \dot{x}_u, \dot{x}_v \ LZ$$
$$\dot{x}_v = \left(\frac{\partial x_k}{\partial v}(\pi/2), \frac{\partial y_k}{\partial v}(\pi/2), \frac{\partial z_k}{\partial v}(\pi/2)\right)$$
- Funkce f, g ne vždy spojité, diferencovatelné na intervalech $u \in \langle 0, \pm\frac{\pi}{2} \rangle, v \in \langle 0, \pm\pi \rangle$

3. Kartografická měřítka a zkreslení

=důsledek zobrazení na plochy s různými křivostmi.

Měřítko vs. zkreslení:

- Měřítko představuje poměr diferenciálních délkových nebo plošných elementů.
- Měřítko je bezrozměrné, není přepočítáno na délkovou či plošnou hodnotu.
- Zkreslení ukazuje vliv měřítka, je přepočteno na délkovou či plošnou hodnotu.
- Zkreslení se udává v délkových, plošných či úhlových jednotkách.

Měřítko:

- Měřítko délek: $\boldsymbol{m}$
- Měřítko ploch: $\boldsymbol{P}$

Zkreslení:

- Délkové zkreslení: $\boldsymbol{m-1}$
- Úhlové zkreslení: $\boldsymbol{\Delta\omega}$
- Plošné zkreslení: $\boldsymbol{P-1}$ (příliš se nepoužívá)

4. Délkové zkreslení

- **Měřítko délek m:**

Poměr diferenciálních vzdáleností v obraze a originále. Bezrozměrné číslo.

$$m = \frac{dS}{ds}$$

Hodnoty m:

m=R+{0}

m se ve většině případů blíží 1

- **Zkreslení délek:**

Udává vliv měřítka na délkovou jednotku.

Nejčastěji ve tvaru: cm/km, dm/km

>0: Zobrazení prodlužuje délky

<0: Zobrazení zkracuje délky

$$(m-1)s$$

Příklad:

m=0.9999985 m-1=-0.000015 m-1/km=-1.5 cm/km.

- **Ekvidistantní zobrazení:**

Nezkresluje délky, ale pouze v určitém směru, např. m_p=1.

Neexistuje zobrazení, které by nezkreslovalo všechny délky.

5. Plošné zkreslení

- **Měřítko ploch P**

Poměr diferenciálních plošných elementů v obraze a originálu. Bezrozměrné.
P ve většině případů >>1

$$P = \frac{dP}{dp}$$

- **Plošné zkreslení:**

Udává vliv měřítka ploch na plošnou jednotku
Příliš často se nepoužívá.

- **Ekvivalentní (plochojevné zobrazení)**

Nezkresluje plochy.
Použito pro politické mapy světa.

- **Obecný vztah pro měřítko ploch:**

Rovno součinu měřítka délek v poledníku, rovnoběžce
a sinu úhlu mezi obrazem poledníku a rovnoběžky (odvození viz dále).

$$P = m_p m_r \sin \omega'$$

6. Úhlové zkreslení

- **Úhlové zkreslení Δω**

Rozdíl úhlu mezi dvěma soustavami křivek v obraze ω´ a úhlem ω jejich obrazů. Nejčastěji se vyjadřuje ve stupních.

$$\Delta\omega = \omega' - \omega$$

- **Konformní (úhlojevná) zobrazení**

Nezkreslují úhly, Δω=0.

Použití v geodézii, mapy velkých měřítek.

Prakticky všechna zobrazení pro geodézii konformní (mimo Cassini-Soldnerova).

- **Vztah mezi zkreslením délek, úhlů, ploch:**

Konformní zobrazení: maximálně zkreslují plochy.

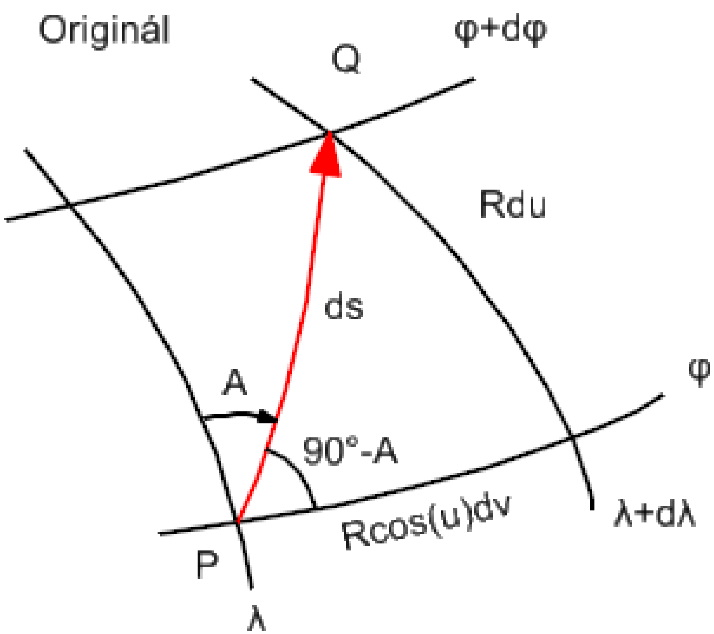
Ekvivalentní zobrazení: maximálně zkreslují úhly.

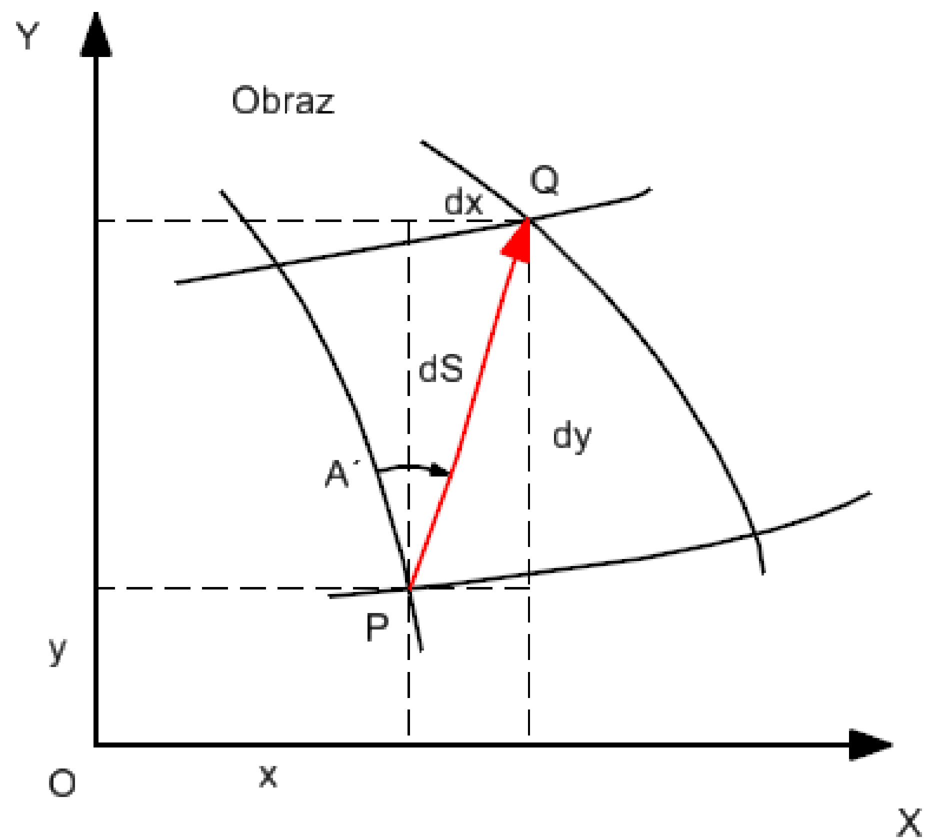
Kompenzační (vyrovnávací) zobrazení: zkreslují vše, ale plochy zkreslují méně než konformní zobrazení a úhly zkreslují méně než ekvivalentní zobrazení.

7. Odvození délkového zkreslení (1/3)

Z bodu P se posunem do Q o délkový element ds.

Tomu v obraze odpovídá posun o dS.





7. Odvození délkového zkreslení 2/3

Délkové elementy v obraze, originále, měřítko:

$$ds^2 = R^2 \cos^2 u \, \mathrm{dv}^2 + R^2 \, \mathrm{du}^2$$

$$dS^2 = dx^2 + dy^2$$

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{R^2 \, \mathrm{du}^2 + R^2 \cos^2 u \, \mathrm{dv}^2}$$

Hodnoty dx, dy představují totální diferenciály zobrazovacích rovnic:

$$dx = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = f_u du + f_v dv$$

$$dy = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv = g_u du + g_v dv$$

Platí: $\sin A = \frac{R \cos u \, \mathrm{d} v}{\mathrm{ds}} \Rightarrow \mathrm{d} v = \frac{\mathrm{ds} \sin A}{R \cos u}$

$$\cos A = \frac{R \mathrm{du}}{\mathrm{ds}} \Rightarrow \mathrm{d} u = \frac{\mathrm{ds} \cos A}{R}$$

Platí:

$$m^2 = \frac{(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv)^2 + (\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv)^2}{ds^2} = \frac{[(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2] \mathrm{du}^2 + [(\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2] \mathrm{dv}^2 + 2(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}) \mathrm{du}\,\mathrm{dv}}{ds^2}$$

8. Odvození délkového zkreslení 3/3

Dosadíme za du, dv

$$m^2 = \frac{[(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2](\frac{\mathrm{ds}\cos A}{\cos u})^2 + [(\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2](\mathrm{ds}\sin A)^2 + 2(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v})\frac{\mathrm{ds}\cos A}{R\cos u}\mathrm{ds}\sin A}{ds^2}$$

Po úpravě výsledný vztah pro měřítko délek:

$$m^2 = \frac{(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2}{R^2}\cos^2 A + \frac{(\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2}{R^2\cos^2 u}\sin^2 A + \frac{2(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v})}{R^2\cos u}\sin A\cos A$$

$$\boxed{m^2 = \frac{fu^2 + gu^2}{R^2}\cos^2 A + \frac{fv^2 + gv^2}{R^2\cos^2 u}\sin^2 A + \frac{2(fufv + gugv)}{R^2\cos u}\sin A\cos A}$$

Koeficienty s parciálními derivacemi nazýváme **Gaussovými koeficienty**.

9. Délkové zkreslení v poledníku a v rovnoběžce

Délkové zkreslení je funkcí:

a) Polohy bodu (tj. u, v)

b) Azimutu A

Pro poledník platí:

A=0°

Vzorec se zjednoduší, vypadnou některé členy.

Měřítko délek v poledníku m_p.

$$m_p^2 = \frac{fu^2 + gu^2}{R^2}$$

Pro poledník platí:

A=90°

Vzorec se zjednoduší, opět vypadnou některé členy.

Měřítko délek v rovnoběžce m_r.

$$m_r^2 = \frac{fv^2 + gv^2}{R^2 \cos^2 u}$$

Hodnoty m_p, m_p velmi důležité, z nich lze odvodit všechna další zkreslení (plošná i úhlová) !!!.

10. Podmínky konformity (1/2)

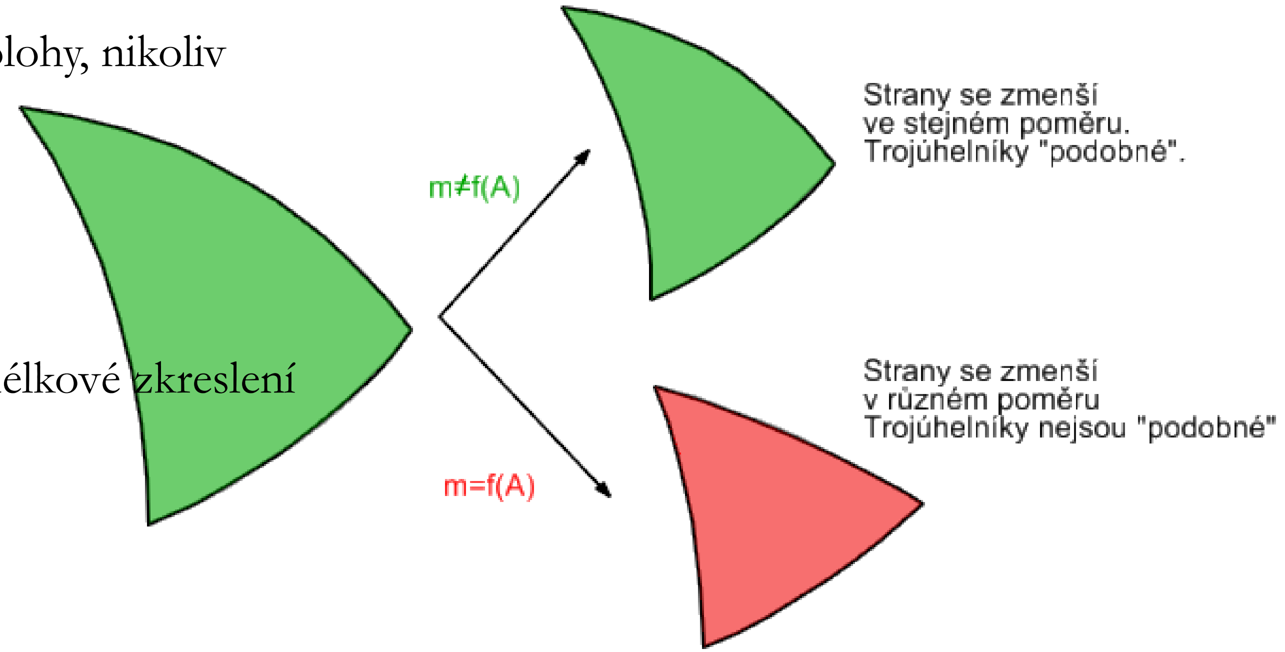
Dosazením za m_p a m_r do rovnice pro měřítko délek získáme nový vztah.

$$m^2 = m_p^2 \cos^2 A + m_r^2 \sin^2 A + p \sin A \cos A$$

Z něj lze vyvodit podmínku konformity.

Podmínka konformity:
Délkové zkreslení funkcí polohy, nikoliv azimutu

$$m_p = m_r \cap p = 0$$



U konformních zobrazení délkové zkreslení nezávisí na azimutu.
Pro měřítko délek platí:

$$m = m_p = m_r$$

11. Extrémné délkové zkreslení (1/2)

Pokud se poloha bodu nemění, u nekonformního zobrazení je měřítko délek pouze funkcí azimutu.

Hledáme, pro který azimut bude měřítko délek extrémní (maximální nebo minimální).

Určíme jej prostřednictvím derivace m podle A:

$$\frac{\partial m}{\partial A} = -2m_p^2 \sin A \cos A + 2m_r^2 \sin A \cos A + p(\cos^2 A - \sin^2 A) = 0$$

Po úpravě:

$$\boxed{tg 2A = \frac{p}{m_p^2 - m_r^2}}$$

Nutno druhou derivací ověřit, zda se jedná o maximum či minimum !!!

12. Extrémné délkové zkreslení (1/2)

Dva azimuty, pro které hodnota délkového zkreslení extrémní: $A\varepsilon_1$ $A\varepsilon_2$

$$A_{\varepsilon 1} = A_{\varepsilon 1} - 90^{\circ}$$ **-> jsou na sebe kolmé**

V azimutu $A\varepsilon_1$ je délkové zkreslení největší a je rovno m_{max},
v azimutu $A\varepsilon_2$ je délkové zkreslení nejmenší a je rovno m_{min} (popř. naopak).

Hlavní paprsky

- Udávají extrémní hodnoty délkového zkreslení: $a=m_{max}$, $b=m_{min}$ azimutech $A\varepsilon_1$ $A\varepsilon_{2.}$
- Jediné dvojice prvků, které (u nekonformních zobrazení) svírají pravý úhel v obraze i originále
- Pro konformní zobrazení platí: a=b

13. Výpočet hlavních paprsků

Lze je určit z rovnice pro měřítko délek, do které dosadíme hodnoty $A\varepsilon_1$ $A\varepsilon_2$

Platí:

$$m^2_{A_{\varepsilon 1}} = \frac{(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2}{R^2} \cos^2 A_{\varepsilon 1} + \frac{(\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2}{R^2 \cos^2 u} \sin^2 A_{\varepsilon 1} + \frac{2(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v})}{R^2 \cos u} \sin A_{\varepsilon 1} \cos A_{\varepsilon 1}$$

$$m^2_{A_{\varepsilon 2}} = \frac{(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2}{R^2} \cos^2 A_{\varepsilon 2} + \frac{(\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2}{R^2 \cos^2 u} \sin^2 A_{\varepsilon 2} + \frac{2(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v})}{R^2 \cos u} \sin A_{\varepsilon 2} \cos A_{\varepsilon 2}$$

Resp.:

$$m^2_{A_{\varepsilon 1}} = m_p^2 \cos^2 A_{\varepsilon 1} + m_r^2 \sin^2 A_{\varepsilon 1} + p \sin A_{\varepsilon 1} \cos A_{\varepsilon 1}$$

$$m^2_{A_{\varepsilon 2}} = m_p^2 \cos^2 A_{\varepsilon 2} + m_r^2 \sin^2 A_{\varepsilon 2} + p \sin A_{\varepsilon 2} \cos A_{\varepsilon 2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \max(m_{A_{\varepsilon 1}}, m_{A_{\varepsilon 2}}) \\ b &= \min(m_{A_{\varepsilon 1}}, m_{A_{\varepsilon 2}}) \end{aligned}}$$

14. Zkreslení azimutu

Dány body P,Q ležící na ortodromě.

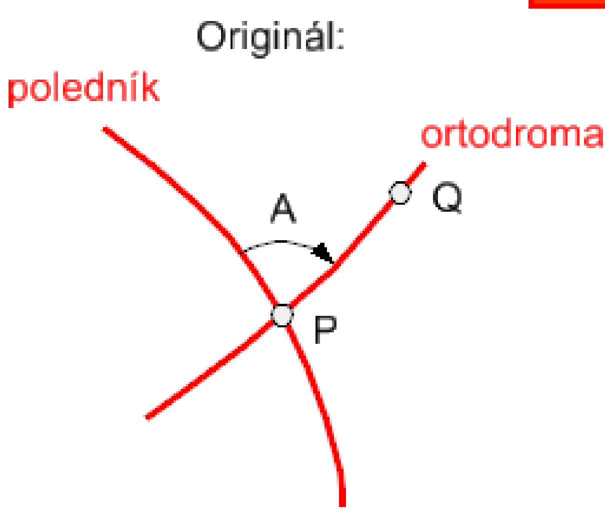
V originálu azimut ortodromy A.

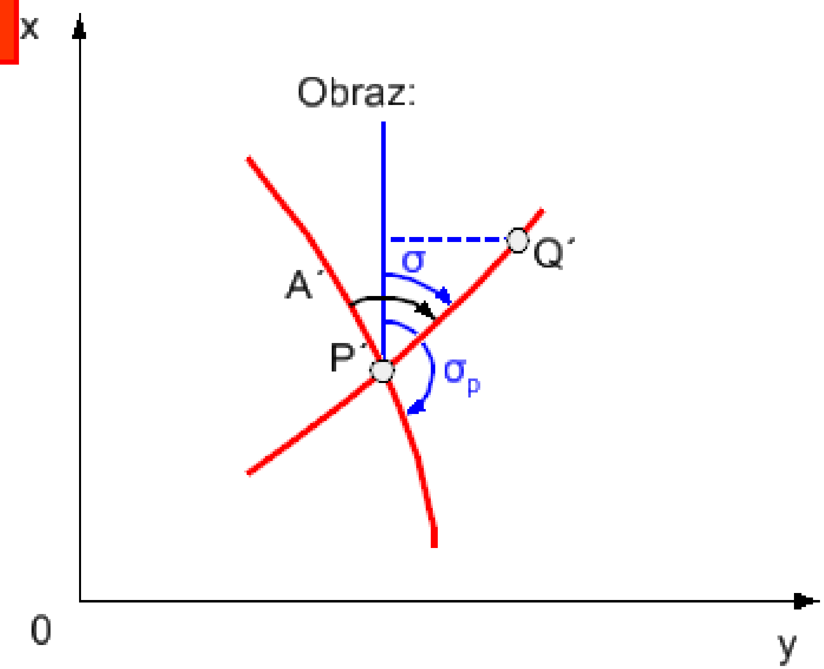
V obraze azimut obrazu ortodromy A´, směrnice obrazu ortodromy σ, směrnice obrazu poledníku σ_p.

Platí:

$$A' = 180 - (\sigma_p - \sigma)$$

$$\sigma_p - \sigma = 180 - A'$$





15. Odvození vztahů

Platí:

$$tg(180 - A') = tg(\sigma_p - \sigma)$$

$$tg(180 - A') = \frac{tg\sigma_p - tg\sigma}{1 + tg\sigma_p tg\sigma}$$

$$tg\sigma = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv}{\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv}$$

Dosadíme:

$$\cos A = \frac{R\cos u\,\mathrm{d}u}{\mathrm{ds}} \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{ds}\cos A}{R\cos u}$$

$$\sin A = \frac{R\mathrm{dv}}{\mathrm{ds}} \Rightarrow \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{ds}\sin A}{R}$$

Pak:

$$tg\sigma = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}\cos u\cos A + \frac{\partial y}{\partial v}\sin A}{\frac{\partial x}{\partial u}\cos u\cos A + \frac{\partial x}{\partial v}\sin A}$$

Směrnice obrazu poledníku:

Pro A=0°

$$\boxed{tg\sigma_p = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}} = \frac{gu}{fu}}$$

Směrnice obrazu rovnoběžky:

Pro A=90°

$$\boxed{tg\sigma_r = \frac{\frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial v}} = \frac{gv}{fv}}$$

16. Zkreslení úhlu mezi poledníkem a rovnoběžkou

Vyjdeme ze vztahu pro zkreslení azimutu, ortodromu nahradíme rovnoběžkou.

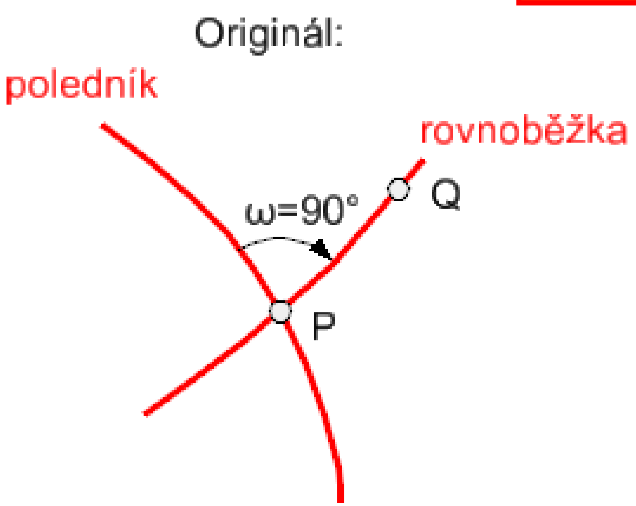
V originálu úhel mezi poledníkem a rovnoběžkou $\omega = 90°$.

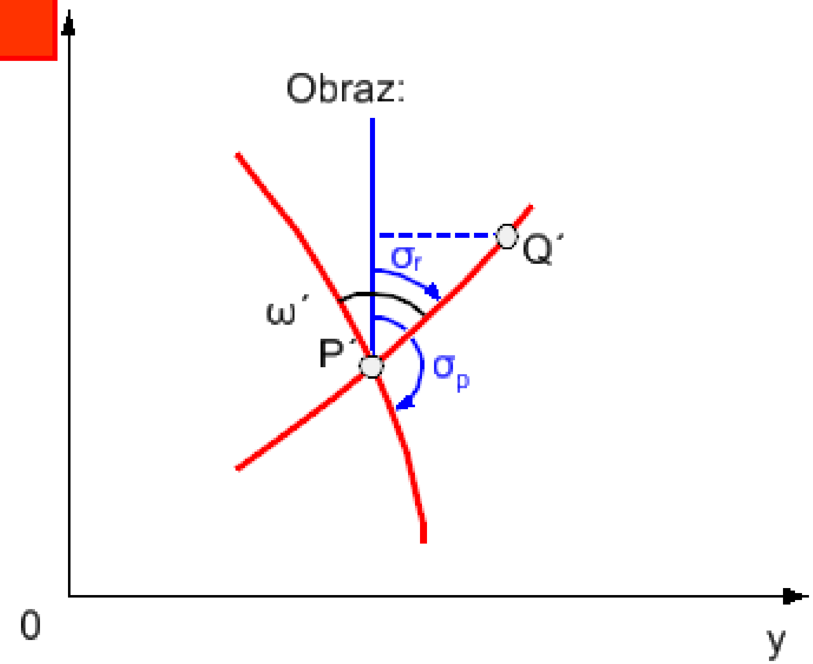
V obraze úhel mezi obrazem poledníku a rovnoběžky ω'. Směrník poledníku σ_p, směrník rovnoběžky σ_r.

$$\Delta\omega = \omega' - \omega = \omega' - 90^\circ$$

$$\omega' = 180 - (\sigma_p - \sigma_r)$$

$$\sigma_p - \sigma_r = 180 - A'$$





17. Odvození vztahu

Princip odvození podobný jako v předchozím případě:

$$\mathrm{tg}(180-\omega')=tg(\sigma_p-\sigma_r)$$

$$\mathrm{tg}(180-\omega')=\frac{tg\sigma_p-tg\sigma_r}{1+tg\sigma_p tg\sigma_r}$$

$$\mathrm{tg}\,\sigma_r=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial v}}=\frac{gv}{fv} \qquad \mathrm{tg}\,\sigma_p=\frac{\frac{\partial g}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u}}=\frac{gu}{fu}$$

Po dosazení:

$$\mathrm{tg}(180-\omega')=\frac{\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v}}$$

$$\mathrm{tg}(180-\omega')=\frac{gufv-gvfu}{fufv+gugv}$$

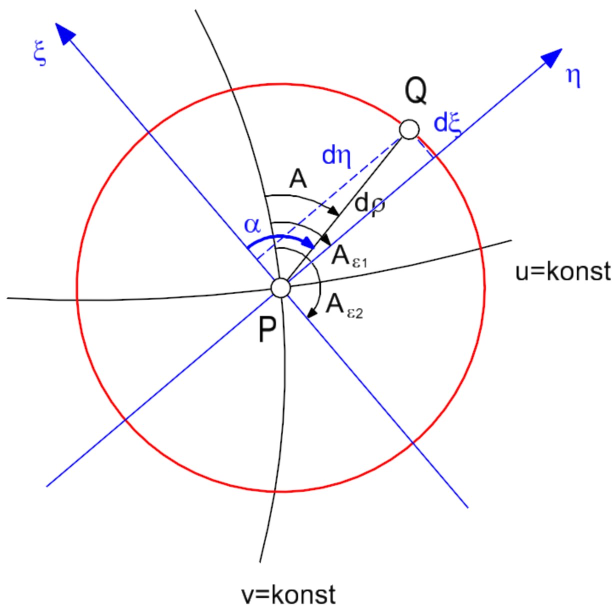
Ortogonální zobrazení :
Úhel mezi poledníkem a rovnoběžkou je roven 90.
Všechna jednoduchá zobrazení + konformní zobrazení jsou ortogonálni.

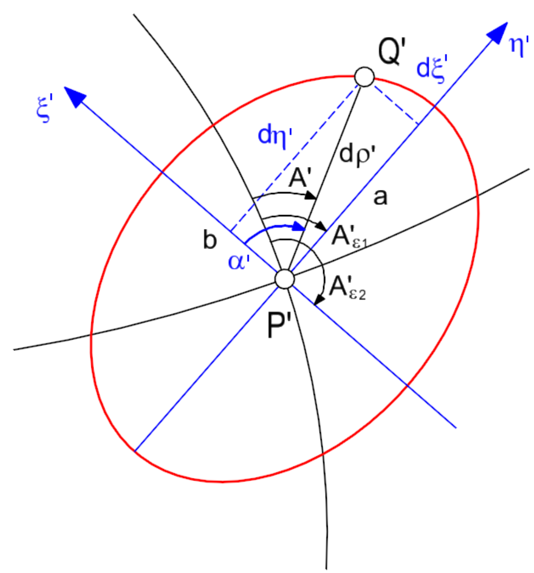
18. Maximální úhlové zkreslení

Zkreslení úhlu Δω lze vyjádřit jako zkreslení směru $\Delta\alpha_1$ a $\Delta\alpha_2$.
Úhlové zkreslení je tedy funkcí směru α.'

$$\Delta\omega = \omega' - \omega,$$
$$\omega = \alpha_2 - \alpha_1, \omega' = \alpha'_2 - \alpha'_1,$$
$$\Delta\omega = \alpha'_2 - \alpha'_1 - (\alpha_2 - \alpha_1) = \alpha'_2 - \alpha_2 + \alpha_1 - \alpha'_1 = \Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_1,$$
$$\Delta\omega = f(a,b).$$

Souřadnicový systém (0,ξ,γ).
Osy ve směru hlavních paprsků.
Souřadnicový systém v obraze (0,ξ',γ').





$$m_\xi = \frac{d\xi'}{d\xi} = a,$$
$$m_\gamma = \frac{d\gamma'}{d\gamma} = b,$$
$$\tan\alpha = \frac{d\gamma}{d\xi},$$
$$\tan\alpha' = \frac{d\gamma'}{d\xi'} = \frac{b}{a}\tan\alpha.$$

19. Maximální úhlové zkreslení

$$\Delta\alpha = \alpha' - \alpha = \arctan\left[\frac{b}{a}\tan\alpha\right] - \alpha = \min,$$

$$\frac{\partial\Delta\alpha}{\partial\alpha} = \frac{b}{a}\frac{1}{\cos^2\alpha}\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}\tan^2\alpha} - 1 = 0.$$

$$\sin^2\alpha = \frac{a}{a+b}, \cos^2\alpha = \frac{b}{a+b}, \tan\alpha = \sqrt{\frac{a}{b}}, \tan\alpha' = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Ze sinu rozdílu argumentů:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

$$\sin(\alpha' - \alpha) = \sin\alpha'\cos\alpha - \cos\alpha'\sin\alpha = \frac{\tan\alpha' - \tan\alpha'}{\sqrt{1+\tan^2\alpha'}\sqrt{1+\tan^2\alpha}},$$

Maximální úhlové zkreslení:

$$\sin\frac{\Delta\omega}{2} = \left|\frac{b-a}{b+a}\right| = \boxed{\frac{|b-a|}{b+a}}$$

Platí:

$$\alpha'_2 - \alpha_2 = \alpha'_1 - \alpha_1,$$

$$|\alpha'_2 - \alpha_2| = |\alpha_1 - \alpha'_1|,$$

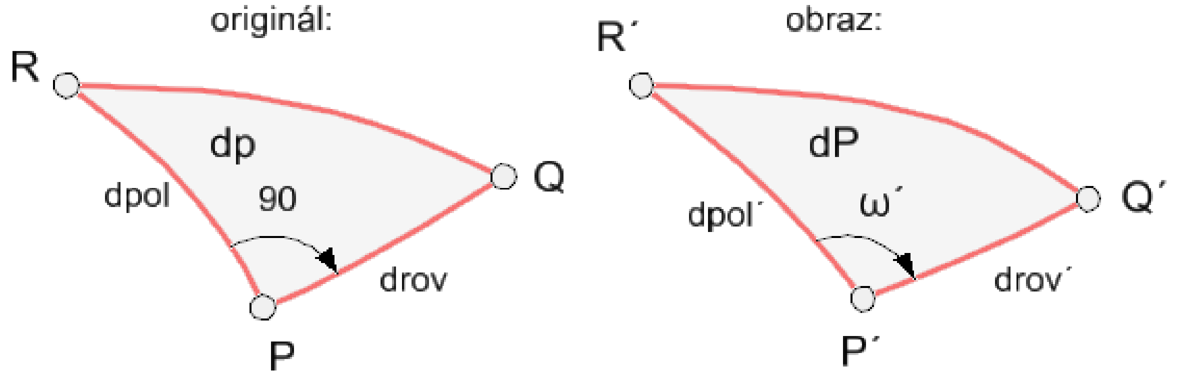
$$\Delta\omega = |\alpha'_2 - \alpha_2| + |\alpha_1 - \alpha'_1| = 2|\alpha' - \alpha|,$$

$$\frac{\Delta\omega}{2} = |\alpha' - \alpha|,$$

$$\sin(\frac{\Delta\omega}{2}) = \sin(|\alpha' - \alpha|)$$

20. Odvození plošného zkreslení

Na sféře dán sférický trojúhelník určený trojicí vrcholů: P, Q, R.
Zobrazí se na trojúhelník P´, Q´, R´



Vyjdeme ze vztahu pro plošné zkreslení:

$$P = \frac{\frac{1}{2}dpol'drov'\sin\omega'}{\frac{1}{2}dpoldrov} = m_p m_r \sin\omega',$$

$$\sin\omega' = \frac{\tan\omega'}{\sqrt{1+\tan^2\omega'}},$$

$$\tan\omega' = \frac{\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v}}$$

Pro kartografická zobrazení platí:

- Ekvidistantní: $m_p=1$
- Konformní: $m_p=m_r \Rightarrow P=m_p*m_p$
- Ekvivalentní: $m_p*m_r=1$ (jednoduché)

21. Odvození plošného zkreslení

$$\sin\omega' = \frac{\tan\omega'}{\sqrt{1+\tan^2\omega'}} = \frac{\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}-\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial u}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}+\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial g}{\partial v}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}-\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial u}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}+\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial g}{\partial v}}\right)^2}} = \frac{\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}-\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial u}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}+\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial g}{\partial v}}}{\sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)^2+2\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial g}{\partial v}+\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^2-2\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial g}{\partial v}}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}+\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)^2}}},$$

$$\sin\omega' = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}-\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial u}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^2}},$$

$$P = \frac{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)^2}}{R}\frac{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)^2}}{R\cos u}\frac{\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}-\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial u}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^2}},$$

$$\boxed{P = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}-\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial u}}{R^2\cos u}}$$

22. Tissotova indikatrix

Délkové zkreslení v bodě je funkcí azimutu, pohybuje se v intervalu $<m_{min},m_{max}>$.

Obrazem nekonečně malé kružnice je v důsledku zkreslení elipsa.

Označujeme ji jako elipsu zkreslení nebo **Tissotovu indikatrix**.

Vlastnosti:

- Znázorňuje průběh délkového zkreslení v závislosti na azimutu.
- U konformních zobrazení je kružnicí (délkové zkreslení není funkcí azimutu)

Parametry (nečárkované v originálu, čárkované v obraze):

a,b… velikost hlavní a vedlejší poloosy (hlavní paprsky)

$A\varepsilon_1$ $A\varepsilon_2$ …azimuty extrémních délkových zkreslení

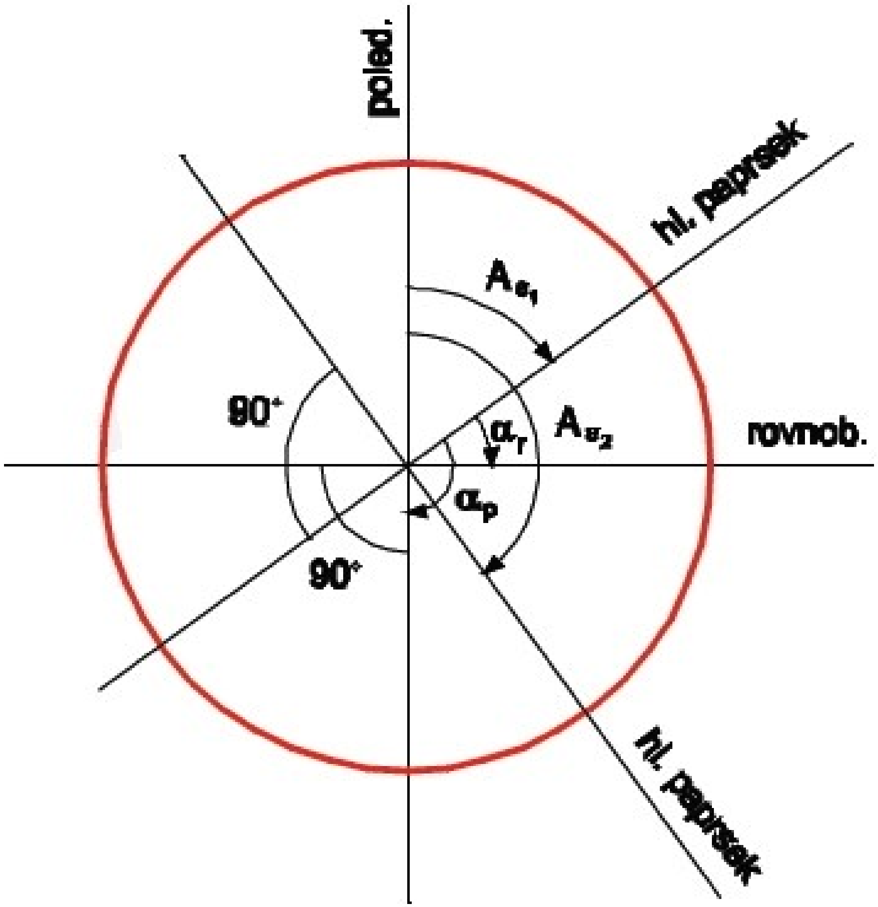
α_p, α_r … směr obrazu poledníku, rovnoběžky od hlavního paprsku.

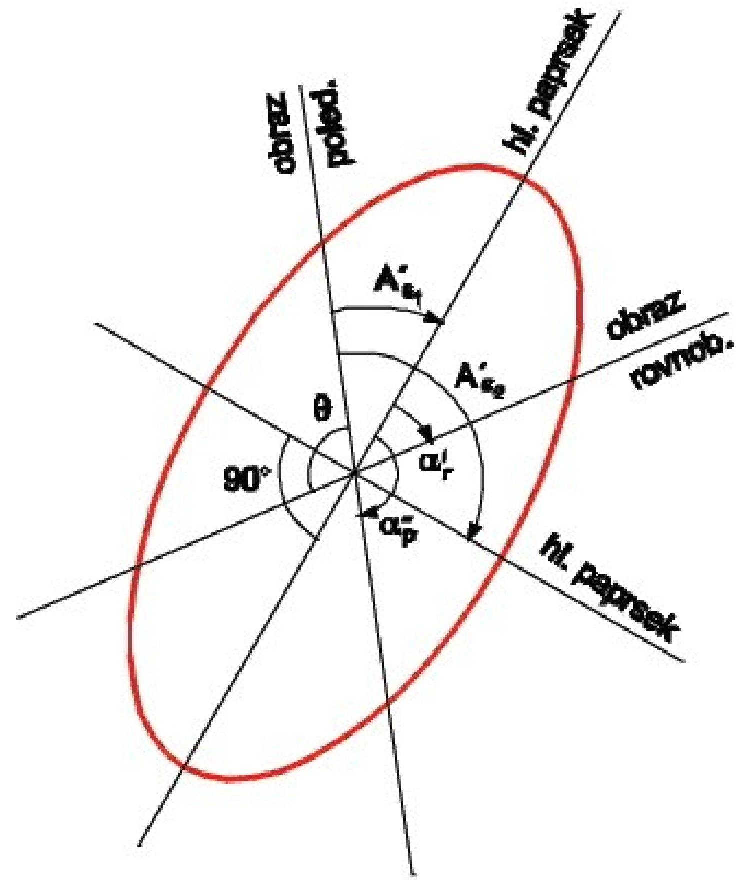
Vztah mezi azimuty a jejich obrazy:

$$\operatorname{tg} A'_{\varepsilon 1} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} A_{\varepsilon 1}$$

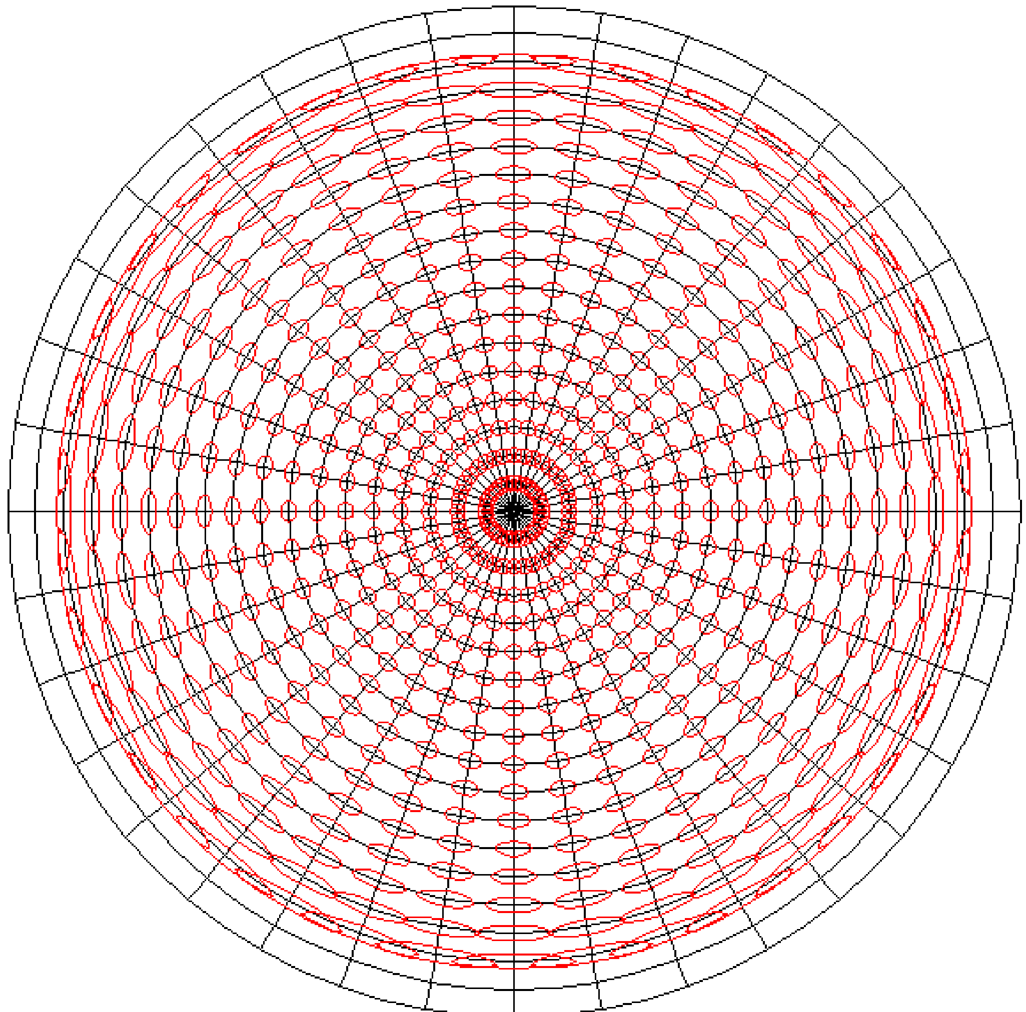
$$\operatorname{tg} A'_{\varepsilon 2} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} A_{\varepsilon 2}$$

23. Tissotova indikatrix v originále / obraze





24. Ukázka Tissotových indikatrix azimutálního ekvidistantního zobrazení



Geografická síť + Tissotovy indikatrix. Normální poloha. Interval generování indikatrix <-70°,90°>.

25. Měřítko mapy funkcí polohy

Měřítkové číslo mapy *M(u,v)* fcí polohy.

Poměr dif. elementů délky ve skutečnosti ds_k a na mapě d$S(u,v)$.

Hodnota d$S(u,v)$ ovlivněna zkreslením.

$$M(u,v) = \frac{ds_k}{dS(u,v)}$$

Měřítko (kartografické):

$$m(u,v) = \frac{dS(u,v)}{ds} \Rightarrow dS(u,v) = m(u,v) \cdot ds$$

Měřítkové číslo mapy:

$$M(u,v) = \frac{ds_k}{m(u,v)ds} = \frac{M}{m(u,v)}$$

Proměnlivá veličina, může se měnit o desítky/stovky procent.

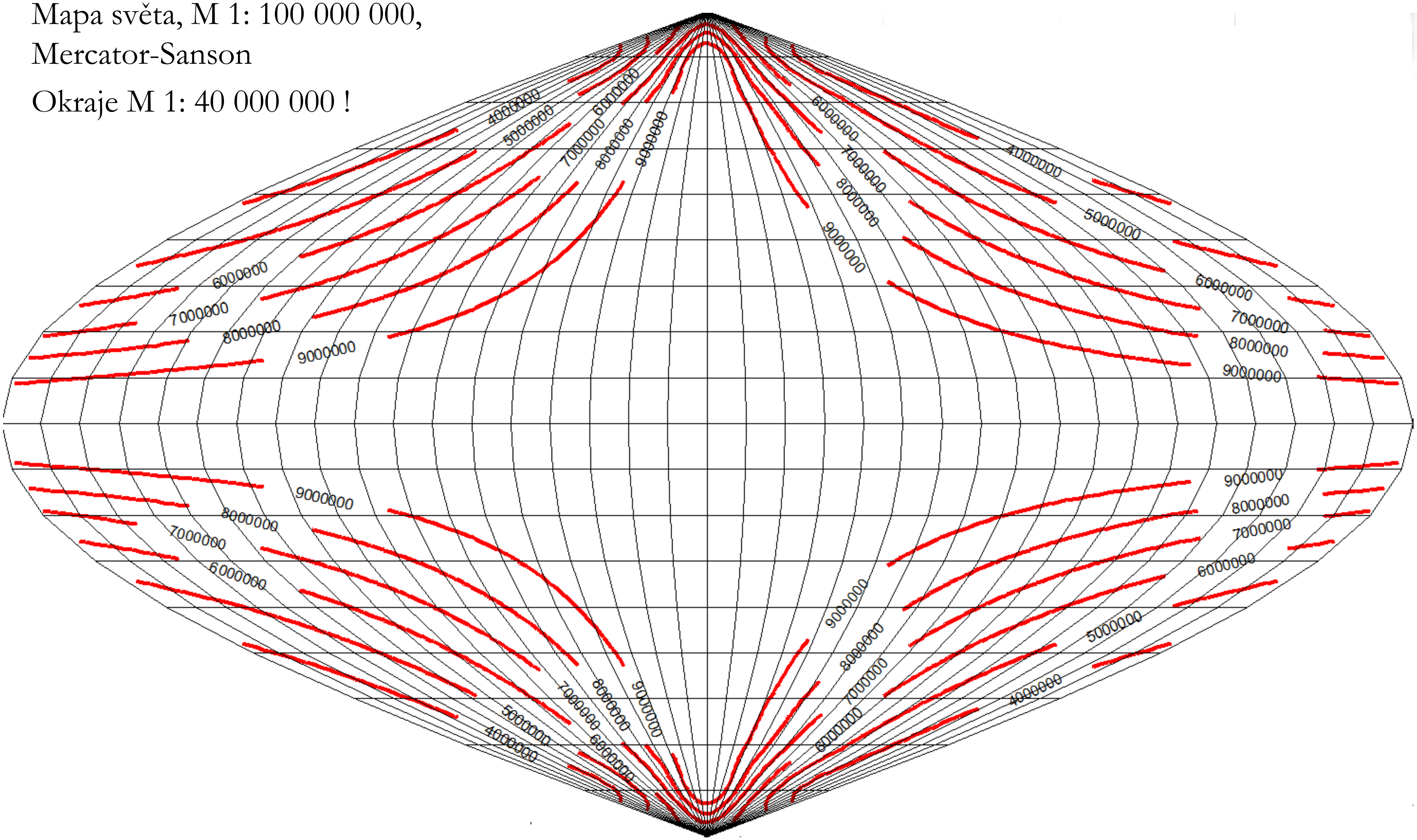
Díky zkreslení se směrem okrajům délky zkreslují (zvětšují, m>1).

Pozor při odměřování vzdáleností z map !!!

26. Měřítko mapy jako funkce polohy

Mapa světa, M 1: 100 000 000,
Mercator-Sanson

Okraje M 1: 40 000 000 !



27. Kartografická zkreslení, závěr

Kartografická zkreslení závisí na:

- Typu kartografického zobrazení.
- Poloze zobrazovací plochy.
- Tvaru zobrazovaného území.
- Vzdálenosti bodu od základního poledníku či nezkreslené rovnoběžky.

Kartografická zkreslení a vnímání mapy:

- *Korektní vizuální vjem mapy*

Zkreslení délek, ploch, úhlů do 8%.

- *Vizuální porovnání dvou map*

Zkreslení délek, ploch, úhlů do 3%.

- *Kartometrická analýza map*

Zkreslení délek, ploch, úhlů do 0.5%.