Transformace zeměpisných souřadnic mezi elipsoidy (stručný návod k úloze 1)

1 Úvod

Transformaci bodu $P' = [\varphi', \lambda']$ ze systému zeměpisných souřadnic zdrojového referenčního/zemského elipsoidu daného parametry (a, b) na bod $P = [\varphi, \lambda]$ do systému zeměpisných souřadnic cílového referenčního/zemského elipsoidu daného parametry (a, b) lze realizovat v těchto fázích:

- Převod zeměpisných souřadnic bodu $P' = [\varphi', \lambda']$ zdrojového elipsoidu na geocentrické prostorové souřadnice $P' = [X', Y', Z']$ vztaženému k tomuto elipsoidu.
- Prostorová podobnostní transformace (Helmertova) mezi geocentrickými souřadnicemi bodu $P = [X', Y', Z']$ zdrojového elipsoidu a geocentrickými souřadnicemi bodu $P = [X, Y, Z]$ cílového elipsoidu.
- Převod geocentrických souřadnic bodu $P = [X, Y, Z$ cílového elipsoidu na zeměpisné souřadnice $P = [\varphi, \lambda]$ vztažené k cílovému elipsoidu.

Oba elipsoidy jsou vůči posunuté, natočené, mají rozdílné hodnoty poloos a, b, jedná se o transformaci nestejnorodých souřadnic. Níže uvedené vztahy jsou přibližné a poskytují přesnost transformace v řádech cm.

2 Vztah zeměpisných a geocentrických souřadnic

Prostorové geocentrické souřadnice (X, Y, Z) bodu určeného zeměpisnými souřadnicemi (φ, λ) ležícího na povrchu referenčního elipsoidu daného parametry (a, b) lze určit ze vztahu

$$P = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ (1-e^2)\sin\varphi \end{pmatrix}, \tag{1}$$

kde N představuje příčný poloměr křivosti

$$N = \frac{a}{W},$$

W první geodetickou funkci

$$W = \sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi},$$

e^2 první excentricitu elipsoidu

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

3 Prostorová podobnostní transformace souřadnice (Helmertova)

Lineární transformace, která bodu $P_i' = [X_i', Y_i', Z_i']$ v souřadnicovém systému $(0', X', Y', Z')$ přiřazuje právě jeden bod $P_i = [X_i, Y_i, Z_i]$ v souřadnicovém systému $(0, X, Y, Z)$, definovaná ve tvaru

$$\mathbf{P} = m\mathbf{R}\mathbf{P'} + \triangle, \tag{2}$$

je nazývána prostorovou podobnostní transformací (tzv. Helmertovou transformací) souřadnic v $\mathbf{E^3}$. Matice $\triangle$ vyjadřuje translaci obou soustav, matice $\mathbf{R}$ je rotační matice (její koeficienty představují směrové kosiny úhlů rotace $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ dle jednotlivých souřadnicových os), m označujeme jako měřítkový koeficient.

Rovnici (2) lze rozepsat do tvaru

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \triangle X \\ \triangle Y \\ \triangle Z \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Transformace vyžaduje znalost čtyř identických bodů v obou souřadnicových systémech, které slouží k výpočtu transformačního klíče (1x měřítko, 3x rotace, 3x posuny). Prvky matice $\mathbf{R}$ představují směrové kosíny rotací dle jednotlivých souřadnicových os

$$\mathbf{R} \quad = \quad \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z,$$

kde

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega_x & \sin\omega_x \\ 0 & -\sin\omega_x & \cos\omega_x \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \cos\omega_y & 0 & -\sin\omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\omega_y & 0 & \cos\omega_y \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} \cos\omega_z & \sin\omega_z & 0 \\ -\sin\omega_z & \cos\omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Součin prvních dvou matic má tvar

$$\mathbf{R}_x \mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \cos\omega_y & 0 & -\sin\omega_y \\ \sin\omega_x \sin\omega_y & \cos\omega_x & \sin\omega_x \cos\omega_y \\ \cos\omega_x \sin\omega_y & -\sin\omega_x & \cos\omega_x \cos\omega_y \end{pmatrix},$$

vynásobením zprava maticí $\mathbf{R}_z$ získáme hledanou matici $\mathbf{R}$, jejíž prvky lze zapsat jako

$$\begin{aligned}
r_{11} &= \cos\omega_y \cos\omega_z, \\
r_{12} &= \cos\omega_y \sin\omega_z, \\
r_{13} &= -\sin\omega_y, \\
r_{21} &= \sin\omega_x \sin\omega_y \cos\omega_z - \cos\omega_x \sin\omega_z, \\
r_{22} &= \cos\omega_x \cos\omega_z + \sin\omega_x \sin\omega_y \sin\omega_y, \\
r_{23} &= \sin\omega_x \cos\omega_y, \\
r_{31} &= \cos\omega_x \sin\omega_y \cos\omega_z + \sin\omega_x \sin\omega_z, \\
r_{32} &= \cos\omega_x \sin\omega_y \sin\omega_z - \sin\omega_x \cos\omega_z, \\
r_{33} &= \cos\omega_x \cos\omega_y.
\end{aligned}$$

Pro malé hodnoty rotací $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ v řádech $''$ lze vztah dále zjednodušit.

Připomeňme, že s využitím Maclaurinova rozvoje můžeme funkci $f(x)$ nahradit mocninnou řadou ve tvaru

$$T_n(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1}(x).$$

Pro funkci $f(x) = \sin x$ a její derivace platí

$$f'(x) = \cos x, \qquad f''(x) = -\sin x, \qquad f^{(3)}(x) = -\cos x, \qquad f^{(4)}(x) = \sin x, \qquad f^{(5)}(x) = \cos x,$$

analogicky, pro funkci $f(x) = \cos x$ lze psát

$$f'(x) = -\sin x, \qquad f''(x) = -\cos x, \qquad f^{(3)}(x) = \sin x, \qquad f^{(4)}(x) = \cos x, \qquad f^{(5)}(x) = -\sin x.$$

V bodě $x = 0$ jsou funkční hodnoty jednotlivých derivací derivací funkce $\sin(x)$

$$f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 0, \qquad f^{(3)}(0) = -1, \qquad f^{(4)}(0) = 0, \qquad f^{(5)}(0) = 1,$$

analogicky i pro funkci

$$f'(0) = 0, \qquad f''(0) = -1, \qquad f^{(3)}(0) = 0, \qquad f^{(4)}(0) = 1, \qquad f^{(5)}(0) = 0.$$

Maclaurinův rozvoj pro obě funkce má tvar

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + R_8(x), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + R_7(x). \end{aligned}$$

Zanedbáním členů vyššího řádů získáme přibližné vztahy

$$\sin x \approx x, \qquad \cos x \approx 1.$$

Matice rotace **R** pak přejde do tvaru

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Hodnoty transformačních koeficientů byly určeny z identických bodů trigonometrické sítě I. řádu (známy souřadnice v systému JTSK a WGS-84) vyrovnáním metodou nejmenších čtverců.

ω_x	$4.9984''$
ω_y	$1.5867''$
ω_z	$5.2611''$
$m-1$	$-3.5623e^{-6}$
ΔX	-570.8285 m
ΔY	-85.6769 m
ΔZ	-462.8420 m

4 Převod geocentrických souřadnic na zeměpisné souřadnice

S přihlédnutím k

$$\begin{aligned} X &= N\cos\varphi\cos\lambda, \\ Y &= N\cos\varphi\sin\lambda, \\ Z &= N(1-e^2)\sin\varphi, \end{aligned}$$

zeměpisnou délku λ lze určit ze vztahu

$$\mathrm{tg}\lambda = \frac{Y}{X}. \tag{5}$$

Sečteme -li čtverce obou rovnic

$$\begin{aligned} X^2 &= N^2\cos^2\varphi\cos^2\lambda, \\ Y^2 &= N^2\cos^2\varphi\sin^2\lambda, \end{aligned}$$

pak

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= N^2\cos^2\varphi, \\ \sqrt{X^2+Y^2} &= N\cos\varphi. \end{aligned}$$

Po vydělení

$$\begin{aligned} \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} &= \frac{N(1-e^2)\sin\varphi}{N\cos\varphi} = \left(1-e^2\right)\mathrm{tg}\varphi, \\ \mathrm{tg}\varphi &= \frac{Z}{(1-e^2)\sqrt{X^2+Y^2}}. \end{aligned}$$