Matematické metody v kartografii

Jednoduchá kuželová zobrazení.

Křovákovo zobrazení.

(8.+9.)

1. Jednoduchá kuželová zobrazení

Společné vlastnosti:

- Jednoduchá zobrazení, zobrazují na plášť kužele.
- Použita pro velkoměřítkové mapy (kuželové konformní zobrazení)
- Obrazem poledníků úsečky, svírají menší úhly než ve skutečnosti $\omega' < \omega$
- Obrazy poledníků se stýkají se v obrazu pólu.
- Obrazy rovnoběžek: části koncentrických kružnic, střed v obrazu pólu.
- Symetrie vzhledem k poledníku, nikoliv vzhledem k rovníku.
- Ekvideformáty: obrazy zeměpisných/kartografických rovnoběžek
- Délkové zkreslení roste v obou směrech od nezkreslené rovnoběžky , a to nesymetricky.
- Vhodná pro protáhlá území kolem dotykové rovnoběžky.
- Obraz pólu: bod, část kružnice, nezobrazí se.

2. Souřadnicový systém

Typ souřadnicového systému:

- Polární
- Pravoúhlý

Počátek souřadnicového systému:

a) V obrazu pólu

b) V průsečíku obrazu základní rovnoběžky a místního poledníku.

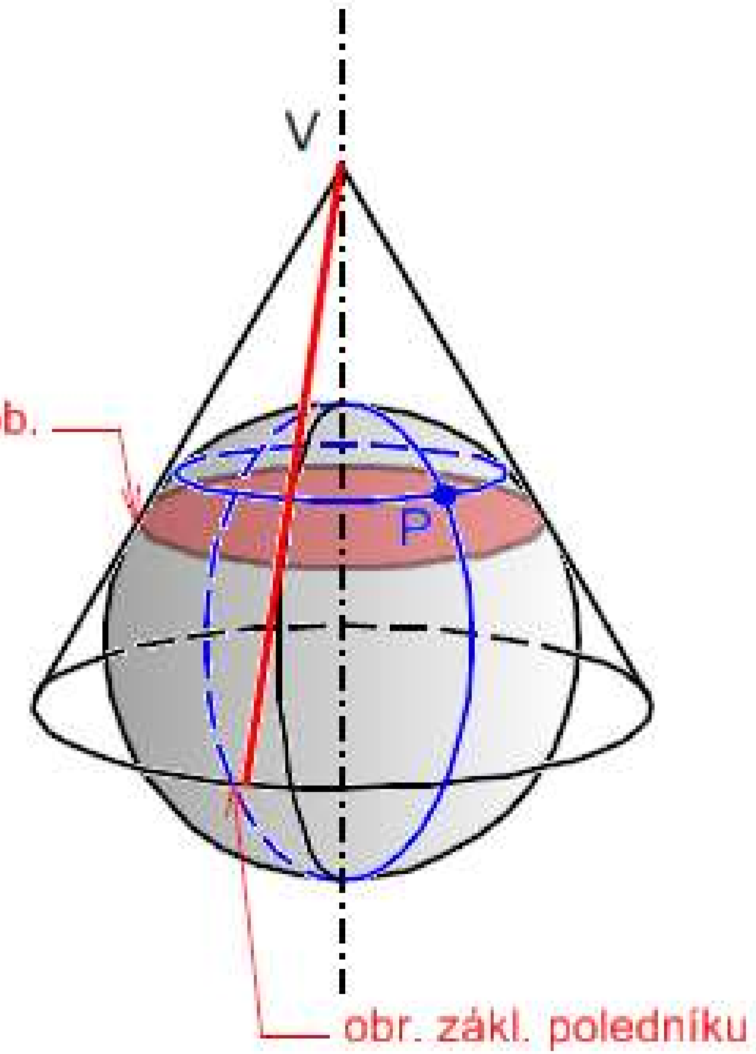
c) Ad a), b) +posunutí o adiční konstanty

Orientace souřadnicových os x,y:

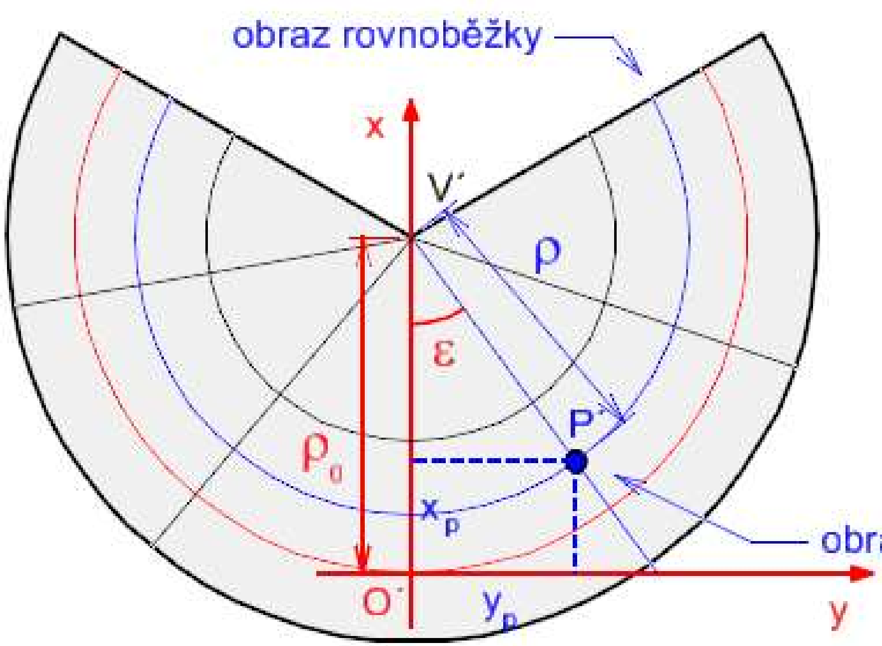
a) Matematický systém (x=>V, y=>S).

b) Matematický systém: x⇔y

c) Speciální orientace: x=>J, y=>Z, JTSK.



3. Počátek v průsečíku obrazu poledníku a dotykové rovnoběžky



Orientace os:

x⇔y

Symbolika:

ρ...poloměr obrazu rovnoběžky v bodě P´

ε... úhel mezi obrazem zákl. a místního poledníku.

ρ_0… poloměr základní rovnoběžky

x … obraz základního poledníku

y … kolmice k obrazu základního poledníku

Vztah mezi polárními a pravoúhlými souřadnicemi:

$$x = \rho_0 - \rho \cos \varepsilon \qquad \rho = \sqrt{(x - \rho_0)^2 + y^2}$$

$$y = \rho \sin \varepsilon \qquad \varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{y}{\rho_0 - x}$$

4. Počátek v obrazu kartografického pólu

Orientace os:

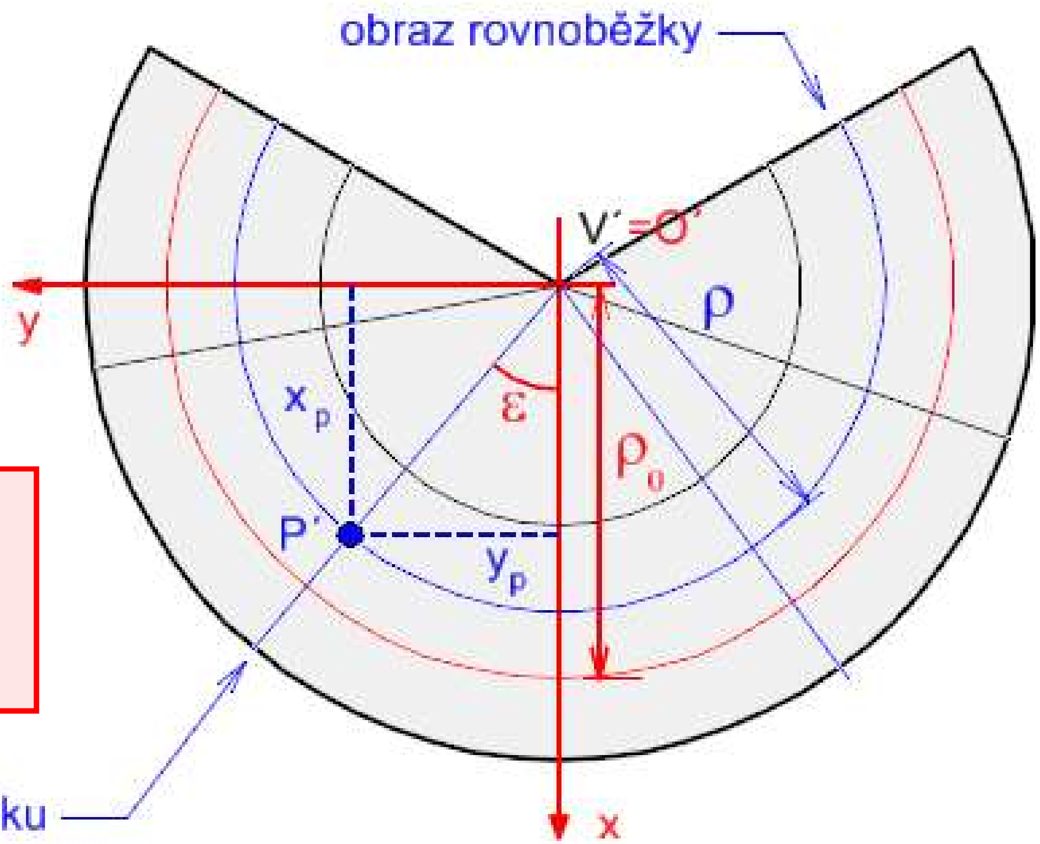
- x k jihu
- y na západ

Použití: JTSK

Vztah mezi polárními a pravoúhlými souřadnicemi:

$$x = \rho \cos \varepsilon \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = \rho \sin \varepsilon \qquad \varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$



5. Zobrazovací rovnice

Jednoduché zobrazení, každá zobrazovací rovnice funkcí pouze jedné proměnné:
ρ je funkcí u, ε funkcí v.

Obecný tvar zobrazovacích rovnic:

$$\boxed{\begin{aligned}&\rho = f(u) = \rho_0 + f(u_0 - u)\\&\varepsilon = nv\end{aligned}}$$

Konstanty zobrazení:

- n,n$\in$(0,1). Důsledek: rozestupy mezi obrazy rovnoběžek menší než ve skutečnosti. Pro n=1 => kuželové zobrazení přechází v **azimutální**, vzniká kužel s nulovou výškou, tj. rovina.
- ρ_0 …poloměr nezkreslené (dotykové) rovnoběžky se zeměpisnou šířkou u_0. Pro u_0=0 přechází kuželové zobrazení ve **válcové**. Vzniká kužel s nekonečnou výškou, tj válec.

Hledáme funkci f, kterou lze odvodit na základě požadavku, co se nemá zkreslovat.

6. Kartografická měřítka

Měřítko délek v poledníku:

Záporné znaménko vyjadřuje protichůdný růst hodnot σ a u.

$$m_p = \frac{-d\rho}{Rdu}$$

Měřítko délek v rovnoběžce:

$$m_r = \frac{\rho d\varepsilon}{R\cos u dv} = \frac{n\rho}{R\cos u}$$

Měřítko ploch:

$$P = m_p m_r$$

Maximální úhlové zkreslení:

$$\sin(\frac{\Delta\omega}{2}) = \frac{|m_p - m_r|}{m_p + m_r}$$

Výpočet parciálních derivací:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial u} = \frac{\partial \rho}{\partial u}\cos\varepsilon,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial u} = \frac{\partial \rho}{\partial u}\sin\varepsilon,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} = \rho\sin\varepsilon\frac{\partial \varepsilon}{\partial u},$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} = \rho\cos\varepsilon\frac{\partial \varepsilon}{\partial u}.$$

7. Kuželové zobrazení ekvidistantní v polednících

Vlastnosti:

- Známo již ve starém Řecku, Ptolemaiovo zobrazení (1. stol. p.n.l).
- Ekvidistantní v polednících, nezkreslená dotyková rovnoběžka.
- Vzdálenosti obrazů rovnoběžek stejné.
- Pól se zobrazí jako bod nebo část kružnice
- Často použito v atlasové kartografii.

Podmínka: $m_p = 1 = -\dfrac{d\rho}{R du}$

$$d\rho = -R du$$

ˇ

$$\rho = -\int R du$$

$$\rho = -Ru + c \Rightarrow \rho_0 = -Ru_0 + c$$

$$\rho = -Ru + \rho_0 + Ru_0$$

$$\rho = \rho_0 + R(u_0 - u)$$

Měřítka a zkreslení:

$$m_r = \frac{n\rho}{\cos u}$$

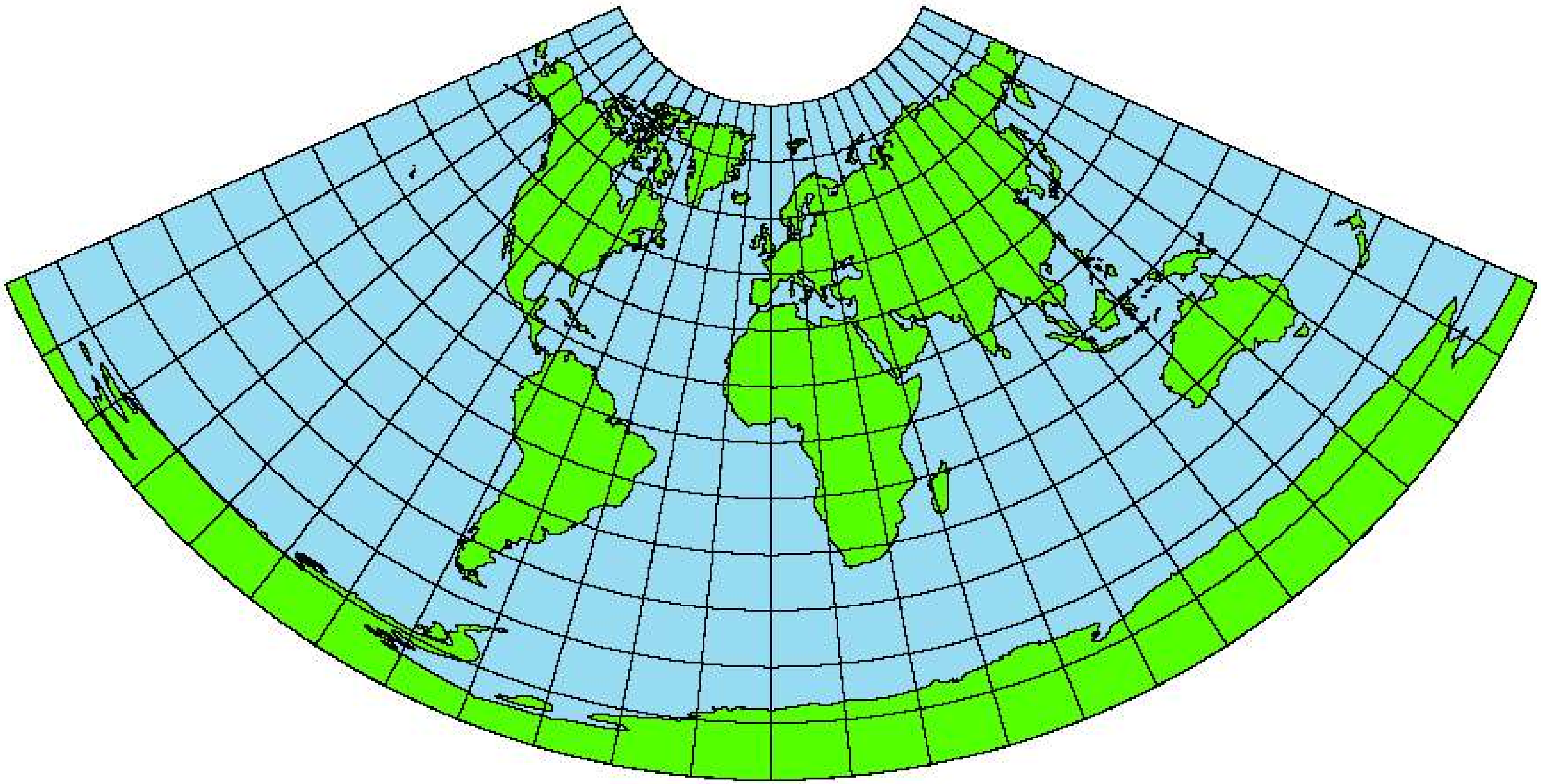
$$P = \frac{n\rho}{\cos u}$$

$$\sin\tfrac{\Delta\omega}{2} = \frac{|1 - \cos u|}{1 + \cos u}$$

Zobrazovací rovnice:

$$\boxed{\begin{aligned} &\rho = \rho_0 + R(u_0 - u) \\ &\varepsilon = nv \end{aligned}}$$

8. Ukázka Ptolemaiova zobrazení



9. Volba konstant zobrazení, 1NR

Nejčastěji používány tři varianty:

- 1 nezkreslená rovnoběžka u_0
- 2 nezkreslené rovnoběžky u_0, u_1
- Stejné zkreslení na severní a jižní okrajové rovnoběžce (až na znaménko)

a) 1 nezkreslená rovnoběžka u_0

Podmínka: měřítko délek na zvolené rovnoběžce u_0=1, tj. minimální.

$$\frac{\partial m_r}{\partial u} = 0,$$

$$m_r = \frac{n\rho}{R\cos u} = \frac{n(\rho_0 + R(u_0 - u))}{R\cos u},$$

$$\frac{\partial m_r}{\partial u} = \frac{-nR^2\cos u + n(\rho_0 + R(u_0 - u))R\sin u}{R^2\cos^2 u},$$

$$\frac{\partial m_r}{\partial u} = \frac{n}{R}\left[\frac{-R\cos u + (\rho_0 + R(u_0 - u))\sin u}{R\cos^2 u}\right] = 0,$$

$$u = u_0 \Rightarrow -R\cos u_0 + \rho_0 \sin u_0,$$

$$\boxed{\rho_0 = R\operatorname{cotg} u_0.}$$

Druhá konstanta: nezkreslená rovnob.

$$m_{r0} = \frac{n\rho_0}{R\cos u_0} = \frac{nR\operatorname{cotg} u_0}{R\cos u_0}$$

$$\boxed{n = \sin u_0}$$

Ptolemaiovo zobrazení…

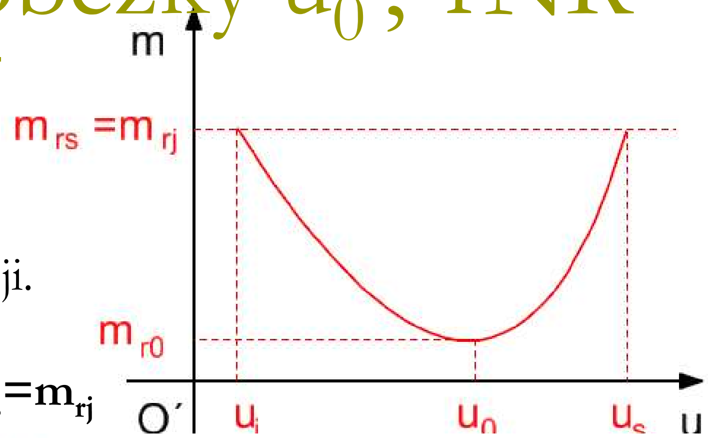
10. Volba základní rovnoběžky u_0, 1NR

1) u_0 jde středem území: $m_{rs} > m_{rj}$

$$\boxed{u_0 = \frac{u_s + u_j}{2}}$$

Zkreslení roste na sever rychleji než na jih.

Proto je vhodné volit nezkreslenou rovnoběžku severněji.



2) Stejné zkreslení na okrajových rovnoběžkách $m_{rs} = m_{rj}$

$$\frac{n\rho_s}{R\cos u_s} = \frac{n\rho_j}{R\cos u_j}$$

De l´Islerovo zobrazení…

$$\rho_s = \rho_0 - R(u_s - u_0)$$

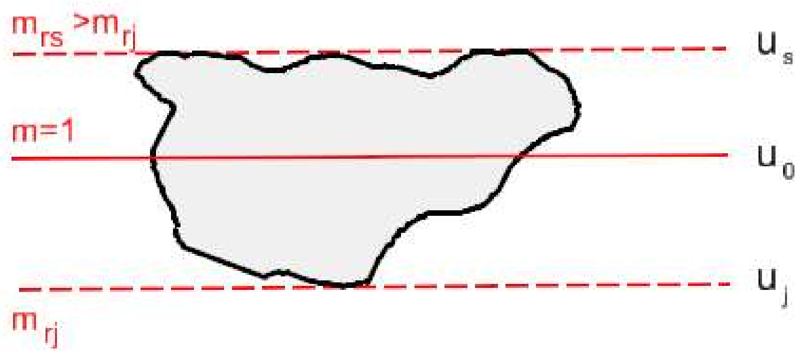
$$\rho_j = \rho_0 - R(u_j - u_0)$$

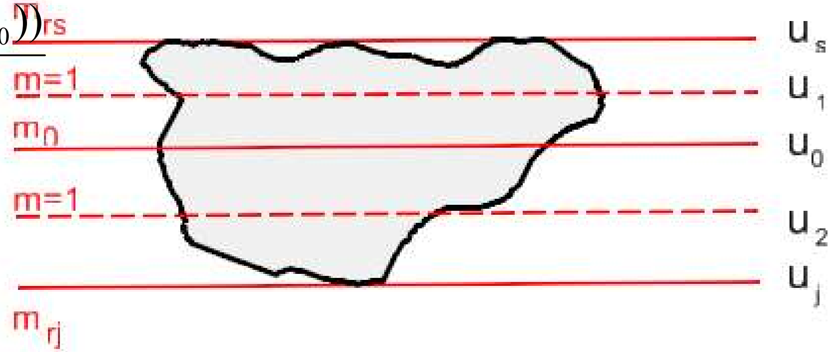
$$\frac{n(\rho_0 - R(u_s - u_0))}{R\cos u_s} = \frac{n(\rho_0 - R(u_j - u_0))}{R\cos u_j}$$

$$\frac{\sin u_0 (R\,\mathrm{cotg}\, u_0 - R(u_s - u_0))}{R\cos u_s} = \frac{\sin u_0 (\mathrm{cotg}\, u_0 - R(u_j - u_0))}{R\cos u_j}$$

$$\boxed{\mathrm{cotg}\, u_0 = \frac{u_s \cos u_j - u_j \cos u_s}{\cos u_j - \cos u_s} - u_0}$$

iterační výpočet





11. Volba konstant zobrazení, 2NR

b) 2 nezkreslené rovnoběžky u_1 a u_2

Dány u_1 a u_2

Podmínka: $m_{r1}=m_{r2}=1$.

$$m_{r1} = \frac{n\rho_1}{R\cos u_1}$$

$$m_{r2} = \frac{n\rho_2}{R\cos u_2}$$

$$\rho_1 = \rho_0 + R(u_1 - u_0)$$

$$\rho_2 = \rho_0 + R(u_2 - u_0)$$

Určení konstant zobrazení:

$$1.\ R\cos u_1 = n[\rho_0 + R(u_1 - u_0)]$$

$$2.\ R\cos u_2 = n[\rho_0 + R(u_2 - u_0)]$$

$$1.-2)\ \ R(\cos u_1 - \cos u_2) = nR(u_2 - u_1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} n &= \frac{\cos u_1 - \cos u_2}{u_2 - u_1} \\ \rho_0 &= \frac{R[(u_2 - u_0)\cos u_1 - (u_1 - u_0)\cos u_2]}{\cos u_1 - \cos u_2} \end{aligned}}$$

Jak zvolit hodnotu u_0?:

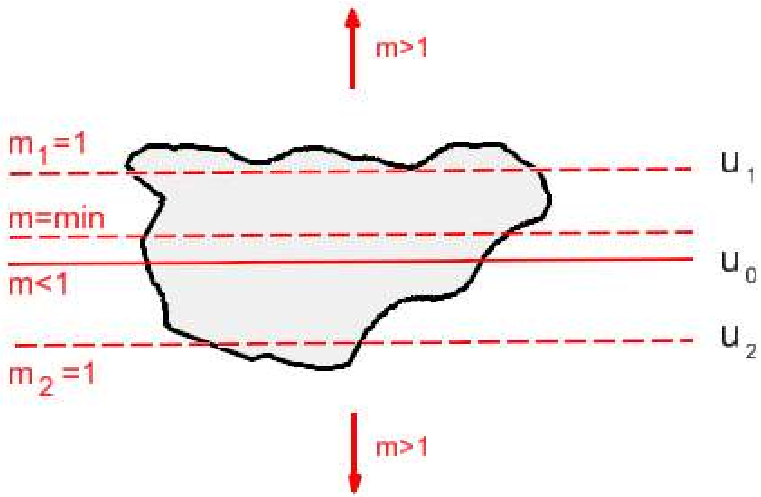
- u_0 jde středem území
- Stejné zkreslení ve středu území a na okraji (až na znaménko)

12. Volba základní rovnoběžky u_0, 2NR

1) u_0 jde středem území:

Zkreslení roste na sever rychleji než na jih.

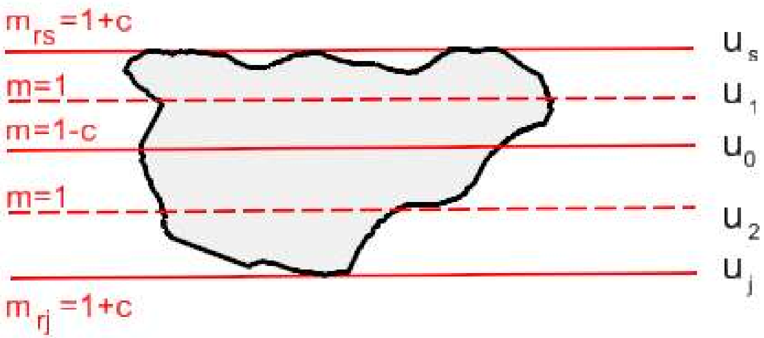
$$\boxed{u_0 = \frac{u_1 + u_2}{2}}$$



Zkreslení na této rovnoběžce nebude minimální.
Minimální zkreslení na rovnoběžce severně od u_0.

2) Stejné zkreslení na okrajových rovnoběžkách $m_{rs}=m_{rj}$

Zkreslení na okraji území: $m_{rs}=m_{rj}=1+c$.
Zkreslení ve středu území: $m_{r0}=m_{rj}=1-c$.



$$m_{rs} = 1 - c$$

$$m_{r0} = m_{rj} = 1 + c$$

$$m_{rs} + m_{r0} = 2$$

$$\frac{n\rho_s}{R\cos u_s} + \frac{n\rho_0}{R\cos u_0} = 2$$

$$\boxed{n = \frac{2R\cos u_s \cos u_0}{\rho_s \cos u_0 + \rho_0 \cos u_s}}$$

14. Volba konstant zobrazení, pól=bod

c) Pól jako bod

Ve většině případů se pól zobrazí jako kružnicový oblouk.

Můžeme požadovat, aby se pól zobrazil jako bod, tj. kruhový oblouk o nulovém poloměru.

Poloměr pólové kružnice: $\rho_p = 0$.

Platí:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho &= -Ru + k \\ 0 &= -R90 + k \\ \rho &= R(90 - u) \end{aligned}}$$

Pouze 1 konstanta *n*.

Délkové zkreslení v pólu:

$$m_{r0} = \frac{n\rho}{R\cos u_p} = 1$$

$$n = \frac{R\cos u_p}{\rho}$$

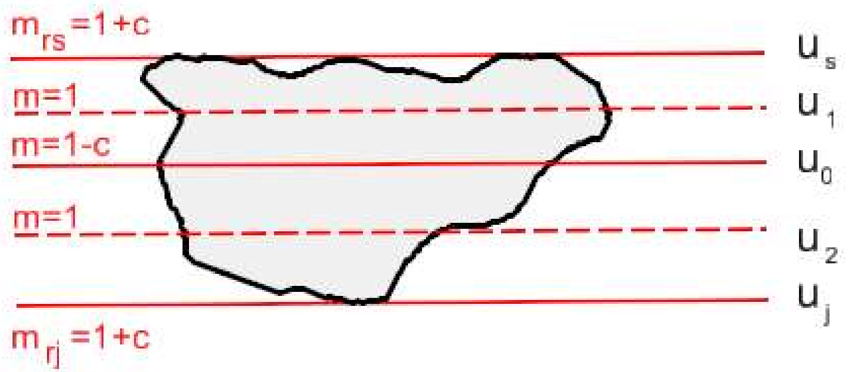
$$\boxed{n = \frac{\cos u_0}{90 - u_0}}$$

13. Volba základní rovnoběžky u_0, 2NR

Další konstanty:

$$\rho_0 = \frac{R\left[(u_j - u_0)\cos u_s - (u_s - u_0)\cos u_j\right]}{\cos u_s - \cos u_j}$$

$$\operatorname{cotg} u_0 = \frac{u_s \cos u_j - u_j \cos u_s}{\cos u_j - \cos u_s} - u_0$$



Zeměpisnou šířku u_0 nelze určit jako $u_0=0.5(u_s+u_j)$, ve středu není minimální zkreslení !!!

Šířky u_1, u_2 není možné volit, vyplynou z výpočtu.

Určíme je z podmínek stejného zkreslení $m_{r1}=m_{r2}=1$.

$$\cos u_1 = n\left(\frac{\rho_0}{R} + (u_0 - u_1)\right)$$

$$\cos u_2 = n\left(\frac{\rho_0}{R} + (u_2 - u_0)\right)$$

15. De l'Issleovo zobrazení

Autorem francouský hvězdář J. N. de l´Isle.

Použito v minulosti pro mapu Ruska.

Nyní používáno pro mapy větších územních celků (kontinenty).

Dvě nezkreslené rovnoběžky.

Pól zobrazen jako část kružnice.

Zkresluje úhly méně než Ptolemaiovo zobrazení.

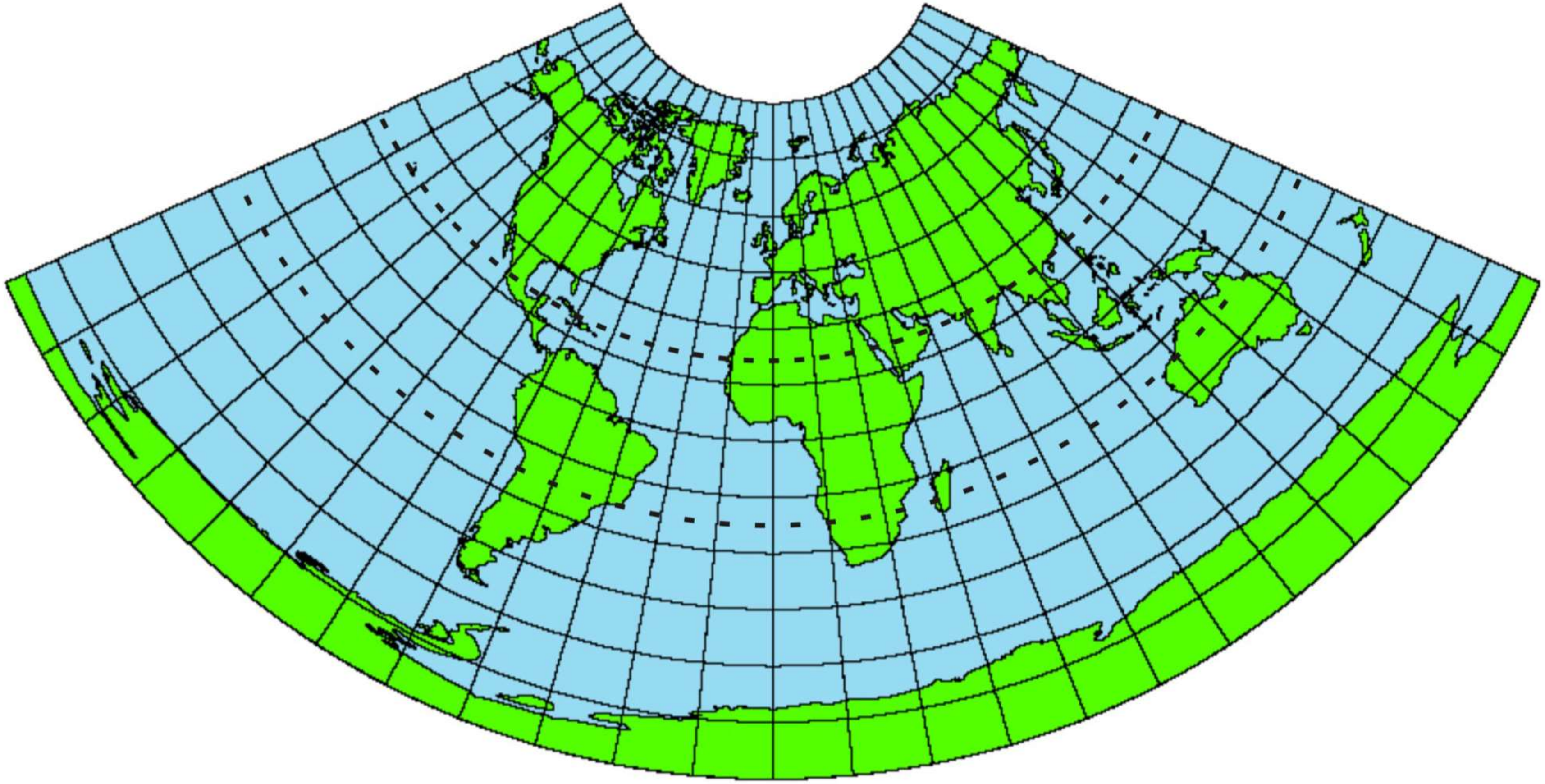
Zobrazovací rovnice:

$$\boxed{\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + R(u_0 - u)\\ \varepsilon &= nv\end{aligned}}$$

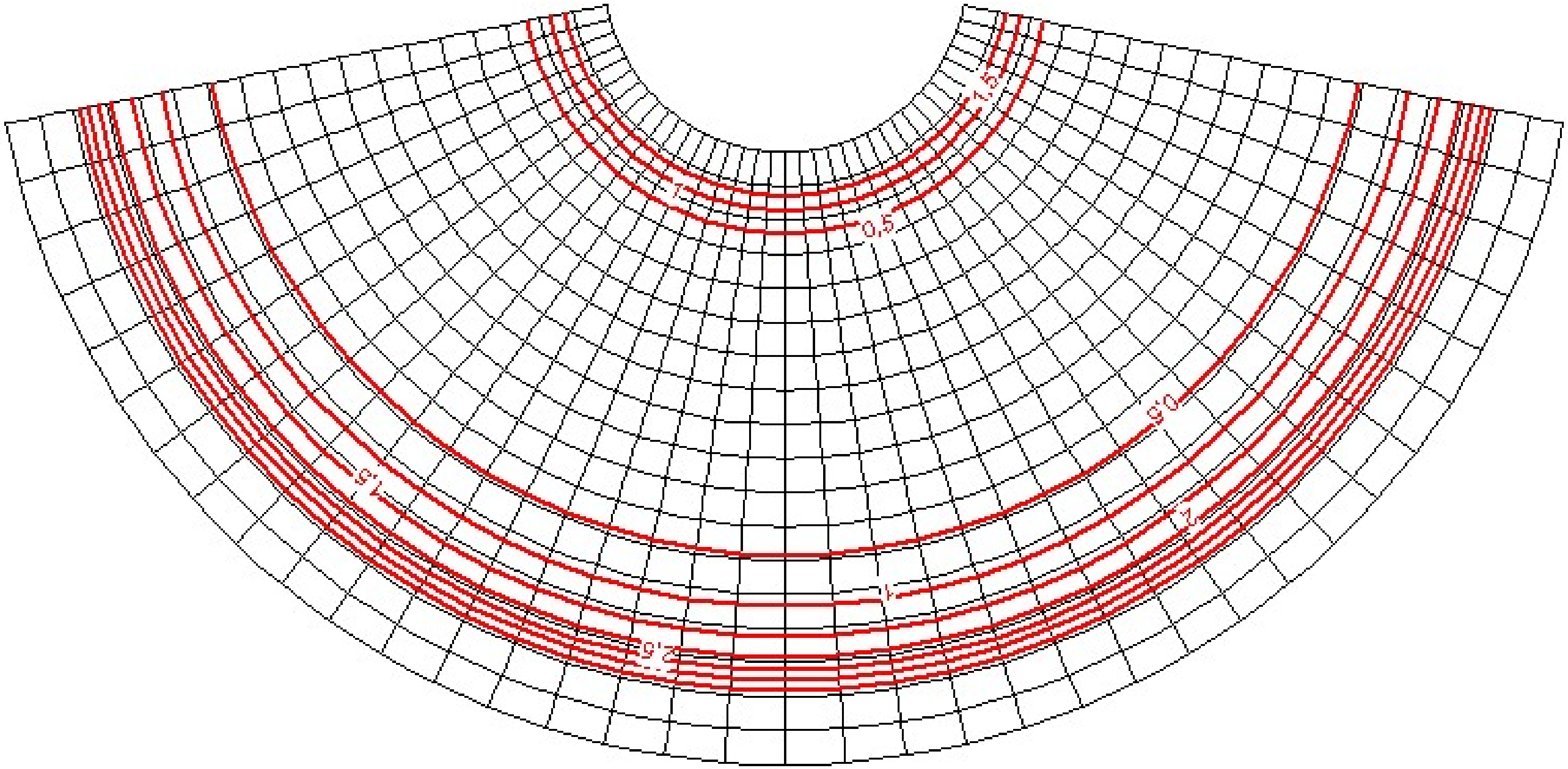
$$n = \frac{\cos u_1 - \cos u_2}{u_2 - u_1}$$

$$\rho_0 = \frac{R\left[(u_2 - u_0)\cos u_1 - (u_1 - u_0)\cos u_2\right]}{\cos u_1 - \cos u_2}$$

16. Ukázka De l'Issleova zobrazení

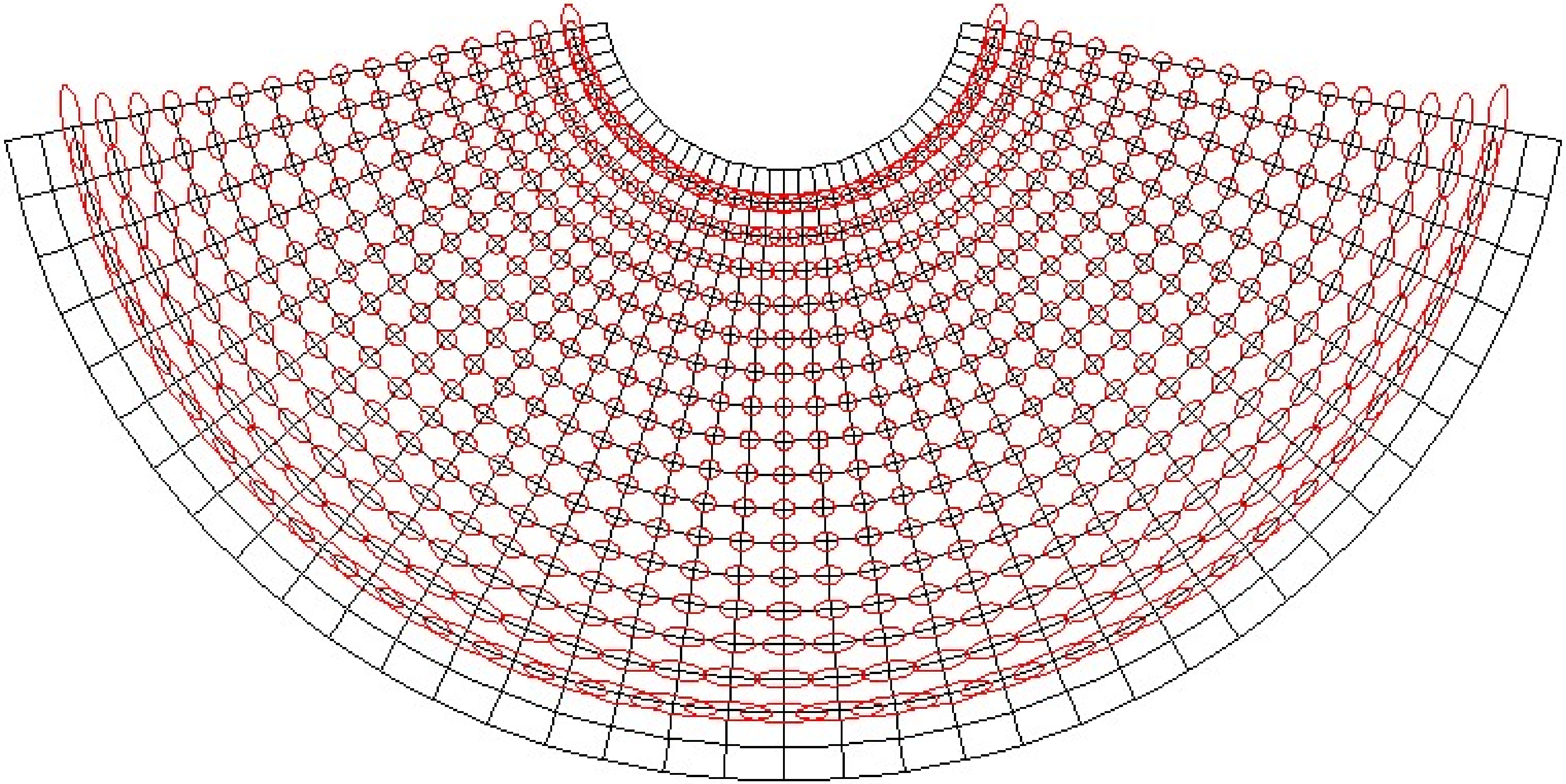


17. Ukázka evideformát m_r kuželového ekvidistantního zobrazení, 1NR



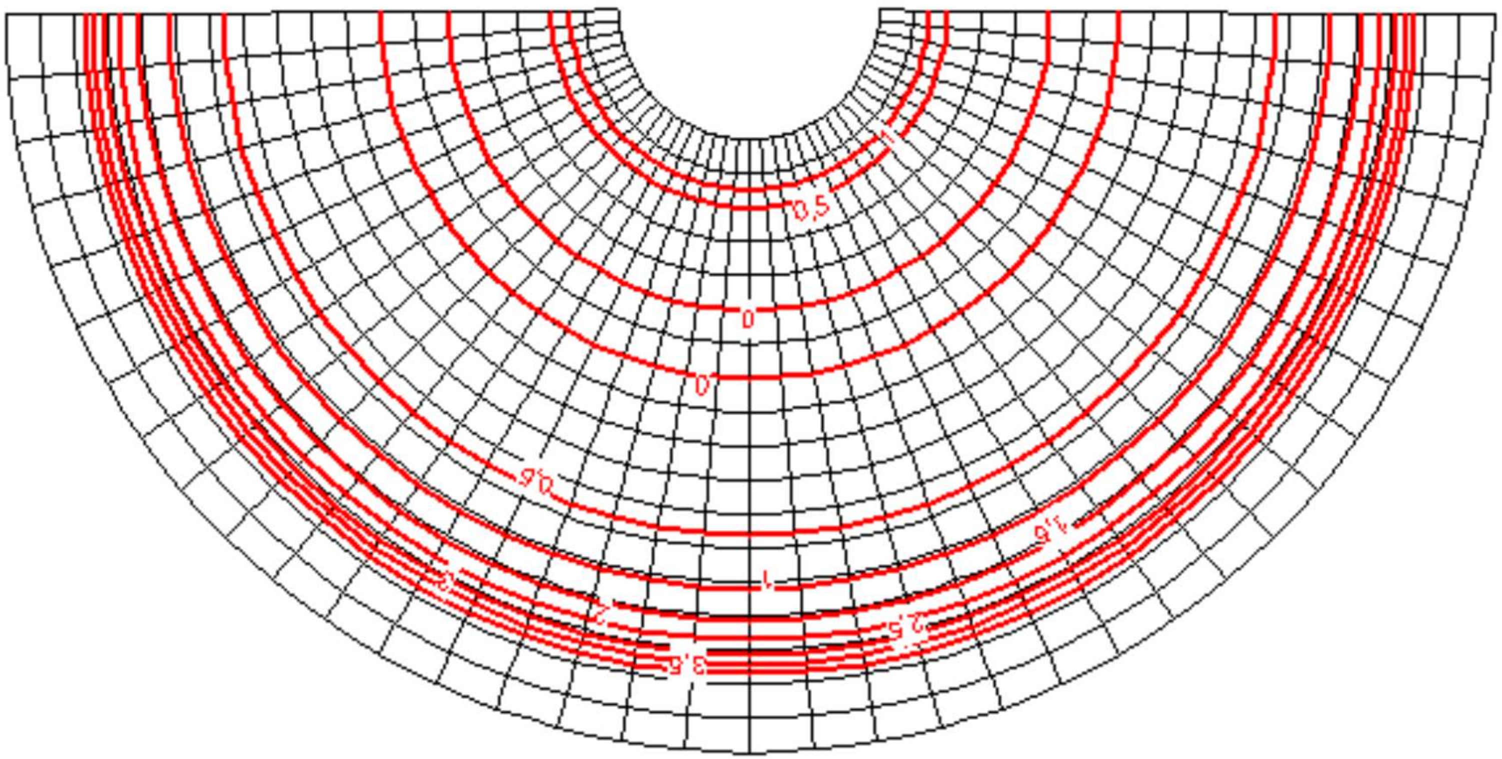
Geografická sít' + ekvideformáty. Normální poloha, 1NR.: u_0=45°. Ekvideformáty m_r, krok 0.5, Interval <0,3.5>.

18. Ukázka indikatrix kuželového ekvidistantního zobrazení



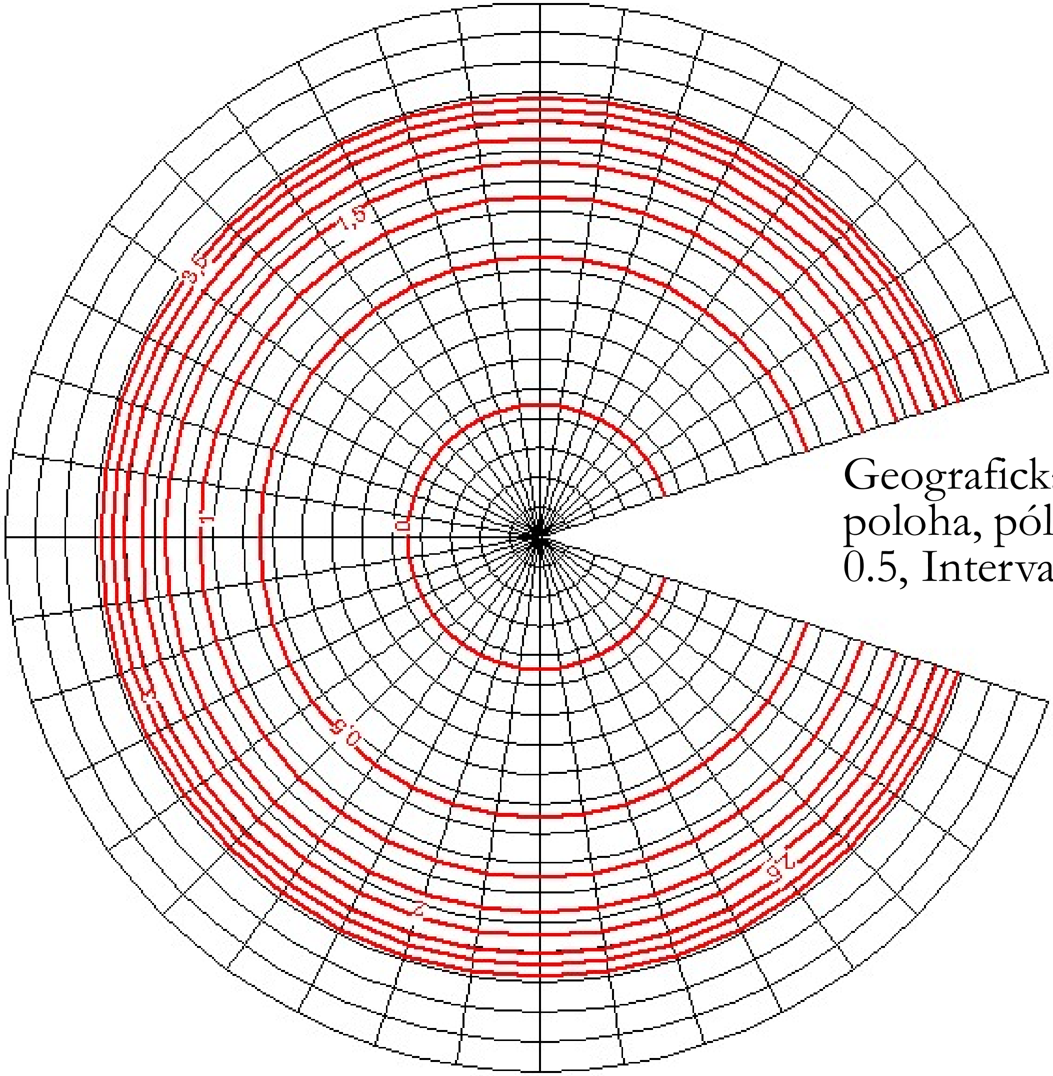
Geografická síť + Tissotovy indikatrix. Normální poloha, 1NR.: $u_0=45°$.

19. Ukázka evideformát m_r kuželového ekvidistantního zobrazení, 1NR



Geografická síť + ekvideformáty. Normální poloha, 2NR.: u_1=20°, u_2=40° .
Ekvideformáty m_r, krok 0.5, Interval <0,3.5>.

20. Ukázka evideformát m_r kuželového ekvidistantního zobrazení, 1NR



Geografická síť + ekvideformáty. Normální poloha, pól=bod.: $u_0=90°$. Ekvideformáty m_r, krok 0.5, Interval <0,3.5>.

21. Kuželové konformní zobrazení zobrazení

Autorem Johann Heinrich Lambert, tzv.Lambertovo zobrazení.

Vlastnosti:

- Vzdálenosti obrazů rovnoběžek se směrem k pólu zvětšují
- Severní pól se zobrazí jako bod, jižní se nezobrazí.
- Často požíváno pro mapy států/kontinentů.
- Pro celý svět se nepoužívá, značné úhlové zkreslení.
- Použito v Křovákově zobrazení.

Podmínka:

$$m_p = m_r = -\frac{d\rho}{R du} = \frac{n\rho}{R\cos u}$$

$$-\frac{d\rho}{\rho} = \frac{n}{\cos u} du$$

$$-\ln\rho = n\ln(\mathrm{tg}\frac{u}{2} + 45) + c$$

$$\Rightarrow -\ln\rho_0 = n\ln(\mathrm{tg}\frac{u_0}{2} + 45) + c$$

$$-\ln\rho + \ln\rho_0 = n\ln(\mathrm{tg}\frac{u_0}{2} + 45) - n\ln(\mathrm{tg}\frac{u}{2} + 45)$$

$$-\ln\frac{\rho}{\rho_0} = n\ln\left(\frac{\mathrm{tg}\frac{u_0}{2} + 45}{\mathrm{tg}\frac{u}{2} + 45}\right)$$

Zobrazovací rovnice:

$$\boxed{\rho = \rho_0\left(\frac{tg(\frac{u_0}{2} + 45°)}{tg(\frac{u}{2} + 45°)}\right)^n \qquad \varepsilon = n v}$$

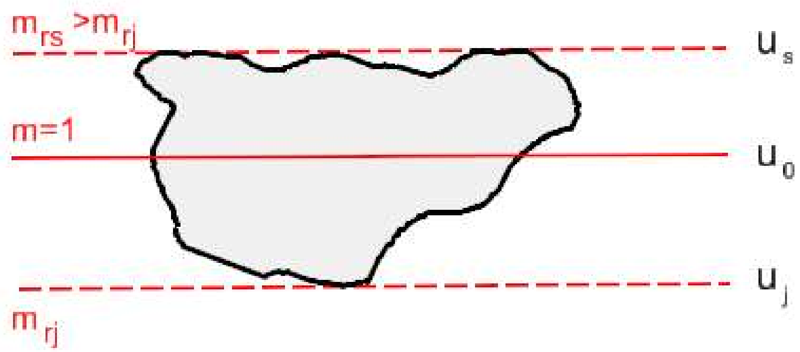
Kartogr. zkreslení:

$$m_p = m_r = \frac{n\rho}{R\cos u}$$

$$P = m^2$$

$$\Delta\omega = 0$$

22. Volba konstant zobrazení, 1NR



a) 1 nezkreslená rovnoběžka u_0

Délkové zkreslení na zvolené rovnoběžce u_0=1, tečný kužel.

$$\rho_0 = R \operatorname{cotg} u_0$$
$$n = \sin u_0$$

1) u_0 jde středem území: $m_{rs}>m_{rj}$

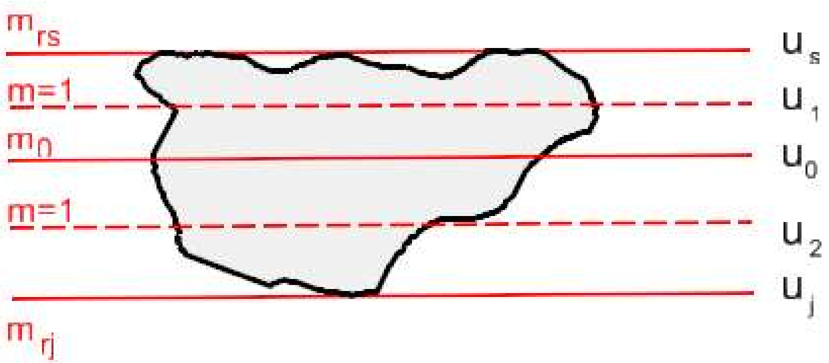
Zkreslení roste na sever rychleji než na jih.

Proto je vhodné volit nezkreslenou rovnoběžku severněji.

$$u_0 = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

2) Stejné zkreslení na okrajových rovnoběžkách $m_{rs}=m_{rj}$

$$\frac{n\rho_s}{R\cos u_s} = \frac{n\rho_j}{R\cos u_j}$$



$$\frac{n\rho_0 \operatorname{tg}(\frac{u_0}{2}+45)}{\operatorname{tg}^n(\frac{u_s}{2}+45)\cos u_s} = \frac{n\rho_0 \operatorname{tg}(\frac{u_0}{2}+45)}{\operatorname{tg}^n(\frac{u_j}{2}+45)\cos u_j}$$

$$n = \frac{\log\cos u_s - \log\cos u_j}{\log(tg(\frac{u_j}{2}+45°)) - \log(tg(\frac{u_s}{2}+45°))}$$

23. Volba konstant zobrazení, 2NR

b) 2 nezkreslené rovnoběžky u_1 a u_2

Dány u_1 a u_2

Podmínka: $m_{r1}=m_{r2}=1$.

$$m_{r1}=\frac{n\rho_1}{R\cos u_1}$$

$$m_{r2}=\frac{n\rho_2}{R\cos u_2}$$

$$\rho_1=\rho_0\left(\frac{tg(\frac{u_0}{2}+45°)}{tg(\frac{u_1}{2}+45°)}\right)^n$$

$$\rho_2=\rho_0\left(\frac{tg(\frac{u_0}{2}+45°)}{tg(\frac{u_2}{2}+45°)}\right)^n$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{\cos u_1}{\cos u_2}=\left(\frac{tg(\frac{u_2}{2}+45°)}{tg(\frac{u_1}{2}+45°)}\right)^n$$

$$n=\frac{\log\cos u_2-\log\cos u_1}{\log(tg(\frac{u_1}{2}+45°))-\log(tg(\frac{u_2}{2}+45°))}$$

$$\rho_0=\frac{R\cos u_1}{n}\left(\frac{tg(\frac{u_1}{2}+45°)}{tg(\frac{u_0}{2}+45°)}\right)^n=\frac{R\cos u_2}{n}\left(\frac{tg(\frac{u_2}{2}+45°)}{tg(\frac{u_0}{2}+45°)}\right)^n$$

Jak zvolit hodnotu u_0?:

- u_0 jde středem území
- Stejné zkreslení ve středu území a na okraji (až na znaménko)

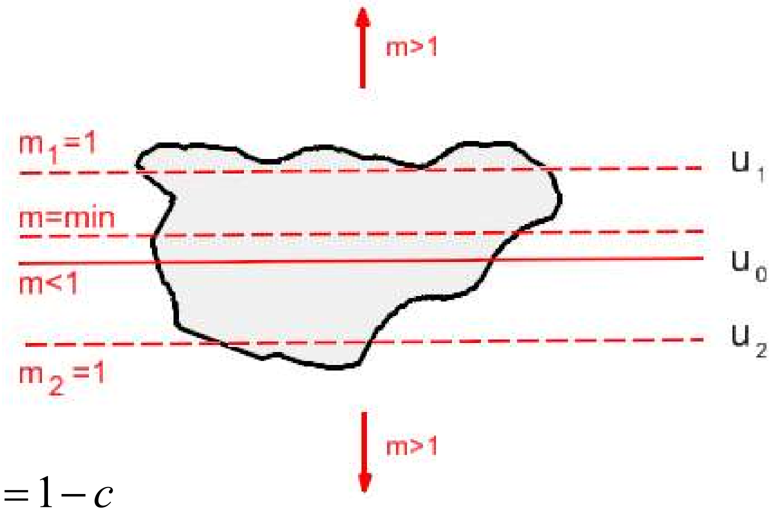
24. Volba konstant zobrazení, 2NR

1) u_0 jde středem území:

Zkreslení roste na sever rychleji než na jih.

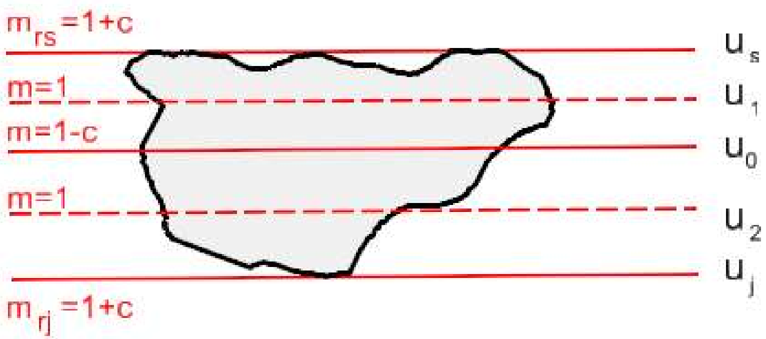
$$\boxed{u_0 = \frac{u_1 + u_2}{2}}$$

Zkreslení na této rovnoběžce nebude minimální.
Minimální zkreslení na rovnoběžce severně od u_0.



2) Stejné zkreslení na okrajových rovnoběžkách $m_{rs}=m_{rj}$

Zkreslení na okraji území: $m_{rs}=m_{rj}=1+c$.
Zkreslení ve středu území: $m_{r0}=m_{rj}=1-c$.



$$m_{rs} = 1 - c$$

$$m_{r0} = m_{rj} = 1 + c$$

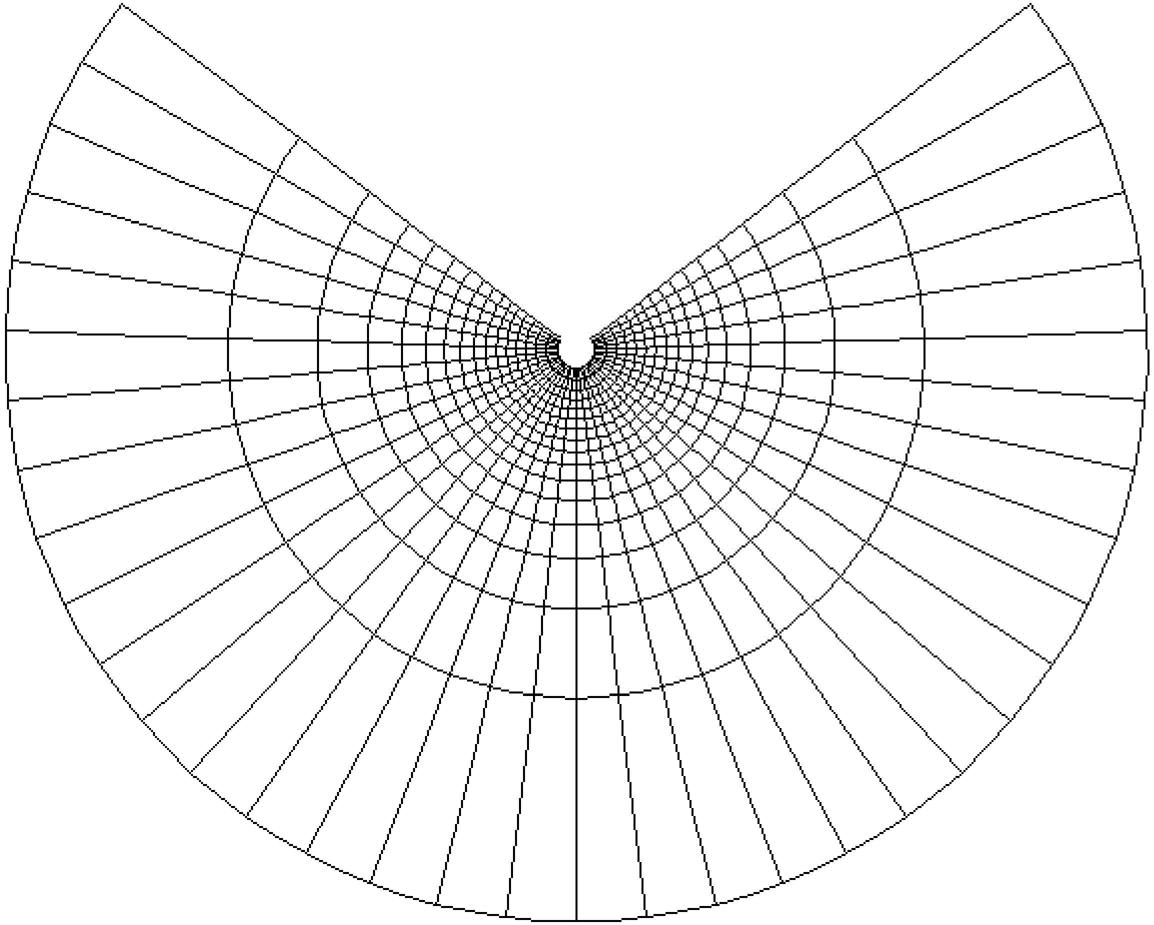
$$m_{rs} + m_{r0} = 2$$

$$\frac{n\rho_s}{R\cos u_s} + \frac{n\rho_0}{R\cos u_0} = 2$$

$$n = \frac{\log\cos u_2 - \log\cos u_1}{\log(tg(\frac{u_1}{2} + 45°)) - \log(tg(\frac{u_2}{2} + 45°))}$$

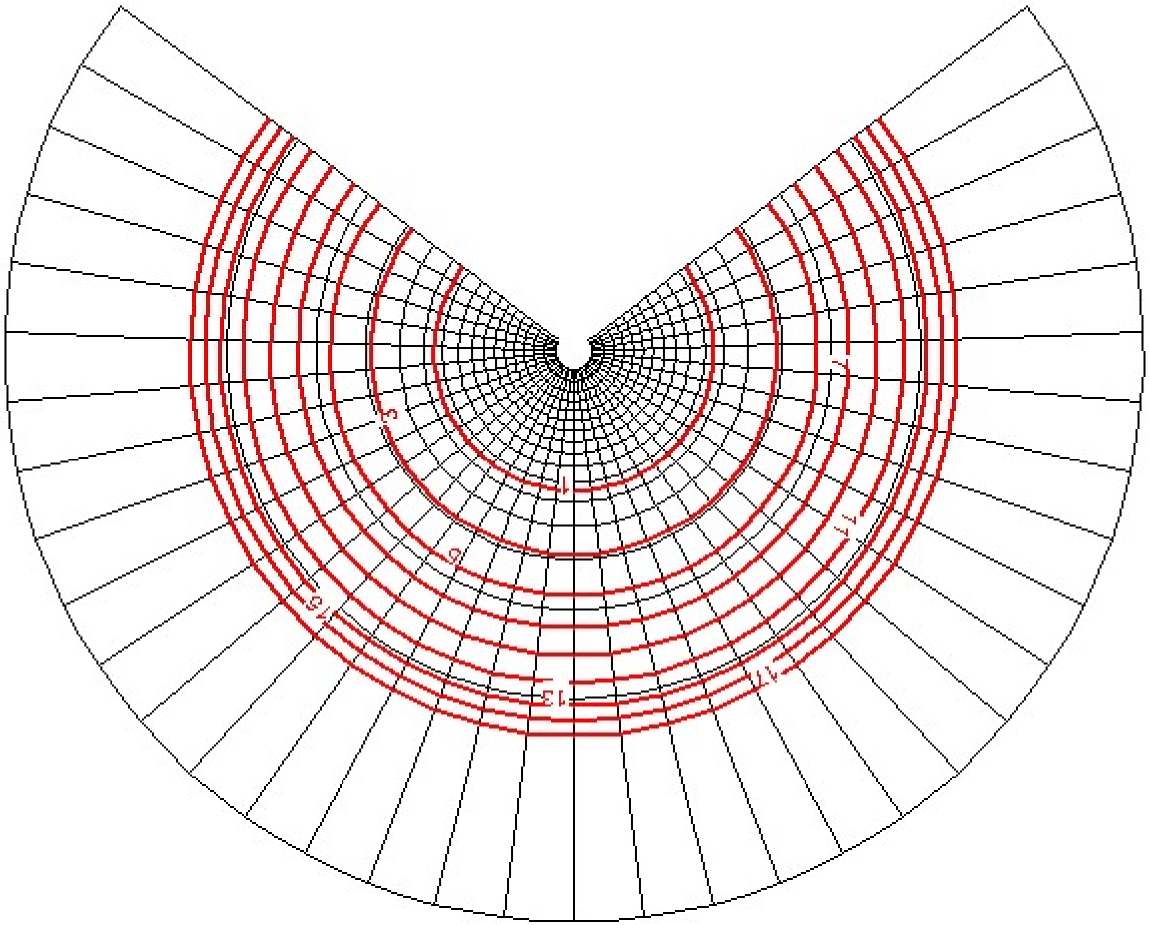
$$\rho_0 = \frac{2R\cos u_0 \cos u_1 tg^n(\frac{u_1}{2} + 45)}{n(\cos u_0 tg^n(\frac{u_0}{2} + 45)) + \cos u_1 tg^n(\frac{u_1}{2} + 45))}$$

25. Ukázka zeměpisné sítě kuželového konformní zobrazení, 1NR



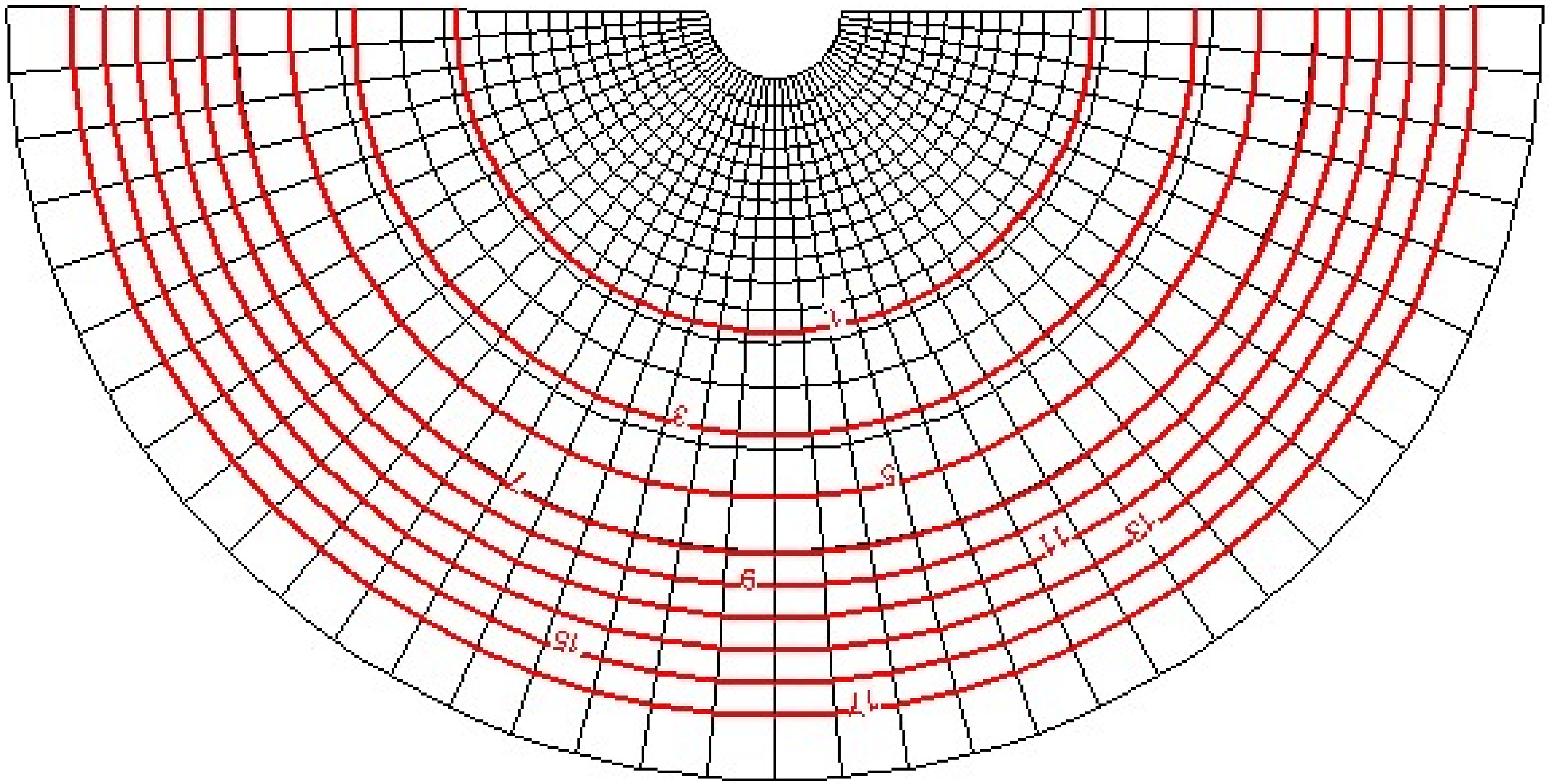
Geografická síť. Normální poloha, 1NR.: $u_0=45°$, $u \in <-80,80>$.

26. Ukázka evideformát m_r kuželového konformního zobrazení, 1NR



Geografická síť + ekvideformáty. Normální poloha, u_0=45°, u∈<-80,80>.
Ekvideformáty m_r, krok 2, Interval <1,17>.

27. Ukázka evideformát m_r kuželového konformního zobrazení, 2NR



Geografická sít' + ekvideformáty. Normální poloha, $u_1=20°$, $u_2=40°$, $u \in <-80,80>$.
Ekvideformáty m_r, krok 2, Interval $<1,17>$.

28. Kuželové konformní zobrazení, 2NR

Ukázka zobrazovacích rovnic:

X= R*cos(u1)/ ((log(cos(u1))-log(cos(u2)))/(log(tg(u2/2+45))-log(tg(u1/2+45))))*(tg(u1/2+45)/tg((arcsin((log(cos(u1))-log(cos(u2)))/(log(tg(u2/2+45))-log(tg(u1/2+45)))))/2+45))^ ((log(cos(u1))-log(cos(u2)))/(log(tg(u2/2+45))-log(tg(u1/2+45))))*(1-(tg((arcsin((log(cos(u1))-log(cos(u2)))/(log(tg(u2/2+45))-log(tg(u1/2+45)))))/2+45)/(tg(u/2+45)))^((log(cos(u1))-log(cos(u2)))/(log(tg(u2/2+45))-log(tg(u1/2+45))))*cos(((log(cos(u1))-log(cos(u2)))/(log(tg(u2/2+45))-log(tg(u1/2+45))))*v))

Y=R*cos(u1)/ ((log(cos(u1))-log(cos(u2)))/(log(tg(u2/2+45))-log(tg(u1/2+45))))*(tg(u1/2+45)/tg((arcsin((log(cos(u1))-log(cos(u2)))/(log(tg(u2/2+45))-log(tg(u1/2+45)))))/2+45))^ ((log(cos(u1))-log(cos(u2)))/(log(tg(u2/2+45))-log(tg(u1/2+45)))) *(tg((arcsin((log(cos(u1))-log(cos(u2))) /(log(tg(u2/2+45))-log(tg(u1/2+45)))))/2+45)/(tg(u/2+45)))^((log(cos(u1))-log(cos(u2)))/(log(tg(u2/2+45))-log(tg(u1/2+45)))) *sin(((log(cos(u1))-log(cos(u2)))/(log(tg(u2/2+45))-log(tg(u1/2+45))))*v)

29. Kuželové ekvivalentní zobrazení

Vlastnosti:

- Vzdálenosti obrazů rovnoběžek se směrem k pólu zmenšují.
- Vzdálenosti obrazů poledníků stejné.
- Pól se zobrazí jako část kružnice/bod.
- Často používáno pro znázorňování kontinentů.

Podmínka:

$$m_p m_r = 1$$

$$-\frac{d\rho}{R du}\frac{n\rho}{R\cos u} = 1$$

$$\rho d\rho = -\frac{R^2}{n}\cos u du$$

$$\frac{\rho^2}{2} = -\frac{R^2}{n}\sin u + c$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_0{}^2}{2} = -\frac{R^2}{n}\sin u_0 + c$$

$$\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho_0{}^2}{2} = -\frac{R^2}{n}\sin u + \frac{R^2}{n}\sin u_0$$

$$\rho^2 = \rho_0{}^2 + \frac{2R^2}{n}(\sin u_0 - \sin u)$$

Zobrazovací rovnice:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\rho_0{}^2 + \tfrac{2R^2}{n}(\sin u_0 - \sin u)} \\ \varepsilon &= nv \end{aligned}}$$

Měřítka:

$$m_p = \frac{R\cos u}{n\rho}$$

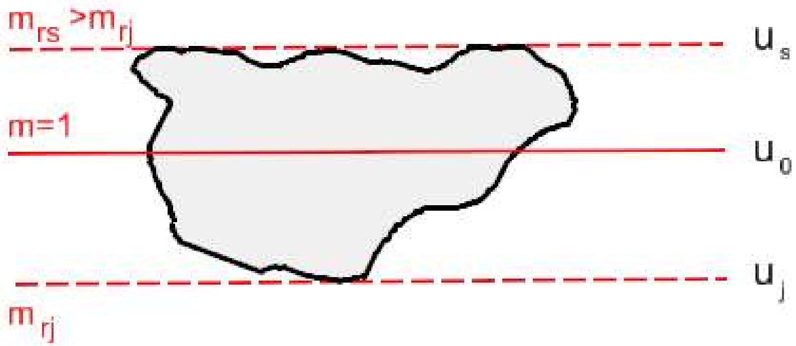
$$m_r = \frac{n\rho}{R\cos u}$$

30. Volba konstant zobrazení, 1NR, 2NR

a) nezkreslená rovnoběžka u_0

Délkové zkreslení na zvolené rovnoběžce $u_0=1$, tečný kužel.

$$\boxed{\begin{aligned}\rho_0 &= R \operatorname{cotg} u_0 \\ n &= \sin u_0\end{aligned}}$$

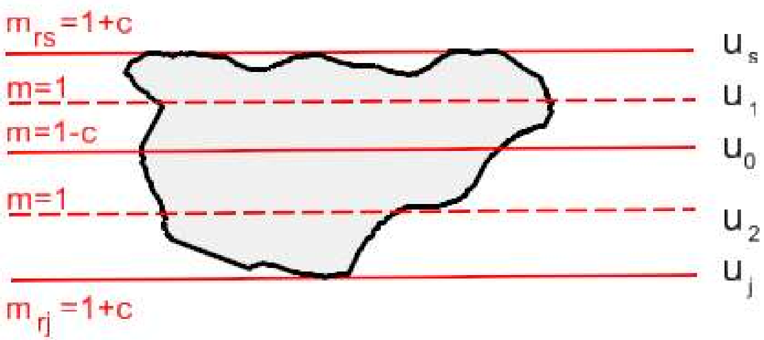


b) 2 nezkreslené rovnoběžky u_1, u_2

Vzniká sečný kužel, u_0 jde přibližně středem území, na severu větší zkreslení než na jihu.

Podmínka: $m_{r1}=m_{r2}$.

Tzv. Albersovo zobrazením (Heinrich Albers).



$$\left(\frac{n\rho_1}{R\cos u_1}\right)^2 = \left(\frac{n\rho_2}{R\cos u_2}\right)^2,$$

$$n^2[\rho_0^{\,2} + \frac{2R^2}{n}(\sin u_0 - \sin u_1)] = R^2 \cos^2 u_1,$$

$$n^2[\rho_0^{\,2} + \frac{2R^2}{n}(\sin u_0 - \sin u_2)] = R^2 \cos^2 u_2,$$

$$\boxed{\begin{aligned} n &= \frac{\sin u_1 - \sin u_2}{2}, \\ \rho_0^2 &= \frac{R\cos u_1}{n} - \frac{2R^2}{n}(\sin u_0 - \sin u_1)\end{aligned}}$$

31. Volba konstant zobrazení, pól=bod

c) Pól jako bod

Ve většině případů se pól zobrazí jako kružnicový oblouk.

Můžeme požadovat, aby se pól zobrazil jako bod, tj. kruhový oblouk o nulovém poloměru.

Volíme nezkreslenou rovnoběžku u_0.

Platí:

$$\rho^2 = -\frac{2R^2}{n}\sin u + k$$

$$0 = -\frac{2R^2}{n}\sin 90 + k \Rightarrow k = \frac{2R^2}{n}$$

$$\rho^2 = -\frac{2R^2}{n}\sin u + \frac{2R^2}{n}$$

$$\boxed{\rho^2 = \frac{2R^2}{n}(1-\sin u)}$$

Volba u_0:

$$m_{r0} = \frac{n\rho_0}{R\cos u_0} = 1$$

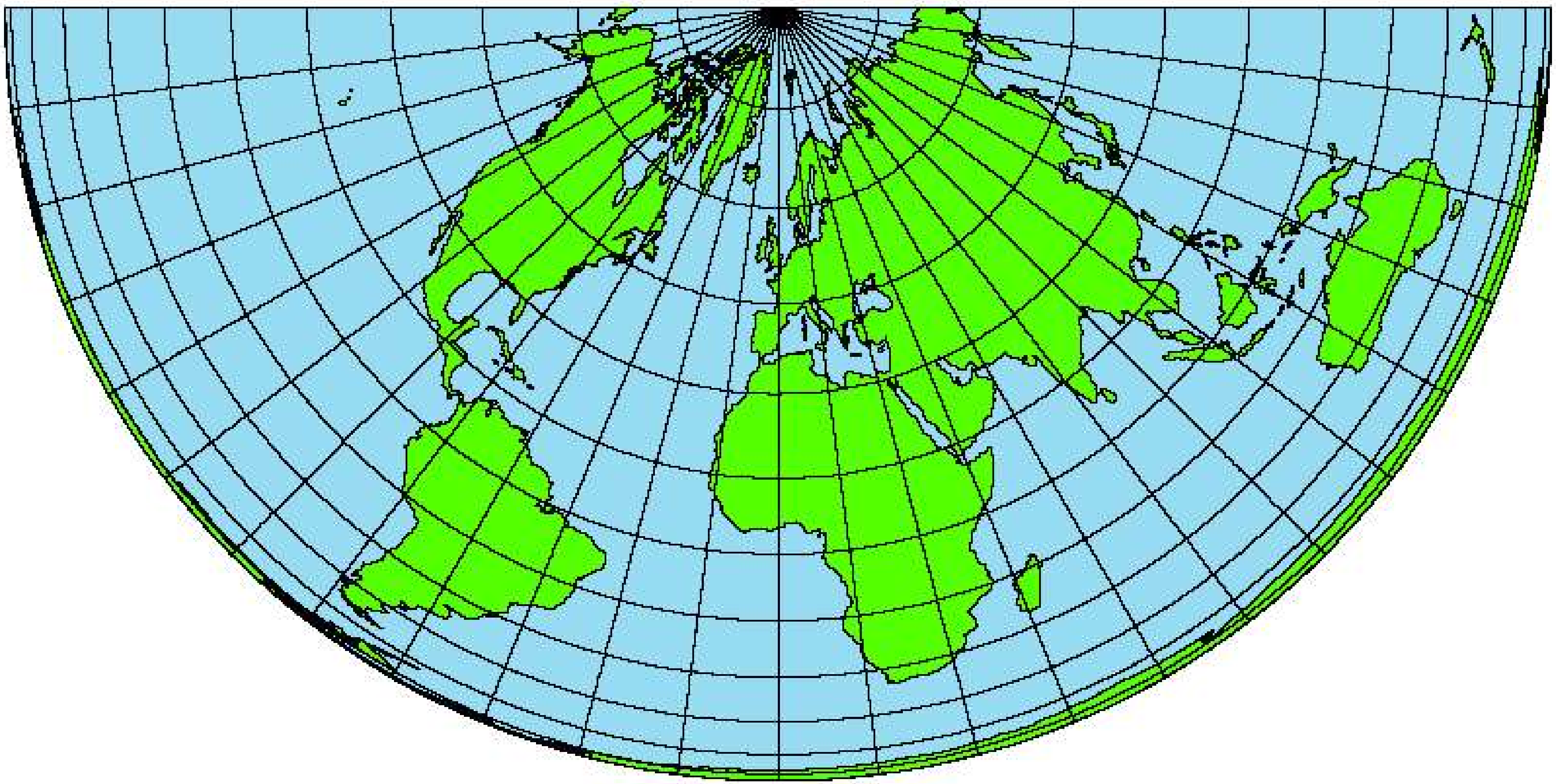
$$n^2\rho_0^2 = R^2\cos^2 u_0$$

$$n^2 = \frac{R^2\cos^2 u_0}{\rho_0^2} = \frac{nR^2\cos^2 u_0}{2R^2(1-\sin u_0)},$$

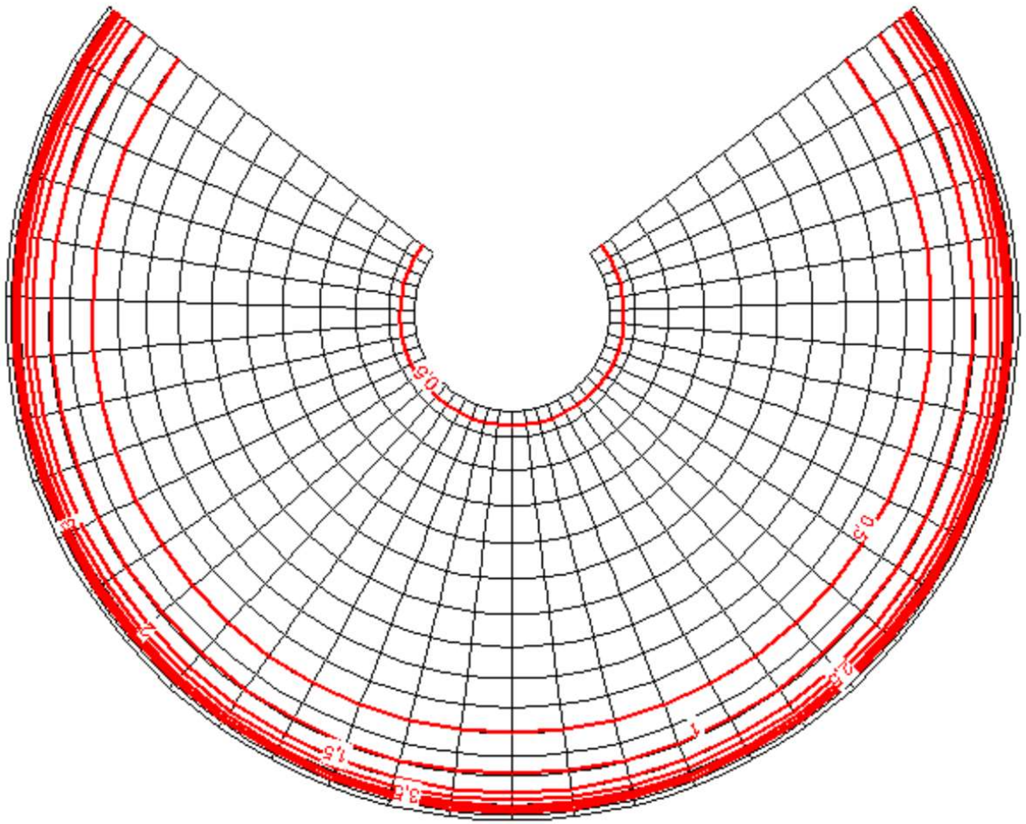
$$n = \frac{1-\sin^2 u_0}{2(1-\sin u_0)} = \frac{1}{2}(1+\sin u_0).$$

$$\rho_0 = R\sqrt{\frac{2(1-\sin u_0)}{n}} = R\sqrt{2\frac{1-\sin u_0}{1+\sin u_0}}.$$

32. Ukázka Lambertova kuželového zobrazení.

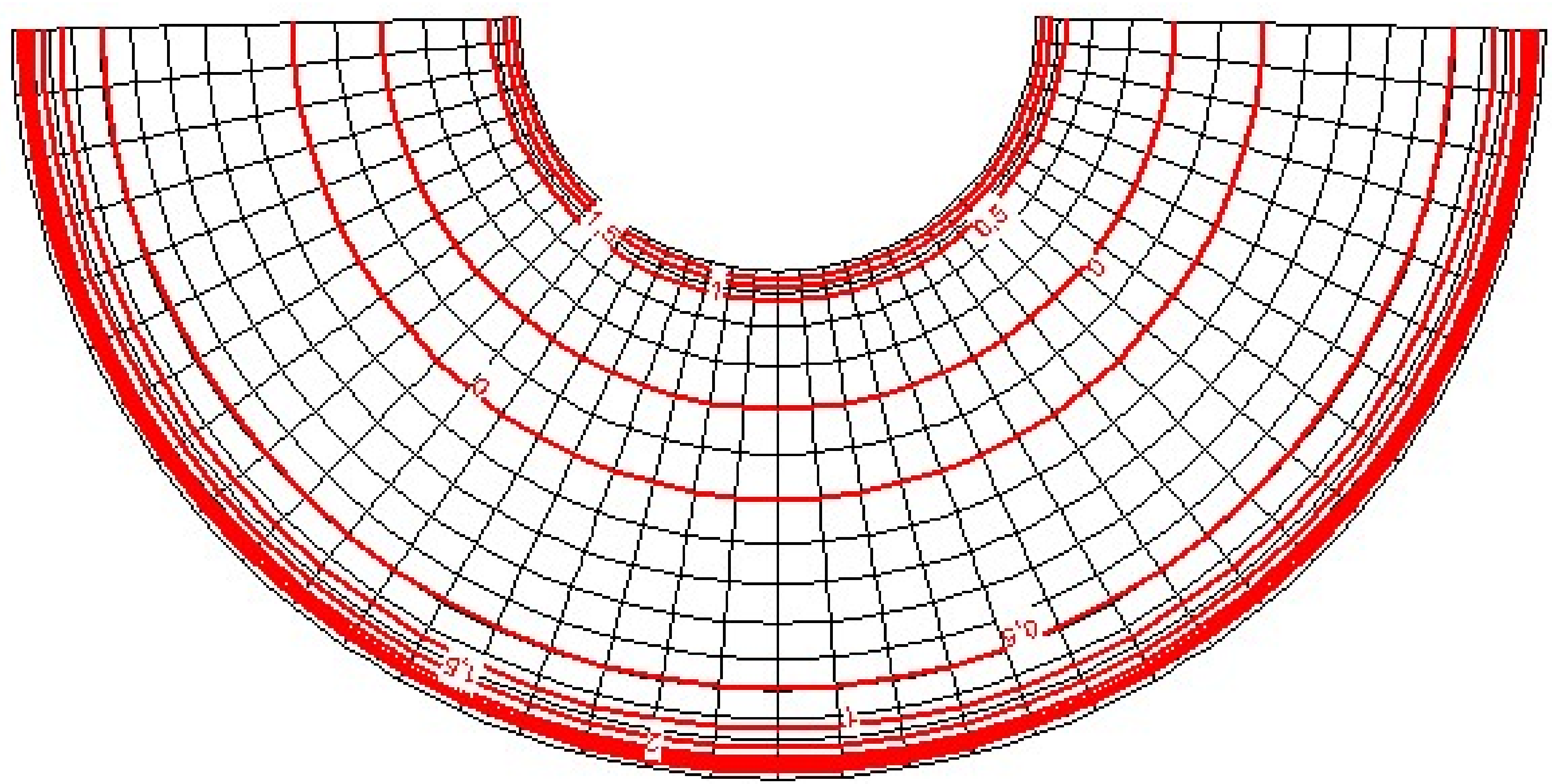


33. Ukázka evideformát m_r kuželového ekvivalentního zobrazení, 1NR



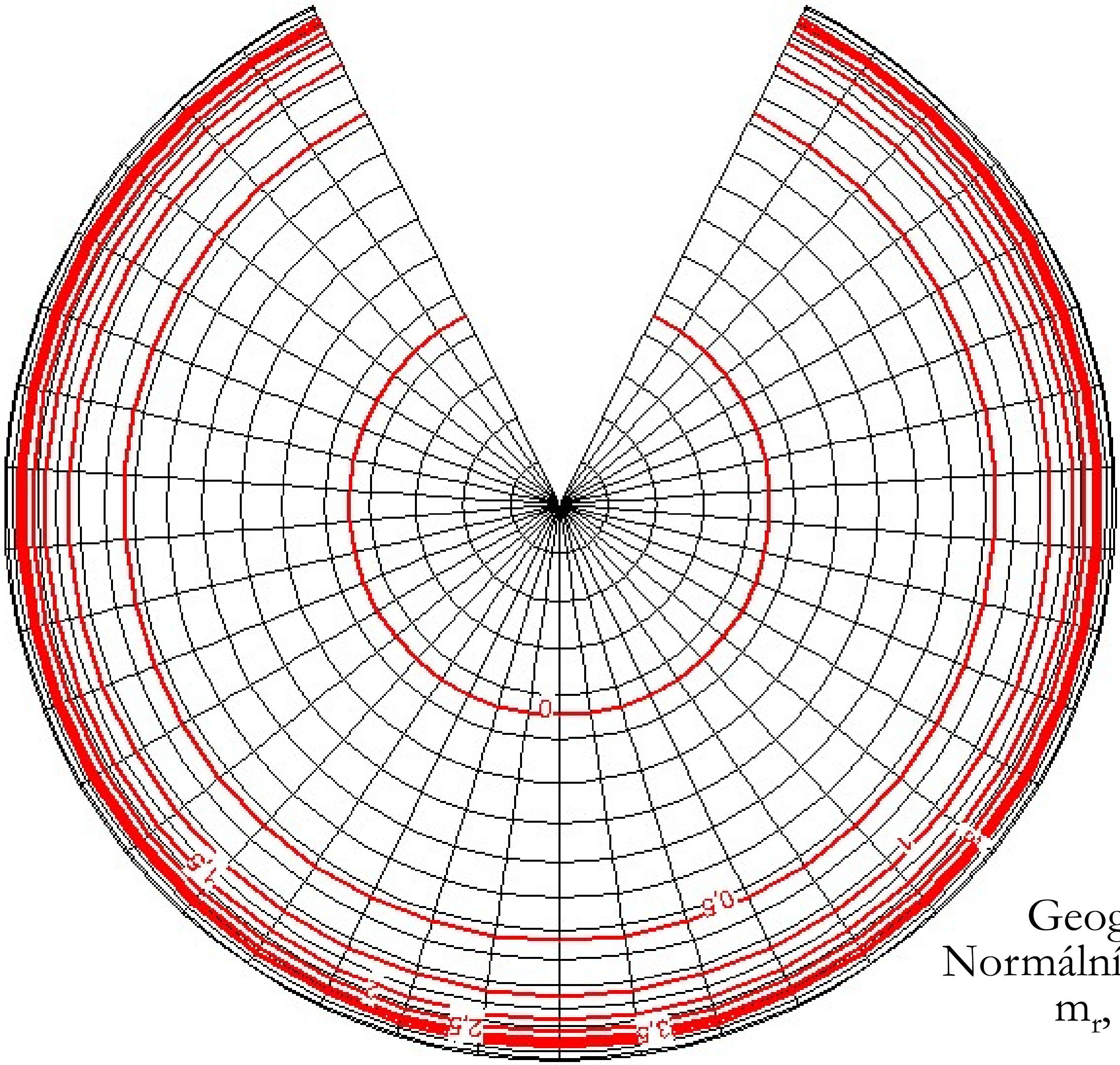
Geografická síť + ekvideformáty. Normální poloha, u_0=45°. Ekvideformáty m_r, krok 0.5, Interval <0,3.5>.

34. Ukázka evideformát m_r kuželového ekvivalentního zobrazení, 2NR



Geografická síť + ekvideformáty. Normální poloha, u_1=20°, u_2=40°. Ekvideformáty m_r, krok 0.5, Interval <0,2>.

35. Ukázka evideformát m_r kuželového ekvivalentního zobrazení, PB



Geografická síť + ekvideformáty.
Normální poloha, u_0=45°. Ekvideformáty m_r, krok 0.5, Interval <0,3.5>.

36. Křovákovo zobrazení

Pojmenováno po ministerském radovi ing. Josefu Křovákovi.
Nejedná se o jedno zobrazení, ale o kombinaci dvou zobrazení

Vlastnosti:

- Konformní zobrazení
- Kužel v obecné poloze
- Návrh odráží tvar území: protáhlý a mírně zakřivený
- Dvojité zobrazení:
  - elipsoid->koule: Gaussovo konformní zobrazení z elipsoidu na kouli.
  - koule->rovina: Lambertovo konformní kuželové zobrazení.
- Základem S-JTSK

Použití:

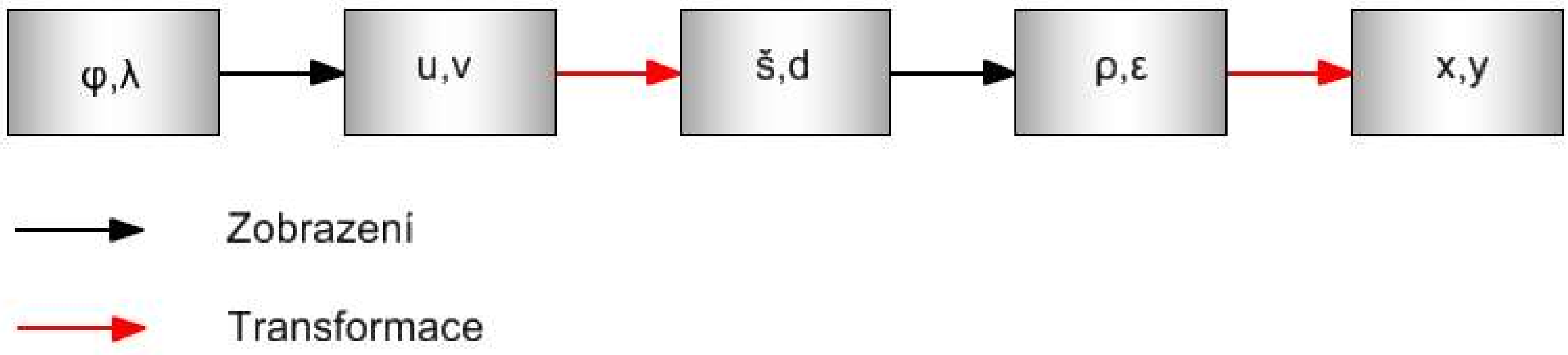
- Státní mapa odvozená SMO-5
- Základní mapa ČR v měřítku 1:10 000, 1:50 000, 1:100 000, 1:200 000
- ZABAGED
- DKM v měřítku 1:1000

Pouze ČR a SR.

37. Schéma Křovákova zobrazení

Postup zobrazení:

1) Besselův elipsoid zobrazen konformně na Gaussovu kouli
2) Zeměpisné souřadnice přetransformovány na kartografické vzhledem ke Křovákem zvolenému kartografickému pólu.
3) Konformní zobrazení Gaussovy koule na plášť kužele.
4) Transformace polárních souřadnic na pravoúhlé.



38. Křovákovo zobrazení, postup

Referenční plochy:

- Besselův elipsoid: a= 6377397,155 m b= 6356078,9633
- Gaussova koule: R= 6380703,6105m

Zobrazení:

1) Konformní zobrazení referenčního elipsoidu na Gaussovu kouli

Použito Gaussovo konformní zobrazení elipsoid/koule.

Hodnotě nezkreslené rovnoběžky φ_0=49°30′ s.š. odpovídá na kouli u_0=49°27′35,84625″s.š.

$$tg(\frac{u}{2}+45)=\frac{1}{k}\left(tg(\frac{\phi}{2}+45)\left(\frac{1-e\sin\phi}{1+e\sin\phi}\right)^{\frac{e}{2}}\right)^{\alpha}$$

$$v=\alpha\lambda_F$$

$$\lambda_F=\lambda+17^{\circ}40'$$

Konstanty zobrazení:

α=1,000 597 498 372

k=0,996 592 486 9

R=6380703.6105m

NR: φ_0=49°30′ s.š.

Zeměpisná délka odečítána od Ferra.

Pokud není λ ke Grenwichi, posun o 17°40´.

39. Křovákovo zobrazení, postup

2) Transformace zeměpisných souřadnic na kouli na souřadnice kartografické

Kartografický pól určen z bodu A, který představoval nejvýchodnější bod znázorněný na mapě 1:75 000.

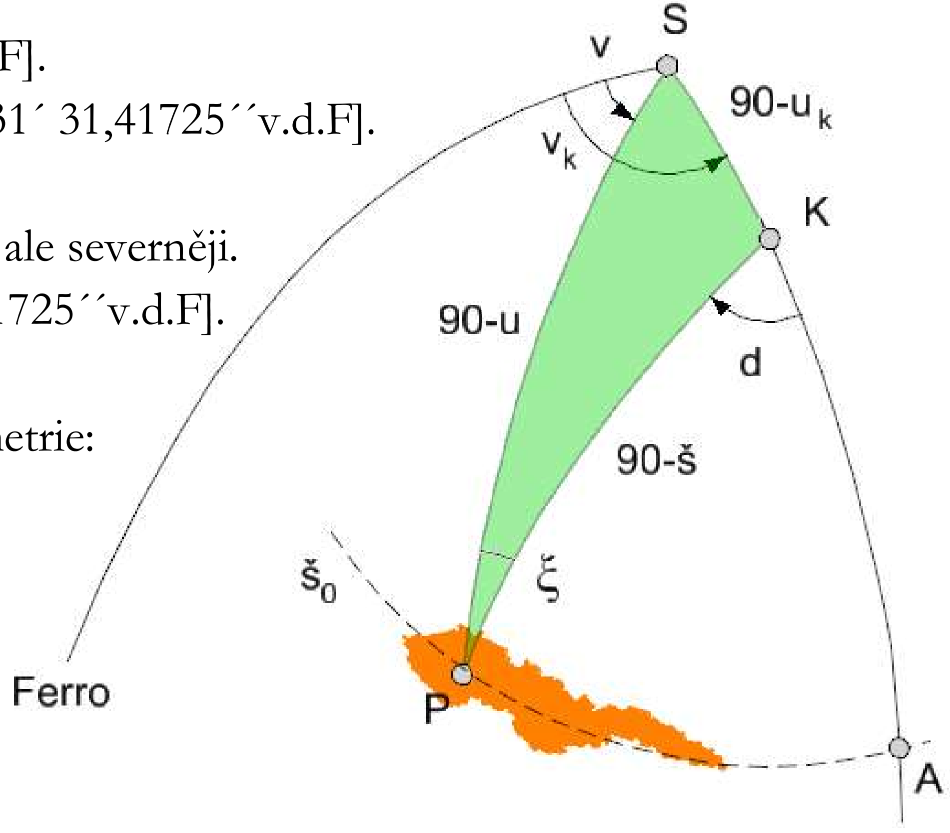
Elipsoid: φ_A=[48° 15´ s.š.], λ_A=[42° 30´ v.d.F].
Koule: u_A=[48° 12´ 42,6969´´s.š.], v_A=[42° 31´ 31,41725´´v.d.F].

Kartografický pól leží na stejném poledníku, ale severněji.
u_k=[59° 42´ 42,6969´´s.š.], v_k=[42° 31´ 31,41725´´v.d.F].

Pro převod použity vztahy sférické trigonometrie:

$$\sin š = \sin u \sin u_k + \cos u \cos u_k \cos(v_k - v)$$

$$\sin d = \frac{\cos u}{\cos š} \sin(v_k - v)$$



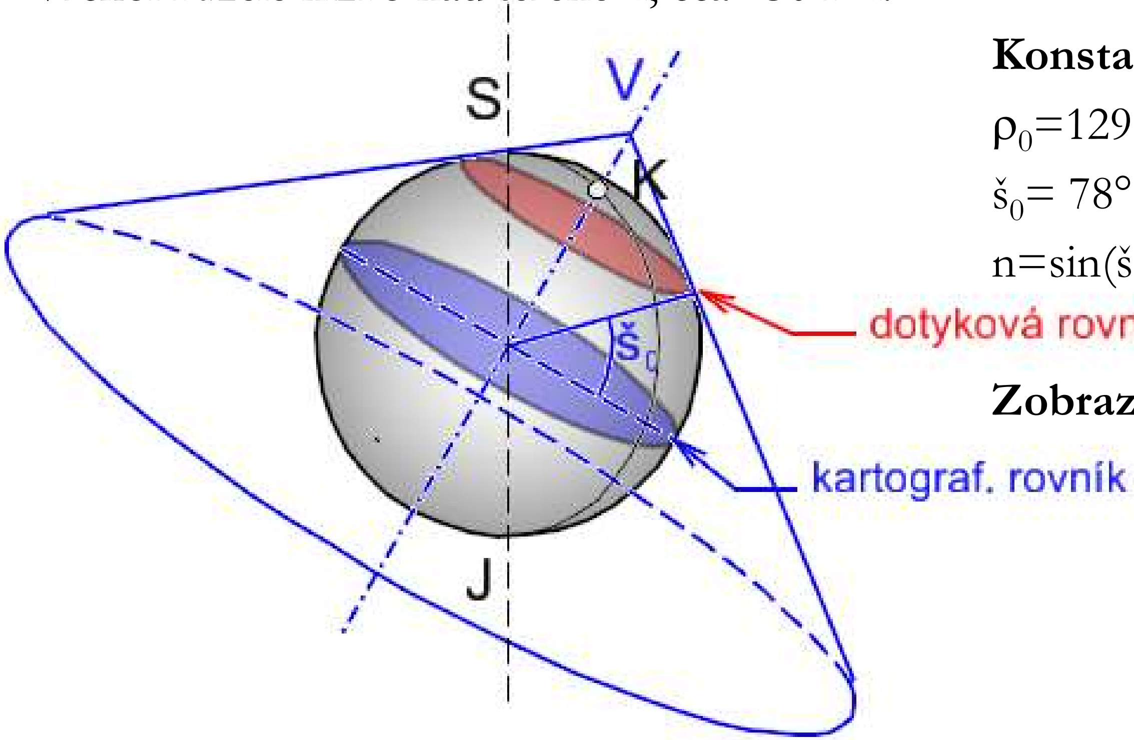
40. Křovákovo zobrazení, postup

3. Konformní zobrazení Gaussovy koule do roviny

Použito Lambertovo konformní kuželové zobrazení s jednou nezkreslenou kartografickou rovnoběžkou $š_0$.

Kartografický pól=obraz vrcholu kužele.

Vrchol kužele nízko nad terénem, cca 130 km.



Konstanty zobrazení:

ρ_0=1298039,0046 m

$š_0$= 78°30′

n=sin(šo)=0.9799247046

Zobrazovací rovnice:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{tg(\frac{š_0}{2} + 45°)}{tg(\frac{š}{2} + 45°)} \right)^n$$

$$\varepsilon = nd$$

41. Křovákovo zobrazení, postup

4. Transformace polárních souřadnic na pravoúhlé.

Počátek souřadnicového systému v obrazu vrcholu kužele, padne do Estonského zálivu.

Československo v prvním kvadrantu, obě souřadnice kladné.

Osa x:

Obraz základního poledníku λ_0=42°30′

Orientace na jih.

Osa y:

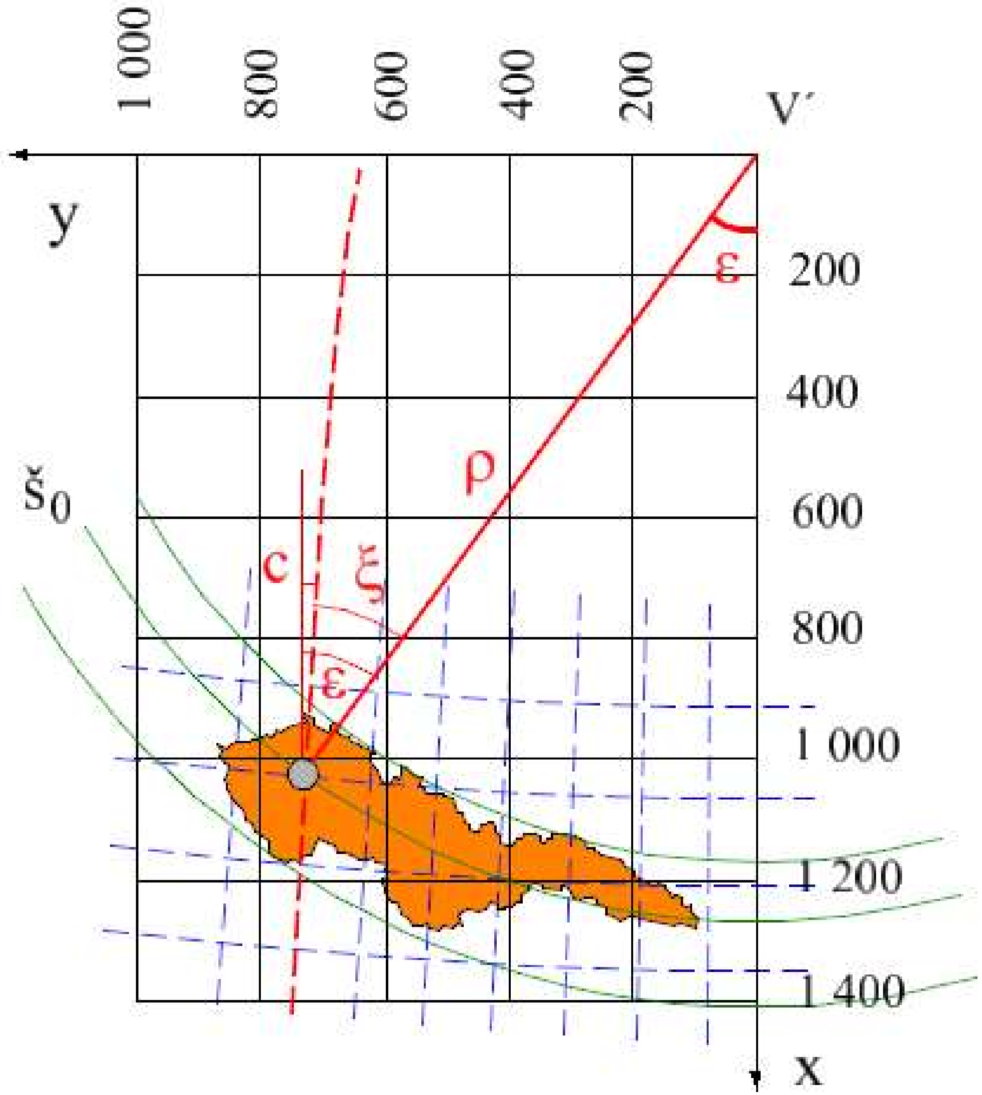
Kolmá na x,

Orientace na západ.

$$x = \rho \cos \varepsilon$$
$$y = \rho \sin \varepsilon$$

y<x na celém území

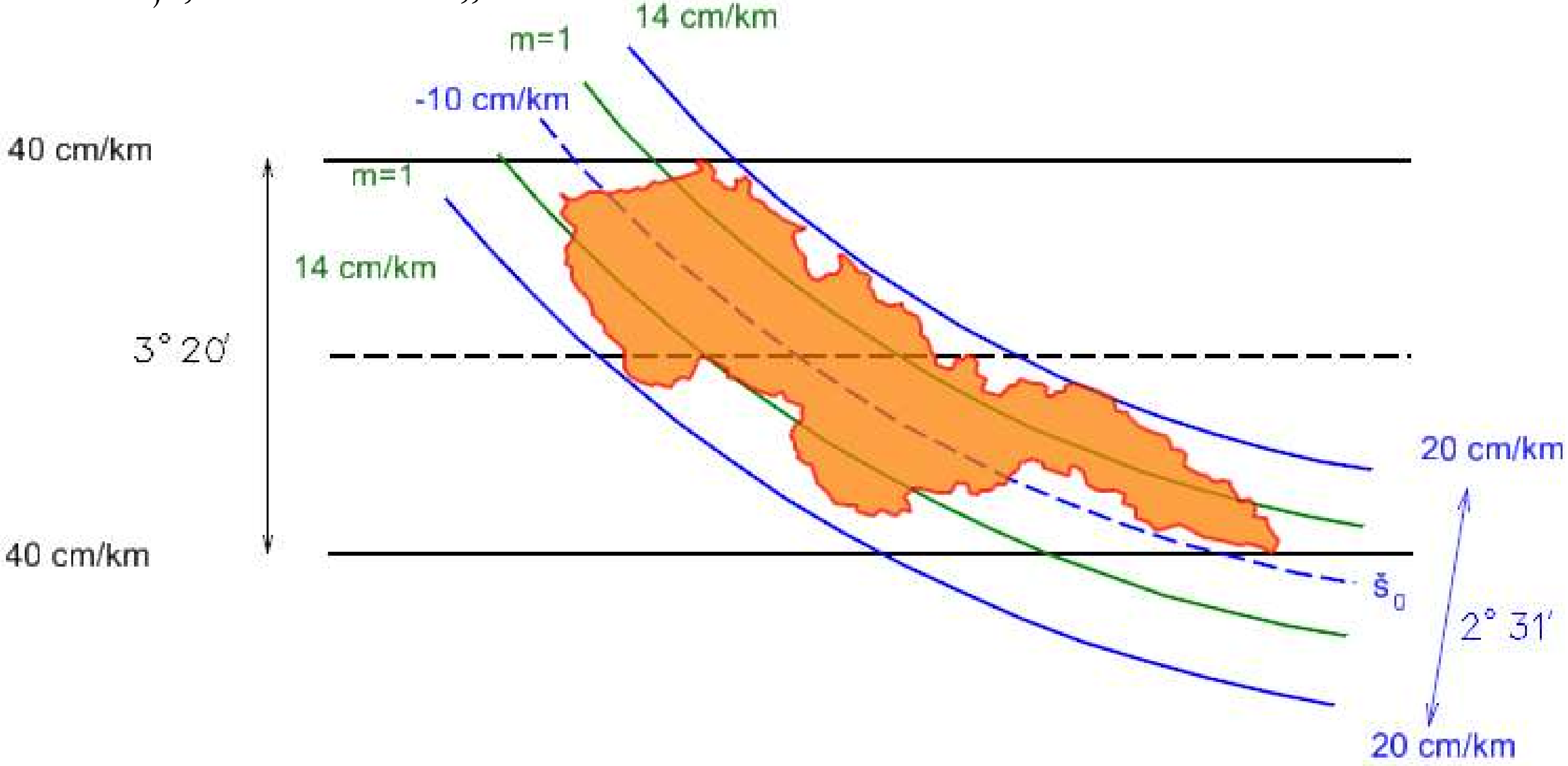
Orientace os unikátní, problém při práci se zahraničním software.



42. Křovákovo zobrazení a Československo

Snaha minimalizovat délkové zkreslení:

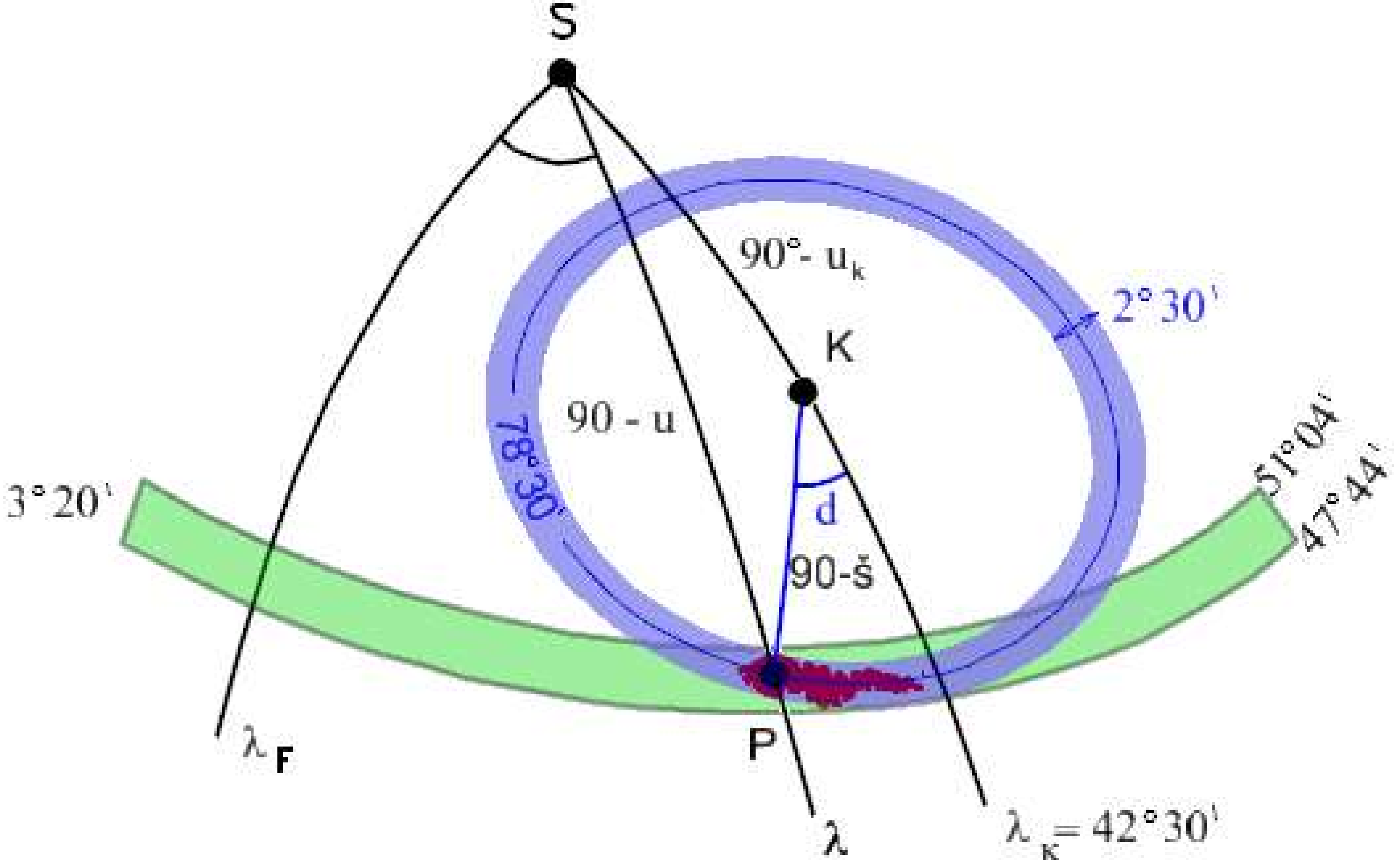
- Kužel v normální poloze: zkreslení 40 cm/km, pás široký 3°20′, 400 km
- Kužel v obecné poloze: zkreslení 24 cm/km, užší pás 2°30′, 280 km
- Použití multiplikační konstanty k=0.9999, snížení délkového zkreslení na 14 cm/km okraje, -10cm km na „nezkreslené“ rovnoběžce.



43. Křovákovo zobrazení a Československo

Volba pásu v normální a obecné poloze

Kartografický pól byl určen Křovákem empiricky, kružítkem.



44. Křovákovo zobrazení, zkreslení

- Zobrazení je konformní, plošné zkreslení je kvadrátem délkového zkreslení.
- Délkové zkreslení vzniká při zobrazení elipsoidu na kouli (zanedbatelné, o 2 řády menší) a při zobrazení koule do roviny.
- Délkové zkreslení roste na sever a na jih od nezkreslené rovnoběžky.

Zmenšení vlivu délkového zkreslení:

- Aby se minimalizoval vliv délkového zkreslení

$$m_{r0} = \frac{n\rho_0}{R\cos š_0} = 0,9999 \Rightarrow \rho_0 = \frac{0,9999R\cos š_0}{\sin š_0} = 0,9999R\mathrm{cotg}š_0 = 1298039,0046m$$

- Přenásobení poloměru koule nemá na zkreslení vliv (v literatuře mylně uváděno), zkreslení invariantní vůči poloměru.
- Zkreslení na základní rovnoběžce klesne o 1/10 000.

Důsledek:

- Vzniknou 2 nezkreslené rovnoběžky, ačkoliv nejde o sečný kužel.

Původní návrh: absolutní hodnota zkreslení na celém území 10cm/km se nepodařilo dodržet.

Výpočet zkreslení řadou:

$$m = 0,9999 + 00012282\Delta\rho^2 - 0,00000315\Delta\rho^3 + 0,00000018\Delta\rho^4$$
$$\Delta\rho = \rho - \rho_0 \quad [100\ \mathrm{km}]$$

45. Meridiánová konvergence

Důsledek sbíhavosti poledníků.
Úhel mezi obrazem poledníku a rovnoběžkou s osou x.
Severní směr na mapě není totožný se skutečným severem.

$$\boxed{c = \varepsilon - \xi}$$

ε…polární souřadnice bodu
ξ…úhel mezi obrazem zeměpisného a kartografického poledníku.

Zobrazení je konformní, úhel ξ se v zobrazení nezkreslí.
S použitím sférické trigonometrie platí:

$$\frac{\sin\xi}{\cos u_k} = \frac{\sin(180-d)}{\cos u} \Rightarrow \boxed{\sin\xi = \frac{\cos u_k \sin(180-d)}{\cos u}}$$

Výpočet lze realizovat i pomocí řady: $\boxed{c = 0{,}008257\,y + 2{,}373\frac{y}{x} \text{ [km]}}$

Hodnoty meridiánové konvergence rostou směrem V-Z.
Západní Čechy: až 10 stupňů,
Nevhodné pro geografické účely: co je severněji, Plzeň nebo Ostrava?